پردیس علوم پایه

« دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر »

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان:

حلقه‌های J — تمیز قوی

نگارش:

زهرا مرشدین

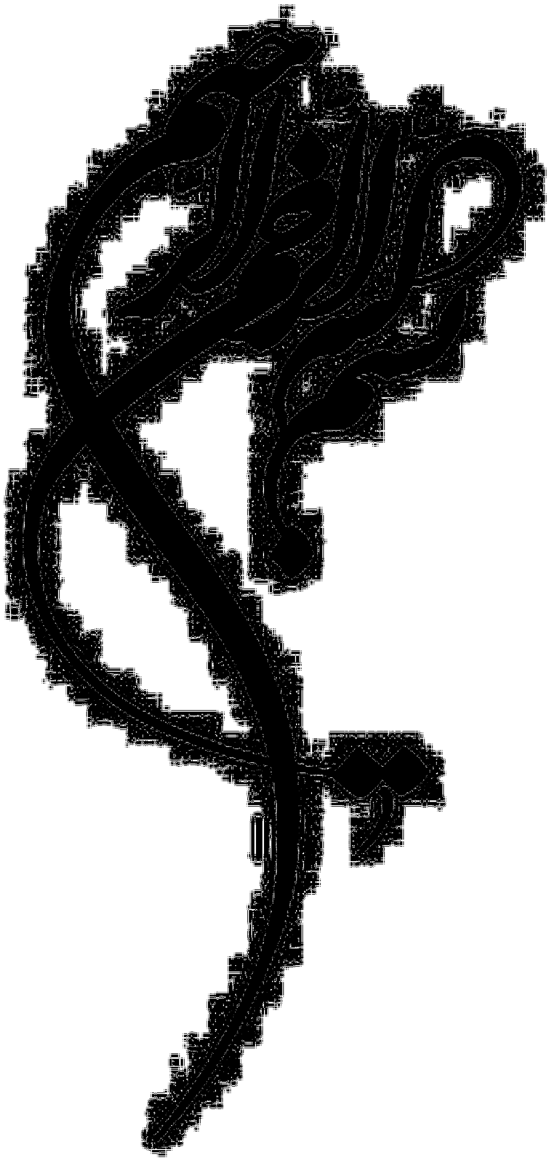
استاد راهنما:

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور:

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

تابستان ۱۳۹۱



الهی!

درخت وصف، بی شک به آسمان ثنای تو نتواند رسید و پرنده‌ی عقل بر اوج جمال تو بال نتواند سایید.

خداوندا!

ما را از آنانی قرار ده که پرده‌های جهل از جلوی چشمانشان برداشته شده و ابرهای ظلمت در آسمان وجودشان شکافته شده.

آنان که از خیمه‌ی خویشتن رهایی یافته‌اند و حصار هویٰ را در هم شکسته‌اند.

آنان که از بیراهه‌های وهم و چند راهه‌های ریب خلاصی یافته‌اند.

خداوندا!

ما را از آنانی قرار ده که سینه‌هایشان با تنفس در فضای عرفان تو گشاده گشت.

آنان که در دریای سعادت، کشتی همتشان با بادبان زهد پیشی گرفت.

خدایا!

چه لذت‌بخش است گذر نسیم یاد تو بر دل‌ها و چه زیباست پرواز پرنده‌ی خاطر تو بر قلب‌ها و چه شیرین است پیمودن اندیشه در جاده‌ی غیب‌ها به سوی تو.

ما را از نزدیک‌ترین عارفان و شایسته‌ترین بندگان و راستگوترین مطیعان و خالص‌ترین عبادت‌کنندگانت قرار ده.

دریافتی از مناجات خمس عشره، مناجات‌العارفین

تشکرو قدردانی

در اینجا بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر الطافشان نبود، این پژوهش به پایان نمی‌رسید.

از استاد عزیز و گرانقدر سرکار خانم دکتر اشرفی به خاطر راهنمایی‌های متین، ارزنده و پربارشان که همواره روشن‌کننده‌ی مسیر این پژوهش بود، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر بهمنی که با پیشنهادات سازنده‌ی خود، مشاور بنده در نگارش این پایان‌نامه بودند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از تمامی اساتید بزرگوار که در طول دوره‌ی تحصیلی کارشناسی ارشد مرا در تحصیل علم و معرفت یاری نموده‌اند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود، وجودشان برایم همه بهره، توانشان رفت تا به توانایی برسم.
آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی من است.
آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت.
در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می‌زنم.

و

همسر مهربانم

سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار

چکیده

در این پایان نامه ابتدا با حلقه‌های J – تمیز قوی و برخی از ویژگی‌های این حلقه‌ها آشنا می‌شویم. همچنین ارتباط حلقه‌های J – تمیز قوی را با حلقه‌های تمیز قوی بیان می‌کنیم. مشاهده می‌شود که حلقه‌های J – تمیز قوی حالت خاصی از حلقه‌های تمیز قوی هستند. در ادامه شرایط معادلی را برای J – تمیز قوی بودن $T_n(R)$ (حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌ی R) در حالتی که R یک حلقه‌ی موضعی باشد، بیان می کنیم. اگر $n \geq ۲$ و R موضعی باشد، ثابت می‌شود $T_n(R)$، J – تمیز قوی است اگر و تنها اگر R بلیچد [1] باشد و $\frac{R}{J(R)} \cong \mathbb{Z}_۲$. برای J – تمیز قوی بودن ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌ی موضعی R، با استفاده از تشابه ماتریس‌ها ملاکی ارائه می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی یک حلقه‌ی موضعی، تمیز قوی است اگر و تنها اگر هر ماتریس ۲×۲ منفرد محض روی آن، J – تمیز قوی باشد. در پایان ثابت می‌شود حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی یک حلقه‌ی موضعی جابجایی، J – تمیز قوی نیست؛ اما می‌توان با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی یک ماتریس ۲×۲، J – تمیز قوی بودن آن را روی یک حلقه‌ی موضعی جابجایی مشخص کرد.

مطالب این پایان‌نامه بر اساس منابع [۵]، [۱۳]، [۱۱] و [۱۲] تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌ی تمیز قوی، حلقه‌ی J – تمیز قوی، حلقه‌ی موضعی، ماتریس ۲×۲، حلقه‌ی ماتریسی

---
[1] bleached

مقدمه

در این پایان نامه همه‌ی حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار و مدول‌ها یکانی هستند. حلقه‌ی R تمیز نامیده می‌شود هرگاه هر عضو آن به صورت مجموع یک عضو خودتوان و یک عضو یکه‌ی R باشد. این مفهوم اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط نیکلسون [۲] [۱۱] مطرح شد. نیکلسون ثابت کرد هر حلقه‌ی تمیز، مناسب است و عکس این مطلب زمانی برقرار است که خودتوان‌های R مرکزی باشند. سپس او در سال ۱۹۹۹ مفهوم حلقه‌ی تمیز قوی را برای اولین بار مطرح کرد [۱۲]. حلقه‌ی R، تمیز قوی نامیده می‌شود هرگاه هر عضو آن به صورت مجموع یک عضو خودتوان و یک عضو یکه‌ی R باشد که با یکدیگر جابجا شوند. واضح است که هر حلقه‌ی موضعی، تمیز قوی است. نیکلسون ثابت کرد حلقه‌های $\pi-$ منظم قوی، تمیز قوی هستند. همچنین ثابت کرد یک مدول در لم فیتینگ [۳] صدق می‌کند اگر و تنها اگر حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن، تمیز قوی باشد. اما در آن زمان دو سؤال عمده وجود داشت:

۱) آیا هر حلقه‌ی نیم‌کامل تمیز قوی است؟

۲) آیا حلقه‌ی ماتریس‌های یک حلقه‌ی تمیز قوی، تمیز قوی است؟

در سال ۲۰۰۴، وانگ [۴] و چن [۵] [۱۵] به این سؤالات پاسخ دادند. آن‌ها حلقه‌ی موضعی $R=\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\mid n$ فرد است$\}$ را در نظر گرفتند و نشان دادند $M_2(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌کامل است که تمیز قوی نیست. چون R یک حلقه‌ی موضعی است، پس تمیز قوی می‌باشد. به این ترتیب پاسخ هر دو سؤال منفی است.

اگر هر عضو حلقه‌ی R، یک نمایش منحصر به فرد به صورت مجموع یک عضو خودتوان و یک عضو یکه‌ی R داشته باشد، حلقه‌ی R را به‌طوریکتا تمیز می‌نامیم. این مفهوم اولین بار در سال ۲۰۰۴ توسط نیکلسون و زو[۶] [۱۳] مطرح شد. آن‌ها شرایط معادلی را برای آنکه یک حلقه به‌طوریکتا تمیز

---

[۲] W.K. Nicholson
[۳] Fitting's lemma
[۴] Zhou Wang
[۵] Jianlong Chen
[۶] Y. Zhou

باشد، بیان و اثبات کردند. همچنین نشان دادند اگر R یک حلقه‌ی به‌طوریکتا تمیز باشد و $e \in R$ خودتوان باشد، آنگاه eRe به‌طوریکتا تمیز است. به‌علاوه ثابت کردند تصویر همریخت هر حلقه‌ی به‌طوریکتا تمیز، به‌طوریکتا تمیز است.

اما سؤال دیگری در مورد حلقه‌های تمیز قوی از سال ۱۹۹۹ وجود داشت:

اگر R یک حلقه‌ی به‌طوریکتا تمیز باشد و $e \in R$ خودتوان باشد، آیا eRe نیز تمیز قوی است؟ در سال ۲۰۰۶ چن[۷] [۸] ثابت کرد پاسخ این سؤال مثبت است.

اما مسأله‌ای که از ابتدا توجه بسیاری از دانشمندان و پژوهشگران را به خود جلب کرده‌است، بررسی تمیز بودن و تمیز قوی بودن حلقه‌ی ماتریس‌ها و حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی بوده است.

در سال ۲۰۰۱ نیکلسون و هن [۸] [۱۰] ثابت کردند حلقه‌ی R تمیز است اگر و تنها اگر حلقه‌ی ماتریس‌های $M_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز باشد اگر و تنها اگر حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی $T_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز باشد.

در سال ۱۹۹۹ نیکلسون همچنین ثابت کرد اگر R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد، آنگاه $T_۲(R)$ تمیز قوی است. به عنوان یک نتیجه از [۱۵] می‌توان گفت اگر R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی و به‌طوریکتا تمیز باشد، در این صورت $T_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز قوی است. در سال ۲۰۰۶ چن[۹]، یانگ [۱۰] و زو [۷] خانواده‌های جدیدی از حلقه‌های تمیز قوی را از میان حلقه‌ی ماتریس‌ها و حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی معرفی کردند. برای مثال ثابت کردند به ازای هر عدد اول p، $M_۲(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ که $\widehat{\mathbb{Z}}_p = End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$، حلقه‌ی اعداد صحیح $p-$ ادیک می‌باشد، تمیز قوی است اما $M_۲(\mathbb{Z}_{(p)})$ که $\mathbb{Z}_{(p)}$ موضعی‌سازی $\mathbb{Z}$ در p می‌باشد، تمیز قوی نیست. همچنین ثابت کردند اگر R یک حلقه‌ی نیم‌کامل جابجایی باشد، در این صورت $T_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز قوی است. پس از آن در سال ۲۰۰۷ بروآ[۱۱]، دیزل [۱۲] و دورسی [۱۳] [۲] ثابت کردند اگر R یک حلقه‌ی موضعی و بلیچد باشد، آنگاه $T_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز قوی است. آن‌ها نشان دادند اگر R یک حلقه‌ی موضعی

[۷] Weixing Chen
[۸] J. Han
[۹] Jianlong Chen
[۱۰] X. Yang
[۱۱] G. Borooah
[۱۲] A.J. Diesl
[۱۳] T.J. Dorsey

جابجایی باشد، بلیچد است و در نتیجه اگر R یک حلقه‌ی موضعی جابجایی باشد، در این صورت $T_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز قوی است. یک سال بعد آن‌ها در مقاله‌ی دیگری [۳] حلقه‌های موضعی جابجایی را که $M_n(R)$، به ازای هر $n \geq ۱$، تمیز قوی باشد، با استفاده از تجزیه‌ی چند جمله‌ای مشخصه‌ی آن، کاملاً مشخص کردند. اگر R یک حلقه‌ی موضعی و $n \geq ۱$ باشد، مشخص نیست چه وقت $M_n(R)$، تمیز قوی است. در سال ۲۰۰۸ یانگ و زو [۱۶] حلقه‌های موضعی R را که $M_۲(R)$ تمیز قوی است، کاملاً مشخص کردند.

حلقه‌ی R را $J-$ تمیز قوی گوییم هرگاه هر عضو آن را بتوان به صورت مجموع یک عضو خودتوان و یک عضو از رادیکال جیکوبسن R بیان کرد که با هم جابجا می‌شوند. در این پایان‌نامه با این نوع از حلقه‌ها و برخی از ویژگی‌های آن آشنا خواهیم شد. همچنین $J-$ تمیز قوی بودن حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌ی موضعی R و حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌ی موضعی جابجایی R را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول این پایان‌نامه، با تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آشنا می‌شویم. در فصل دوم با حلقه‌های به‌طوریکتا تمیز و حلقه‌های مناسب و تبادلی و برخی از ویژگی‌های آن‌ها آشنا خواهیم شد. همچنین مطالبی را در مورد حلقه‌های منظم قوی و $\pi-$ منظم قوی و حلقه‌ی درون‌ریختی‌های یک مدول بیان خواهیم کرد. از مطالب این فصل در اثبات قضایای فصل‌های بعد، استفاده می‌کنیم. در فصل سوم با مفهوم حلقه‌های $J-$ تمیز قوی و برخی از ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم. همچنین شرایط معادلی را برای $J-$ تمیز قوی بودن حلقه‌ی R بیان می‌کنیم و مثال‌هایی از این نوع حلقه‌ها را ذکر می‌کنیم. در فصل چهارم با مفهوم بلیچد بودن حلقه‌ی موضعی R، آشنا می‌شویم و شرایط معادلی را برای $J-$ تمیز قوی بودن $T_n(R)$ (حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه‌ی R) در حالتی که R یک حلقه‌ی موضعی باشد، بیان می‌کنیم. اگر $n \geq ۲$ و R موضعی باشد، ثابت می‌شود $T_n(R)$، $J-$ تمیز قوی است اگر و تنها اگر R بلیچد باشد و $\frac{R}{J(R)} \cong \mathbb{Z}_۲$. در فصل پایانی در مورد $J-$ تمیز قوی بودن ماتریس‌های ۲×۲ مطالبی را بیان می‌کنیم. برای $J-$ تمیز قوی بودن ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌ی موضعی R با استفاده از تشابه ماتریس‌ها ملاکی ارائه می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌ی موضعی R، تمیز قوی است اگر و تنها اگر هر ماتریس ۲×۲ منفرد محض روی آن، $J-$ تمیز قوی باشد. در نهایت

ثابت می‌شود حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ روی یک حلقه‌ی موضعی جابجایی، J — تمیز قوی نیست؛ اما می‌توان با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی یک ماتریس ۲×۲، J — تمیز قوی بودن آن را روی یک حلقه‌ی موضعی جابجایی مشخص کرد.

لازم به ذکر است مطالب این پایان‌نامه بر اساس منابع [۵]، [۱۳]، [۱۱] و [۱۲] تنظیم شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آشنا می‌شویم. در بخش اول با مطالبی در مورد حلقه‌ها و در بخش دوم با مطالبی در مورد مدول‌ها آشنا می‌شویم. اثبات قضیه‌هایی را که کاربرد بیشتری دارند، بیان می‌کنیم و از اثبات سایر قضایا صرف‌نظر می‌کنیم و به منابع مورد استفاده ارجاع می‌دهیم. در این پایان نامه همه‌ی حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار و مدول‌ها یکانی هستند.

۱.۱ حلقه‌ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R و S حلقه باشند. تابع $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ها است هرگاه به ازای هر $a, b \in R$،

$$f(ab) = f(a)f(b), \qquad f(a+b) = f(a) + f(b).$$

و همچنین f حافظ ۱ باشد؛ یعنی $f(1_R) = 1_S$.

تعریف ۲.۱.۱ ایده‌آل P در حلقه‌ی R را اول گوییم اگر $P \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل I و J در R، اگر $IJ \subseteq P$، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

تعریف ۳.۱.۱ ایده‌آل چپ (راست) M در حلقه‌ی R را ماکسیمال گوییم اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل چپ (راست) N که $M \subseteq N \subseteq R$، یا $N = M$ یا $N = R$.

گزاره ۴.۱.۱ اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد، آنگاه هر ایده‌آل ماکسیمال آن، اول است.

برهان . به منبع [۱۷] قضیه‌ی ۱۹.۲ مراجعه شود. ■

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم M، $R-$ مدول باشد. M را وفادار نامیم هرگاه $Ann(M) = 0$.

تعریف ۶.۱.۱ حلقه‌ی R را اولیه‌ی چپ (راست) می‌نامیم هرگاه $R-$ مدول چپ (راست) ساده و وفاداری وجود داشته‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱ ایده‌آل P از حلقه‌ی R را اولیه‌ی چپ (راست) گوییم هرگاه $\frac{R}{P}$ یک حلقه‌ی اولیه‌ی چپ (راست) باشد.

تعریف ۸.۱.۱ عضو $x \in R$ را شبه منظم چپ (راست) گوییم هرگاه $1 - x$ یک معکوس چپ (راست) در R داشته باشد. همچنین $x \in R$ را شبه منظم گوییم هرگاه $1 - x$ یک معکوس دو طرفه در R داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی R شبه منظم چپ (راست) نامیده می شود هرگاه هر عضو آن شبه منظم چپ (راست) باشد. یک زیر مجموعه‌ی R شبه منظم نامیده می شود هرگاه هر عضو آن شبه منظم باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$ مدول و $K \leqslant M$ باشد. گوییم K در M بسیار کوچک است ($K \ll M$) هرگاه به ازای هر $L \leqslant M$ که $K + L = M$، آنگاه $L = M$. گوییم ایده‌آل I در حلقه‌ی R بسیار کوچک است هرگاه به عنوان زیرمدول R بسیار کوچک باشد.

تعریف و نمادگذاری ۱۱.۱.۱ اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال چپ (راست) R را رادیکال جیکوبسن R می‌نامیم و آن را با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت هر کدام از زیرمجموعه‌های زیر از R، با $J(R)$ برابر است:

۱) اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ (راست) اولیه‌ی R؛

۲) $\{x \in R \mid$ به ازای هر $r, s \in R$، rxs شبه منظم باشد$\}$؛

۳) $\{x \in R \mid$ به ازای هر $r \in R$، rx شبه منظم باشد$\}$؛

۴) $\{x \in R \mid$ به ازای هر $s \in R$، xs شبه منظم باشد$\}$؛

۵) اجتماع تمام ایده‌آل‌های چپ (راست) شبه منظم R؛

۶) اجتماع تمام ایده‌آل‌های شبه منظم R؛

۷) بزرگترین ایده‌آل چپ (راست) بسیار کوچک منحصر به فرد R.

به علاوه اگر در مجموعه‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ عبارت شبه منظم چپ یا شبه منظم راست را جایگزین شبه منظم کنیم، این مجموعه‌ها هم $J(R)$ را توصیف می‌کنند.

برهان . به منبع [۱] قضیه‌ی ۱۵.۳ مراجعه شود. ■

گزاره ۱۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $e \in R$ یک خودتوان غیر صفر باشد، در این صورت

$$J(M_n(R)) = M_n(J(R)), \qquad J(eRe) = eJ(R)e.$$

برهان . به منبع [۱] گزاره‌ی ۱۷.۱۳ مراجعه شود. ■

گزاره ۱۴.۱.۱ فرض کنید $\{R_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای ناتهی از حلقه‌ها باشد. در این صورت

$$J(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} J(R_i).$$

برهان . ابتدا فرض می‌کنیم $(x_i) \in J(\prod_{i\in I} R_i)$. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۱۲.۱.۱ به ازای هر $(t_i) \in \prod_{i\in I} R_i$، $\text{۱} - (t_i)(x_i)$ در $\prod_{i\in I} R_i$ معکوس‌پذیر است. اما می‌دانیم $\text{۱} - (t_i)(x_i) = (\text{۱}_{R_i} - t_i x_i)$. بنابراین به ازای هر $i \in I$، به ازای هر $t_i \in R_i$، $\text{۱}_{R_i} - t_i x_i \in U(R_i)$ و در نتیجه $x_i \in J(R_i)$. لذا $(x_i) \in \prod_{i\in I} J(R_i)$. بنابراین $J(\prod_{i\in I} R_i) \subseteq \prod_{i\in I} J(R_i)$.
برعکس فرض کنیم $(x_i) \in \prod_{i\in I} J(R_i)$. در این صورت به ازای هر $i \in I$، $x_i \in J(R_i)$. بنابراین به ازای هر $i \in I$، به ازای هر $t_i \in R_i$، $\text{۱}_{R_i} - t_i x_i$ معکوس‌پذیر است. در نتیجه $(\text{۱}_{R_i} - t_i x_i)$ در $\prod_{i\in I} R_i$ معکوس‌پذیر می‌باشد. اما چون $(\text{۱}_{R_i} - t_i x_i) = \text{۱} - (t_i)(x_i)$، پس به ازای هر $(t_i) \in \prod_{i\in I} R_i$، $\text{۱} - (t_i)(x_i)$ در $\prod_{i\in I} R_i$ معکوس‌پذیر است. لذا $(x_i) \in J(\prod_{i\in I} R_i)$. بنابراین $\prod_{i\in I} J(R_i) \subseteq J(\prod_{i\in I} R_i)$.
به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنید R و S دو حلقه باشند و $\varphi : R \longrightarrow S$ همریختی پوشا باشد. در این صورت $\varphi(J(R)) \subseteq J(S)$.

برهان . فرض می‌کنیم $x \in \varphi(J(R))$، نشان می‌دهیم $x \in J(S)$. برای این منظور کافی است نشان دهیم به ازای هر $s \in S$، $\text{۱}_S - sx$ معکوس‌پذیر است. چون $x \in \varphi(J(R))$ بنابراین $t \in J(R)$ وجود دارد به طوری که

$$x = \varphi(t).$$

حال فرض کنیم s عضو دلخواه S باشد، بنابراین $r' \in R$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(r') = s.$$

چون φ همریختی حلقه‌ای است، لذا

$$\begin{aligned} \text{۱}_S - sx = \text{۱}_S - \varphi(r')\varphi(t) &= \text{۱}_S - \varphi(r't) \\ &= \varphi(\text{۱}_R) - \varphi(r't) \\ &= \varphi(\text{۱}_R - r't). \end{aligned}$$

چون $t \in J(R)$ و $r' \in R$، لذا $۱_R - r't$ معکوس‌پذیر است. بنابراین $u \in R$ وجود دارد به طوری که

$$u(۱_R - r't) = (۱_R - r't)u = ۱_R$$

ادعا می‌کنیم $\varphi(u)$ معکوس $۱_S - sx$ است.

$$\begin{aligned}\varphi(u)(۱_S - sx) = \varphi(u)\varphi(۱_R - r't) &= \varphi(u(۱_R - r't)) \\ &= \varphi(۱_R) \\ &= ۱_S\end{aligned}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $(۱_S - sx)\varphi(u) = ۱_S$. بنابراین حکم به دست می‌آید. ■

نتیجه ۱۶.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\frac{I+J(R)}{I} \subseteq J(\frac{R}{I})$.

برهان . همریختی حلقه‌ای پوشای

$$\begin{aligned}\varphi : R &\longrightarrow \frac{R}{I} \\ r &\longrightarrow r + I\end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. با توجه به گزاره‌ی ۱۵.۱.۱، $\varphi(J(R)) \subseteq J(\frac{R}{I})$. اما می‌دانیم $\varphi(J(R)) = \frac{I+J(R)}{I}$. بنابراین $\frac{I+J(R)}{I} \subseteq J(\frac{R}{I})$. ■

قضیه ۱۷.۱.۱ برای یک حلقه‌ی R، شرایط زیر معادلند:

۱) R یک حلقه‌ی موضعی است؛

۲) R یک ایده‌آل ماکسیمال چپ منحصر به فرد دارد؛

۳) $J(R)$ یک ایده‌آل ماکسیمال چپ است؛

۴) مجموعه‌ی اعضای R که معکوس چپ ندارند، تحت عمل جمع بسته است؛

۵) $J(R) = \{x \in R \mid Rx \neq R\}$؛

۶) $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی تقسیم است؛

۷) $J(R)=\{x\in R \mid$ معکوس پذیر نیست $x\}$؛

۸) اگر $x\in R$، آنگاه x یا $x-$ ۱ معکوس‌پذیر است.

برهان . به منبع [۱] قضیه‌ی ۱۵.۱۵ مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۸.۱.۱ حلقه‌ی R موضعی است اگر و تنها اگر $R=U(R)\cup J(R)$ که $U(R)$ مجموعه‌ی تمام عناصر معکوس‌پذیر در R است.

برهان . می‌دانیم به ازای هر $x\in R$، یا $x\in U(R)$ یا $x\notin U(R)$. بنابراین

$$R=\{x\in R \mid x\in U(R)\}\cup\{x\in R \mid x\notin U(R)\}$$

با توجه به قضیه‌ی ۱۷.۱.۱، حلقه‌ی R موضعی است اگر وتنها اگر $J(R)=\{x\in R \mid x\notin U(R)\}$. لذا حلقه‌ی R موضعی است اگر و تنها اگر $R=U(R)\cup J(R)$. ■

نتیجه ۱۹.۱.۱ اگر R یک حلقه‌ی موضعی باشد، آنگاه $۱+J(R)\subseteq U(R)$.

برهان . فرض کنیم $x\in ۱+J(R)$. در این صورت $x=۱+w$ به طوری که $w\in J(R)$. در نتیجه $-w\in J(R)$. بنابراین $-w$ معکوس‌پذیر نیست. لذا با توجه به شرط (۸) قضیه‌ی ۱۷.۱.۱، $۱-(-w)=۱+w\in U(R)$. بنابراین $x\in U(R)$ و در نتیجه $۱+J(R)\subseteq U(R)$. ■

گزاره ۲۰.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی باشد. در این صورت تنها خودتوان‌ها در R، ۰ و ۱ هستند.

برهان . فرض کنیم $x\in R = x^۲$. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۱۷.۱.۱، یا x معکوس‌پذیر است یا $x-$ ۱. اگر x معکوس‌پذیر باشد، چون تنها خودتوان معکوس‌پذیر ۱ است، لذا $x=۱$. اگر $x-$ ۱ معکوس‌پذیر باشد، چون x خودتوان است، پس $x-$ ۱ نیز خودتوان است و چون تنها خودتوان

معکوس‌پذیر ۱ است، لذا $1 = x - 1$ و در نتیجه $x = 0$. بنابراین $x = 0$ یا $x = 1$. در نتیجه تنها خودتوان‌ها ۰ و ۱ هستند. ■

تعریف ۲۱.۱.۱ حلقه‌ی R که به ازای هر $a \in R$، $a^2 = a$، یک حلقه‌ی بولی نام دارد.

اگر R یک حلقه‌ی بولی باشد، گزاره‌ی زیر به وضوح برقرار است:

گزاره ۲۲.۱.۱ هر حلقه‌ی بولی R جابجایی است و به ازای هر $a \in R$، $a + a = 0$.

گزاره ۲۳.۱.۱ هر حلقه‌ی خارج قسمتی از یک حلقه‌ی بولی، بولی است.

برهان . واضح است. ■

نتیجه ۲۴.۱.۱ تصویر همریخت هر حلقه‌ی بولی، یک حلقه‌ی بولی است.

برهان . با توجه به گزاره‌ی ۲۳.۱.۱، بدیهی است. ■

تعریف ۲۵.۱.۱ گوییم حلقه‌ی R شاخص پوچتوانی کراندار دارد هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر پوچتوان x از R، $x^n = 0$.

تنها عضو پوچتوان در هر حلقه‌ی بولی، ۰ است. بنابراین گزاره‌ی زیر به وضوح برقرار است:

گزاره ۲۶.۱.۱ هر حلقه‌ی بولی شاخص پوچتوانی کراندار دارد.

تعریف ۲۷.۱.۱ حلقه‌ی R، آرتینی چپ (آرتینی راست) است اگر و تنها اگر هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های چپ (ایده‌آل‌های راست) R سرانجام متوقف شود. حلقه‌ی R، آرتینی نامیده می‌شود اگر هم آرتینی چپ باشد و هم آرتینی راست.

قضیه ۲۸.۱.۱ اگر R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد، در این صورت $J(R)$ بزرگترین ایده‌آل پوچتوان منحصر به فرد چپ، راست، یا دو طرفه در R است.