دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش جبر

حاصلضرب تانسوری و حفظ حدود، برای سیستم هایی‌که روی تکواره ها تعریف می شوند

استاد راهنما

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

دکتر لیلا شریفان

نگارش:

هادی سیدآبادی

زمستان ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره‌گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گردآورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به‌کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می‌گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: هادی سیدآبادی

تاریخ و امضا:

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

نام دانشکده: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نام دانشجو: هادی سیدآبادی

عنوان پایان‌نامه: حاصلضرب تانسوری و حفظ حدود، برای سیستم هایی که روی تکواره ها تعریف می شوند

تاریخ دفاع: زمستان ۱۳۹۲

رشته: ریاضی محض

گرایش: جبر

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب هادی سیدآبادی به شماره دانشجویی ۹۰۱۳۱۲۳۰۵۳ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری‌شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: هادی سیدآبادی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر غلامرضا مقدسی

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

شهدای انقلاب اسلامی و دفاع مقدس

و

همسر و فرزندانم النا ز و آتوسا

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم دکتر شریفان که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی آن، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از سرکار خانم دکتر پورمیرزائی که داوری این پایان نامه را پذیرفتند، سپاسگزارم. همچنین از اساتید محترم گروه ریاضی محض، آقایان دکتر علی اکبر استاجی و دکتر قدیر صادقی کمال تشکر را دارم.

در پایان، یک بار دیگر سجده شکر بر آستان احدیت به جای می آورم. همچنین از همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که بهترین پشتیبان من بود تشکر می‌کنم.

هادی سیدآبادی

زمستان ۱۳۹۲

فرم چکیده پایان نامه تحصیلات تکمیلی **معاونت تحصیلات تکمیلی**	دانشگاه حکیم سبزواری

نام خانوادگی دانشجو:سیدآبادی	**نام:هادی**	**شماره دانشجویی: ۹۰۱۳۱۲۳۰۵۳**
استاد راهنما: دکتر غلامرضا مقدسی	**استاد مشاور:** دکتر لیلا شریفان	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** جبر
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:۱۳۹۲/۱۱/۲۸**	**تعداد صفحات:۱۰۸**

عنوان پایان نامه: حاصلضرب تانسوری و حفظ حدود،برای سیستم هایی که روی تکواره ها تعریف می شوند

کلید واژه ها: $S-$سیستم، حاصل ضرب تانسوری، حدود، عقب بر، همواری

چکیده:

در سال ۱۹۷۱ اشتنتروم با هدف مطالعه $S-$سیستم هایی خاص، که او آنها را هموار قوی نامید، مقاله ای را چاپ و منتشر کرد [۱۷] .

مقاله اشتنتروم به $S-$سیستم هایی چون A_S اختصاص دارد و بیان می کند که تابعگون $- \otimes A_S$ که از رسته $S-$سیستم های چپ به رسته مجموعه هاست، تحت شرایطی، عقب بر و برابر ساز را حفظ می کند. ولی در مورد حفظ سایر حدود از جمله حاصل ضرب یا اشتراک متناهی یا دلخواه،در [۱۷] مطالعه ای انجام نشده است.

از جمله کسانی که تحقیقات اشتنتروم را ادامه دادند، بولمن- فلمینگ و لان بودند که در سال ۲۰۰۱ مقاله ای تحت عنوان «حاصل ضرب تانسوری و حفظ حدود، برای سیستم هایی که روی تکواره ها تعریف می شوند» [۶] را چاپ و منتشر کردند که مرجع اصلی این پایان نامه می باشد.

در این پایان نامه، با استفاده از مقاله فوق و چند منبع دیگر، حالات مختلف همواری در $S-$سیستم ها و به خصوص $S-$سیستم های خارج قسمتی مورد بحث و بررسی قرار گرفته و در پایان ارتباط بین آنها بیان شده است.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

فهرست جداول خ

پیشگفتار ۱

فصل ۱: مقدمات، تعاریف و پیش نیازها ۳

۱-۱ مفاهیم رسته ای ۳

۱-۲ نیم گروه ۴

۱-۳ $S-$سیستم ۶

فصل ۲: حفظ حدود ۲۳

فصل ۳: $S-$سیستم های هموار حاصل ضربی ۳۸

فصل ۴: $S-$سیستم های ابر هموار ۶۰

۴-۱ همواری در $S-$سیستم های خارج قسمتی ۶۴

فصل ۵: $S-$سیستم های هموار ضعیف ۷۵

فصل ۶: نتیجه گیری ۸۴

۶-۱ مسئله ها ۸۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۹

فهرست جداول

پیشگفتار

بیش از چهار دهه قبل، سوالاتی پیرامون این مساله وجود داشت که برای یک تکواره S و $S-$سیستم راست A_S، تابعگون $- \otimes A_s$ ، که از رسته $S-$سیستم های چپ به رسته مجموعه هاست، تحت چه شرایطی عقب بر و برابر ساز را حفظ می کند. در سال ۱۹۷۱ اشتنتروم[۱] با هدف مطالعه چنین $S-$سیستم هایی مقاله ای را منتشر کرد که به موضوعات فوق اختصاص داشت [۱۷]. او $S-$سیستم A_S را هموار قوی نامید هرگاه تابعگون $- \otimes A_s$حافظ عقب بر و برابرساز باشد و ثابت کرد این حالت همواری معادل صدق کردن A_S دردو شرط P و E است. هرچند او سعی کرد که به سوالات مطرح آن زمان پاسخ گوید، اما سوالات دیگری از جمله این که آیا این تابگون حاصلضرب ها یا اشتراک های دلخواه یا متناهی را حفظ می کند، تا آن زمان هنوز بررسی نشده بودند.

در سال ۲۰۰۱ ، بولمن- فلمینگ [۲]و لان [۳]مقاله ای تحت عنوان «حاصل ضرب تانسوری و حفظ حدود برای سیستم هایی که روی تکواره ها تعریف می شوند»[۶] که مرجع اصلی این پایان نامه می باشد را چاپ و منتشر کردند که هدف آن بررسی ویژ گی های بیشتری در مورد تابعگون$- \otimes A_s$ و حفظ عقب بر، برابر ساز ، حاصلضرب و در حالت کلی حدها می باشد.

در این پایان نامه سعی شده است با استفاده از مقاله فوق و سایر منابع و مقالات از جمله مقاله «ویژگی های هموار عقب بر ضعیف برای $S-$سیستم های راست خارج قسمتی ریس»[۱۶] از هوشِنگ کیا او [۴] و وی لیو[۵] ویژگی های همواری، ابرهمواری، هموار قوی ، هموار ضعیف و همچنین شرط هایP، E، E' و ارتباط بین آنها در فصل هایی جداگانه و البته مرتبط، مورد بررسی قرار گیرد.

---

[۱] Stenström

[۲] S.Bulman Fleming

[۳] V.Laan

[۴] Husheng Qiao

[۵] Wei Liu

در فصل اول به بیان تعاریف و مقدماتی می پردازیم که قسمت هایی از آن برای خواننده ای که به مطالعه $S-$سیستم ها پرداخته است، آشناست. در فصل دوم به حفظ حدود و شرایط معادل آن پرداخته شده است. در فصل های سوم ، چهارم و پنجم به ترتیب بر حفظ حاصلضرب ، $S-$سیستم های هموار قوی و $S-$سیستم های هموار ضعیف تمرکز شده است و شرایط معادل برقرار بودن و همچنین برقرار نبودن آنها بیان شده است و در فصل ششم نتیجه گیری و ارتباط بین قسمت های مختلف در نموداری گنجانده شده است.

فصل ۱

مقدمات، تعاریف و پیش نیازها

در این فصل، مفاهیم رسته ای ، ضرب تانسوری ، حدود و شرط های P و E مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۱-۱ مفاهیم رسته ای

تعریف ۱-۱. یک رسته[۱] $\mathcal{C}$ عبارت است از :

- یک کلاس از اشیاء[۲] $\mathcal{C}$ $(ob\mathcal{C})$ که اعضای آن اشیاء $\mathcal{C}$ نامیده می شوند.
- یک مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ که برای هر دو شیء A و B از $\mathcal{C}$، ریخت های[۳] از A به B نامیده می شوند به قسمی که اگر $A \neq A'$ یا $B \neq B'$، آنگاه

  $.Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A',B') = \phi$
- ترکیب ریخت ها نیز برای هر سه شیء A و B و C در $\mathcal{C}$ به صورت نگاشت

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$$

---
[۱] Category
[۲] Object
[۳] Morphism

با ضابطه $gof \longmapsto (f,g)$ تعریف می شود که دارای شرایط زیر است:

۱. این ترکیب شرکت پذیر است. یعنی برای هر چهار شیء A، B، C و D از $\mathcal{C}$ و $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$ داریم

$$ho(gof) = (hog)of.$$

۲. برای هر شیء A از $\mathcal{C}$، ریخت همانی $id_A \in Mor_c(A,A)$ موجود است به قسمی که برای هر $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ که B یک شیء در $\mathcal{C}$ است داریم

$$fo\,id_A = id_B of = f.$$

تعریف ۱-۲. رسته $\mathcal{C}$ را ملموس [۱] می نامیم هرگاه تابعی چون σ موجود باشد که به هر شیء A از $\mathcal{C}$، مجموعه $\sigma(A)$ به نام مجموعه زمینه[۲] A را با رعایت شرایط زیر نسبت دهد:

۱. هر ریخت $A \longrightarrow B$ در $\mathcal{C}$، تابعی باشد بر مجموعه زمینه A و B یعنی $\sigma(A) \longrightarrow \sigma(B)$.

۲. ریخت همانی برای هر شیء A از $\mathcal{C}$، تابعی همانی بر مجموعه زمینه A باشد.

۳. ترکیب ریخت ها در $\mathcal{C}$ با ترکیب توابع بر مجموعه های زمینه یکی باشد.

۱-۲ نیم گروه

تعریف ۱-۳. زیرمجموعه ناتهی K از نیم گروه S را ایده آل[۳] راست (چپ) S می نامیم هرگاه $KS \subseteq K$ ($SK \subseteq K$). همچنین K را ایده آل S گوییم هرگاه ایده آل راست و ایده آل چپ باشد.

[۱] Concrete
[۲] Underlying set
[۳] Ideal

تعریف ۱-۴. فرض کنیم S یک تکواره باشد و $a \in S$. ایده آل اصلی چپ [1] تولید شده توسط a عبارت است از $Sa = \{sa; s \in S\}$.

هم چنین ایده آل اصلی راست[2] تولید شده توسط a عبارت است از $aS = \{as; s \in S\}$.

مثال ۱-۵. نیم گروه $(\mathbb{N}, .)$ (مجموعه اعدادطبیعی با عمل ضرب) را در نظر می گیریم. آنگاه مجموعه اعداد طبیعی زوج، $\mathbb{N}_e$، با عمل ضرب یک ایده آل $\mathbb{N}$ است.

تعریف ۱-۶. نیم گروه S را از راست معکوس پذیر[3] می نامیم هرگاه هر دو ایده آل چپ آن اشتراک ناتهی داشته باشند.

تکواره S را از راست معکوس پذیر می نامیم هرگاه برای هر $p, q \in S$، عناصر $u, v \in S$ موجود باشند که $up = vq$.

توضیح اینکه اگر $a \in (Sp \cap Sq)$ و S تکواره ای از راست معکوس پذیر باشد، آنگاه ایده آل های اصلی چپ Sp و Sq اشتراک ناتهی دارند.

اگر $a \in Sp \cap Sq$، آنگاه $u, v \in S$ وجود دارند که $a = up$ و $a = vq$، یعنی $up = vq$.

تعریف ۱-۷. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. $z \in S$ را عنصر صفر راست (چپ) [4]می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z\,(zs = z)$ و صفر می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z = zs$.

تعریف ۱-۸. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. $s \in S$ را عنصر پوچ توان[5] (راست) می نامیم هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $s^n = z$ که در آن z یک عضو صفر (راست)S است. نیم گروه S پوچ (راست) [6] نامیده می شود هرگاه تمام عناصر S پوچ توان (راست) باشند.

تعریف ۱-۹. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. $e \in S$ را عنصرخود توان[7] می نامیم هرگاه $e^2 = e$. مجموعه همه عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نشان می دهیم.

[1] Pricipal left ideal
[2] Pricipal right ideal
[3] Right revertible
[4] Right zero
[5] Nilpotent
[6] Nil
[7] Idempotent

تعریف ۱-۱۰. نیم گروه $(S, .)$ را نیم مشبکه[۱] می نامیم هرگاه « . » خاصیت جابه جایی و خود توانی داشته باشد. یعنی برای هر $x, y \in S$ گزاره های زیر برقرار باشند:

۱. $x.y = y.x$

۲. $x.x = x$

تعریف ۱-۱۱. تکواره S را از هم پاشیدنی چپ (راست)[۲] می نامیم هرگاه برای هر $s, s' \in S$، عنصر $u \in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $us = us'$ $(su = s'u)$.

مثال ۱-۱۲. ۱. هر تکواره S که شامل عنصر صفر چپ باشد، از هم پاشیدنی چپ است، مثلا تکواره $S = \{۱, x, ۰\}$ که در آن $x^۲ = ۱$ ، از هم پاشیدنی چپ است.

۲. تکواره $(\mathbb{N}, max)$ از هم پاشیدنی چپ است، کافی است برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $k = max\{m, n\}$ در این صورت $km = kn$.

تعریف ۱-۱۳. تکواره S را از هم پاشیدنی ضعیف چپ [۳] می نامیم هرگاه برای هر $s, s', z \in S$ که $sz = s'z$، عنصر $u \in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $us = us'$.

تعریف ۱-۱۴. تکواره S را از راست (چپ) حذف پذیر[۴] می نامیم هرگاه هر عضو $s \in S$ ، از راست (چپ) حذف پذیر باشد. به عبارتی اگر برای هر $r, t \in S$ داشته باشیم $rs = ts$ $(sr = st)$ آنگاه $r = t$.

۱-۳ $S-$سیستم

تعریف ۱-۱۵. فرض کنیم S یک تکواره باشد. یک $S-$سیستم راست[۵]، مجموعه ای مثل A است به همراه نگاشت $A \times S \longrightarrow A$ با ضابطه $(a, s) \longmapsto as$، به طوری که برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ داشته باشیم

[۱] Semilattice

[۲] Left collapsible

[۳] Weakly left collapsible

[۴] Right cancellable

[۵] Right S-act

۱. $(as)t = a(st)$

۲. $a1 = a$

S−سیستم راست A را با A_S نشان می دهیم. یک S−سیستم چپ[1] $_SB$ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

مثال ۱-۱۶. ۱. فرض کنیم S یک تکواره و K یک ایده آل راست S باشد. چون برای هر $k \in K$ و $s \in S$، ks متعلق به K است پس K یک S−سیستم راست است.

در حالت خاصی که $K = S$، S خود یک S−سیستم راست است.

۲. اگر $S = \{1\}$ تکواره یک عضوی باشد، آنگاه هر مجموعه ناتهی از اعداد چون X، یک S−سیستم راست است، در واقع برای هر $x \in X$ داریم $x = x\,.\,1$.

۳. فرض کنیم $(K, +, .)$ یک میدان و V یک فضای برداری روی Kباشد. آنگاه V یک $(K, .)$−سیستم چپ است. اما چون برای هر $x \in V$، $x + 1$ تعریف نمی شود، پس V یک $(K, +)$−سیستم چپ نیست.

۴. اگر برای هر تکواره S و هر مجموعه ناتهی A و هر $s \in S$ و $a \in A$، تعریف کنیم $as = a$، آنگاه A یک S−سیستم راست است.

۵. فرض کنیم A یک S−سیستم چپ است. آنگاه مجموعه توانی A یعنی $P(A) = \{X; X \subseteq A\}$ یک S−سیستم چپ است. در واقع کافی است نگاشت μ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mu : S \times P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$(s, X) \longrightarrow sX = \{sx; x \in X\}$$

تعریف ۱-۱۷. فرض کنیم A_S یک S−سیستم و A' زیرمجموعه ای ناتهی از آن باشد. A' را زیرسیستم (S−زیرسیستم) A_S می نامیم هرگاه برای هر $a' \in A'$ وهر $s \in S$ داشته باشیم $a's \in A'$.

[1] Left S-act

تعریف ۱-۱۸. فرض کنیم A_S یک $S-$ سیستم راست باشد. عنصر $\theta \in A_S$ را عنصر صفر A_S می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $\theta s = \theta$.

مثال ۱-۱۹. ۱. $\Theta_S = \{\theta\}$ یک زیرسیستم (یک عضوی) است.

۲. هر ایده آل راست S، زیرسیستم S_S است.

تعریف ۱-۲۰. $S-$سیستم راست A_S را دوری[۱] می نامیم هرگاه $a \in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a' \in A_S$ ، عنصر $s \in S$ وجود داشته باشد که $a' = as$ در این حالت می نویسیم $A_S = aS$.

تعریف ۱-۲۱. $S-$سیستم راست A_S را موضعاً دوری[۲] می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه A در یک زیرسیستم دوری aS از A، $(a \in A)$، گنجانده شود.

تعریف ۱-۲۲. $S-$سیستم A_S را بی تاب [۳] می نامیم هرگاه از تساوی $ac = bc$ که در آن $a, b \in A$ و $c \in S$ یک عضو حذف پذیر از راست است، تساوی $a = b$ نتیجه شود.

مثال ۱-۲۳. مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، یک $\mathbb{N}-$سیستم راست بی تاب است.

در این پایان نامه رسته مجموعه ها را با Ens نمایش می دهیم. همچنین رسته همه $S-$سیستم های راست روی تکواره S را با $Ens - S$ و رسته همه $S-$سیستم های چپ را با $S - Ens$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲۴. فرض کنیم A و Bاشیایی از رسته $\mathcal{C}$ باشند و $f : A \longrightarrow B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد.fرا تکریختی [۴]می نامیم هر گاه برای هر شیء C از $\mathcal{C}$ و ریخت های $g, h : C \longrightarrow A$ اگر $fg = fh$ آنگاه $g = h$.

هم چنین ریخت $f : A \longrightarrow B$ را بروریختی [۵] می نامیم هرگاه برای هر شیء D از $\mathcal{C}$ و ریخت های $k, t : B \longrightarrow D$ اگر $kf = tf$ آنگاه $k = t$ و ریخت $f : A \longrightarrow B$ را دو ریختی[۶] می نامیم هرگاه تکریختی و بروریختی باشد.

---
[۱]Cyclic
[۲]Locally cyclic
[۳]Torsion free
[۴]Monomorphism
[۵]Epimorphism
[۶]Bimorphism

گزاره ۱-۲۵. *در رسته مجموعه ها، $f : A \longrightarrow B$ تکریختی است اگر و تنها اگر نگاشتی یک به یک باشد و بروریختی است اگر و تنها اگر نگاشتی پوشا باشد.*

برهان. به گزاره های ۱.۶.۱۴ و ۱.۶.۱۵از [۱۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲۶. فرض کنیم $A_S, B_S \in Ens - S$. نگاشت $f : A_S \longrightarrow B_S$ را یک همریختی[۱] $S-$سیستم های راست یا به اختصار $S-$همریختی[۲] می نامیم، هرگاه برای هر $a \in A_S$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $f(as) = f(a)s$. مجموعه همه $S-$همریختی ها از A_S به توی B_S را با $Hom(A_S, B_S)$ یا $Hom_S(A, B)$ نشان می دهیم. این تعاریف برای رسته $S - Ens$ نیز به طور مشابه انجام می شود.

گزاره ۱-۲۷. *در رسته $S-$سیستم های راست، $Ens - S$، $f : A_S \longrightarrow B_S$، تکریختی ($S-$تکریختی) است اگر و تنها اگر نگاشتی یک به یک باشد و بروریختی ($S-$برویختی) است اگر و تنها اگر نگاشتی پوشا باشد و یکریختی ($S-$یکریختی) است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد.*

برهان. به گزاره های ۱.۶.۱۴ و ۱.۶.۱۵از [۱۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲۸. در$Ens - S$ ، $f : A_S \longrightarrow B_S$ را یک نشاندن[۳] می نامیم هرگاه تکریختی باشد، و در این حالت گوییم می توان A_S را در B_S نشاند.

تعریف ۱-۲۹. فرض کنیم A یک مجموعه و $\rho \subseteq A \times A$ باشددر این صورت ρ را یک رابطه هم ارزی[۴] روی A می نامیم هرگاه خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی داشته باشد. به عبارتی برای هر $x, y, z \in A$ گزاره های زیر برقرار باشند:

۱. $(x, x) \in \rho$ یا با نماد دیگر $x\rho x$.

۲. اگر $(x, y) \in \rho$ آنگاه $(y, x) \in \rho$ یا با نماد دیگر اگر $x\rho y$ آنگاه $y\rho x$.

۳. اگر $(x, y), (y, z) \in \rho$ آنگاه $(x, z) \in \rho$ یا با نماد دیگر اگر $x\rho y$ و $y\rho z$ آنگاه $x\rho z$.

[۱] Homomorphism
[۲] S-homomorphism
[۳] Embedding
[۴] Equivalence relation