



الله أكبر
 الحمد لله رب العالمين
 الذي هدانا لهذا
 كنا كنا لا نشكر
 اللهم صل على محمد
 وآل محمد
 محمد بن عبد الله



١٠٤٥٥





دانشگاه جامع پیام نور استان فارس
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

توسיעی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

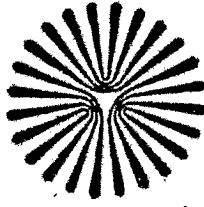
توسط
امیر علی یان

۱۳۸۷ / ۱۲ / ۱۱

استاد راهنما
دکتر احمد خاکساری

شهریور ۱۳۸۶

۱۰۴۰۵۵



دانشگاه جامع پیام نور استان فارس

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

تصویب نامه

پایان نامه تحت عنوان: توسعه‌ی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

که توسط: امیر علی یان دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی دانشگاه جامع پیام نور استان فارس تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: ۱۰ شهریور ۱۳۸۶

نمره: ۱۸ درجه ارزش‌یابی: عالی

اعضاء هیأت داوران

نام و نام خانوادگی

۱- دکتر بهمن یوسفی

هیأت داوران

استاد ممتحن

مرتبه علمی

استاد

امضاء

۲- دکتر احمد خاکساری

استاد راهنما

استادیار

۳- دکتر منصوره معانی شیرازی

استاد مشاور

استادیار

۴- دکتر عبدالرسول قرائتی

نماینده تحصیلات تکمیلی

استادیار

۱۰/۴/۸۶

تقدیم بہ:

ارواح پاک شہداء

سپاس‌گزاری

چه با شکوه است تصور ایامی که تنها حاکم عالم، دادگستری چون قائم آل محمد (صلی الله علیه و آله) باشد، و چه زیباست زندگی در روزگاری که پرچمی جز پرچم توحید در اهتزاز نباشد و ندایی جز ندای حق به گوش جهانیان نرسد، دورانی سرشار از عطوفت، مهربانی، عدالت، آزادی و کرامت انسانی. شکر و سپاس خدای مهربان که بارگران آموختن را به من ارزانی نمود. هرگز نمی‌توان گفت از چه کسانی و چه اندازه باید سپاس‌گزاری نمود اما برای تقدیم عشق و ستایش و سپاس‌گزاری، خانواده عزیز و استاد بزرگوار جناب آقای دکتر خاکساری را برمی‌گزینم.

چکیده

توسيعی از حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم

بوسیله‌ی

امیر علی یان

برای یک حلقه R و یک R مدول راست M ، یک زیر مدول N از M را δ -کوچک در M گوئیم، اگر داشته باشیم $N+X=M$ با M/X منفرد، تساوری $X=M$ را نتیجه دهد. اگر یک همریختی پوشای $p: P \rightarrow M$ وجود داشته باشد بطوری که P تصویری و $\text{Ker}(p)$ در p ، δ -کوچک باشد آنگاه p را یک δ -پوشش تصویری از M گوئیم. یک حلقه R ، δ -کامل (δ -نیمه کامل، δ -نیمه منظم) است اگر هر R -مدول (R -مدول ساده، R -مدول دوری) یک δ -پوشش تصویری داشته باشد. رده‌ای از همه حلقه‌های δ -کامل (δ -نیمه کامل، δ -نیمه منظم) رده‌ای از همه حلقه‌های کامل (نیمه کامل، نیمه منظم) را شامل می‌شود در این پایان نامه به بررسی ویژگی‌های از حلقه‌های δ -کامل، δ -نیمه کامل و δ -نیمه منظم خواهیم پرداخت.

ما $\delta(R)$ را بوسیله $\delta(R)/\text{Soc}(R_R) = \text{Jac}(R/\text{Soc}(R_R))$ تعریف می‌کنیم و بقیه

نتایج را در موارد زیر می‌بینیم:

۱- $\delta(R)$ بزرگترین ایدال راست δ -کوچک از R است.

۲- R ، δ -نیمه منظم است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ حلقه منظم فون نیومن باشد و خود توانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

۳- R ، δ -نیمه کامل است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ حلقه نیمه ساده باشد و خودتوانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

۴- R ، δ -کامل است اگر و تنها اگر $R/\text{Soc}(R_R)$ یک حلقه راست کامل باشد و خود توانهای $R/\delta(R)$ به R ارتقاء یابند.

این پایان نامه برگرفته از مقاله زیر است:

Algebra Collquium 7.3(2000)305-318.

Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular Rings.

yiqiang zhou.

فهرست

صفحه	عنوان
۱	۱. مقدمه و تعاریف اولیه
۳	۱.۱ تعاریف
۷	۲ زیرمدول‌های δ -کوچک
۸	۱.۲
۱۹	۳ δ -پوشش‌های تصویری
۲۰	۱.۳
۲۳	۴ حلقه‌ها روی مدول‌هایی که حتماً δ -پوشش تصویری دارند
۲۴	۱.۴
۴۵	۵ مثال‌ها
۴۶	۱.۵
۴۹	مراجع

فصل ۱

مقدمه و تعاریف اولیه

۱ مقدمه و تعاریف اولیه

در این پایان نامه ویژگی‌ها و خصوصیات گوناگون حلقه‌های δ -کامل، δ -نیمه کامل و δ -نیمه منظم‌ها را شرح می‌دهیم که رده‌ی همه حلقه‌های کامل، نیمه کامل و نیمه منظم همه حلقه‌های راست کامل، راست نیمه کامل و راست نیمه منظم را به طور کامل پوشش می‌دهند. حلقه‌های راست کامل، نیمه کامل و نیمه منظم کلاس‌هایی از حلقه‌ها را تشکیل می‌دهند که خواص همسان و غیرهمسانی را دارا می‌باشند.

چون باس پیشگام کار بر روی حلقه‌های راست کامل نیمه کامل است تعداد زیادی تألیف از ایشان در این زمینه وجود دارد.

در این پایان نامه به طور کلی با حلقه‌های راست کامل، نیمه کامل و نیمه منظم با توجه به رده‌ای از همه R -مدول‌های منفرد، متعلق به رده‌ی R -مدول‌ها آشنا می‌شویم.

$\delta(R)$ را به صورت $\delta(R)/\text{Soc}(R_R) = \text{Jac}(R/\text{Soc}R_R)$ تعریف می‌کنیم و نتایج دیگری را در موارد

زیر می‌بینیم:

(۱) $\delta(R)$ بزرگترین ایدآل راست δ -کوچک از R است.

(۲) R ، δ -نیمه منظم است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ یک حلقه منظم فون نیومن باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

(۳) R ، δ -نیمه کامل است اگر و تنها اگر $R/\delta(R)$ یک حلقه نیمه ساده باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

(۴) R ، δ -کامل است اگر و تنها اگر $R/\text{Soc}(R_R)$ یک حلقه کامل راست باشد و خودتوان‌های $R/\delta(R)$ به R ارتقاء داده شود.

در سرتاسر این پایان نامه فرض می‌کنیم R یک حلقه شرکت‌پذیر با عضو همانی است و مدول‌ها، R مدول‌های راست یکانی هستند.

در ادامه، تعاریف اولیه مورد نیاز ذکر می‌شود.

در فصل دوم مفهومی از زیرمدول‌های δ -کوچک و خواص آنها مطرح می‌شود که خود توسط پوشش‌های تصویری تعریف شده و کلید خوبی برای مقدمه حلقه‌های کامل، نیمه‌کامل و نیمه منظم است.

در فصل سوم مطالبی از δ -پوشش‌های تصویری گفته می‌شود. برخلاف پوشش‌های تصویری، δ -پوشش‌های تصویری یک مدول منحصر به فرد نیستند.

در فصل چهارم صفات اختصاصی و گوناگون کسب شده برای یک حلقه R که هر R -مدول (R مدول ساده، R مدول دوری) آن یک پوشش تصویری داشته باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل پنجم با استفاده از مثال‌ها مفهوم‌های قبلی روشن می‌شوند.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱: زیرمدول K از M را اساسی در M گویند هرگاه اشتراک K با هر زیرمدول غیر صفر دیگر از M غیر صفر شود. و با $K \leq_e M$ نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر $K \leq_e M$ اگر و تنها اگر هر چه باشد $a \in M$ وجود داشته باشد $r \in R$ به طوری که $ra \in K$.

تعریف ۲.۱.۱: صفرساز مدول B در حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{Ann}_R(B) = \{r \in R \mid rb = 0 \quad b \in B\}$$

تعریف ۳.۱.۱: مجموعه $Z(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(M) = \{x \in M \mid \text{Ann}(x) \leq_e R_R\} = \{x \in M \mid xI = 0, I \leq_e R_R\}$$

یک زیرمدول از M است و آن را زیرمدول منفرد از M گوئیم. حال اگر $Z(M) = M$ یک مدول منفرد است. و اگر $Z(M) = 0$ یک مدول نامنفرد است.

تعریف ۴.۱.۱: زیرمدول N از M را کوچک در M گویند هر گاه $M = N + L$ (L زیرمدول M) نتیجه دهد $M = L$ و با $L \ll M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱: اگر $Z(M)$ زیرمدول منفرد از M باشد $Z_2(M)$ را به صورت

$$Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$$

تعریف می‌کنیم. اگر $Z_2(M) = M$ آنگاه M را تاب طلایی گوئیم.

تعریف ۶.۱.۱: به یک جفت (P, p) یک پوشش تصویری از M گویند هر گاه P تصویری و هم‌ریختی پوشای $0 \rightarrow M \xrightarrow{p} P$ کوچک باشد یعنی $\ker p \ll P$.

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنید I یک ایدآل از R باشد آنگاه عنصر w در R/I به عنصر x از R ارتقاء داده می‌شود هر گاه $x + I = w$. هر خودتوان R/I را می‌توان به یک خودتوان I ارتقاء داد.

تعریف ۸.۱.۱: سوکل مدول M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Soc}(M) = \bigcap \{L \leq M \mid L \leq_e M\}$$

تعریف ۹.۱.۱: رادیکال ژاکسون R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(R) = \bigcap \{m \mid m \text{ یک ایده‌ل ماکسیمال در } R\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱: عنصر a از حلقه R ، منظم (به مفهوم فون نیومن) گویند هر گاه $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $axa = a$.

تعریف ۱۱.۱.۱: اگر هر عنصر R منظم باشد آنگاه گوئیم R یک حلقه منظم است.

تعریف ۱۲.۱.۱: هر گاه تمام عناصر یک حلقه دارای یکی از شرایط زیر باشند آن حلقه را نیمه منظم گویند.

۱. وجود داشته باشد $e \in aR$ به طوری که $e^2 = e$ و $(1-e)a \in J(R)$ ،

۲. وجود داشته باشد $e \in Ra$ به طوری که $e^2 = e$ و $a(1-e) \in J(R)$ ،

۳. عنصرهای منظم $a, b \in R$ وجود داشته باشند به طوری که $a - b \in J(R)$ ،

۴. وجود داشته باشد $b \in R$ با $bab = b$ به طوری که $a - aba \in J(R)$.

تعریف ۱۳.۱.۱: حلقه R را نیمه کامل گویند هر گاه $R/J(R)$ نیمه ساده و خودتوان هایش را بتوان به مدول $J(R)$ ارتقاء داد.

تعریف ۱۴.۱.۱: حلقه‌ای را کامل گویند هر گاه هر مدول آن یک پوشش تصویری داشته باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱: به مجموعه I از حلقه R ، T -پوچ توان چپ (راست) گویند هر گاه برای هر دنباله a_1, a_2, \dots در I یک n وجود داشته باشد به طوری که

$$a_1 \cdots a_n = 0 \quad (a_n \cdots a_1 = 0)$$

تعریف ۱۶.۱.۱: یک مدول را وفادار گویند هر گاه صفرساز آن برابر صفر شود.

تعریف ۱۷.۱.۱: $Rej_X(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Rej_X(M) = \cap \{Imh \mid h : U \rightarrow M, X \in X\}$$

که در آن X خانواده‌ای از مدول‌هاست.

تعریف ۱۸.۱.۱: $Tr_M(x)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: (برای خانواده X از مدول‌ها)

$$Tr_M(X) = \sum \{Imh \mid h: U \rightarrow M, U \in X\}$$

تعریف ۱۹.۱.۱: $x \in R$ را شبه منظم راست گویند اگر $(1-x)$ در R معکوس راست داشته باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱: فرض کنید که a_1, \dots, a_n یک دنباله در حلقه R باشد و F یک R -مدول آزاد با پایه x_1, x_2, \dots فرض کنید $y_n = a_n - x_{n+1}a_n$ ($n \in N$) و متناهی باشند و فرض کنید G پدید آمده از y_1, y_2, \dots یک زیرمدول از F باشد. آنگاه برای G داریم:

(۱) G یک مدول آزاد با پایه y_1, y_2, \dots است.

(۲) اگر $G = F$ و تنها اگر برای هر $k \in N$ یک $n \geq k$ وجود داشته باشد به طوری که $a_k \cdots a_n = 0$.

(۳) اگر G یک جمعوند مستقیم از F باشد آنگاه زنجیره $Ra_1 \geq Ra_2a_1 \geq \dots$ از ایدآل‌های اصلی متناهی است.

فصل ۲

زیرمدول‌های δ -کوچک

۲ زیرمدول‌های δ -کوچک

این فصل مقدمه کلی از زیرمدول‌های کوچک و δ -کوچک است و خواص گوناگون از زیرمدول‌های δ -کوچک به ما می‌دهد.

۱.۲

تعریف ۱.۱.۲: فرض کنید M یک مدول و N زیرمدولی از آن باشد، به N در M ، δ -کوچک گویند هرگاه برای هر زیرمدول K از M با M/K منفرد داشته باشیم $M = N + K$ و از $M \ll_{\delta} N$ جهت نمایش آن استفاده می‌کنیم.

هر زیرمدول کوچک یا زیرمدول ساده‌ی نامنفرد از M ، یک δ -کوچک در M است، هر زیرمدول δ -کوچک از یک مدول منفرد یک زیرمدول کوچک است. در لم بعدی که بارها مورد استفاده قرار می‌گیرد مفهوم زیرمدول‌های کوچک و زیرمدول‌های δ -کوچک را به پایان می‌رسانیم.

لم ۲.۱.۲: فرض کنید که N یک زیرمدول M باشد. موارد زیر با یکدیگر معادلند:

$$(۱) \quad N \ll_{\delta} M,$$

$$(۲) \quad \text{اگر } X + N = M, \text{ برای یک زیرمدول نیمه‌ساده تصویری } Y \subseteq N \text{ با } Y \text{ داریم } M = X \oplus Y,$$

$$(۳) \quad \text{اگر } X + N = M \text{ و } M/X \text{ تاب طلایی باشد آنگاه } X = M.$$

اثبات: $۲ \rightarrow ۱$) فرض کنید $X + N = M$. با استفاده از لم زرن زیرمدول ماکسیمال Y از N وجود

دارد به طوری که $X \cap Y = 0$.

ما ادعا می‌کنیم که $(N \cap X) + Y$ الزاماً در N اساسی است. برای دیدن آن فرض کنید $a \in N, a \neq 0$ ، ما فرض می‌کنیم که ممکن است $a \notin Y$ ، با توجه به ماکسیمال بودن Y ما داریم که $X \cap (Y + aR) \neq 0$. $x \in X$ را برابر $y + ar$ می‌گیریم ($0 \neq x = y + ar$) آنگاه $x = ar$ اگر و تنها اگر y در $(N \cap X) + Y$ باشد، چون $X \cap Y = 0$ ما داریم که $ar \neq 0$ این نشان می‌دهد که $(N \cap X) + Y$ الزاماً یک زیرمدول اساسی از N است.

لذا $M/(X + Y) = (X + N)/(X + Y) \cong N/[(N \cap X) + Y]$ یک یکریختی منفرد است چون $M = (X + Y) + N$ با استفاده از (۱) ما داریم $M = X \oplus Y$. برای دیدن اینکه Y یک نیمه‌ساده است A را یک زیرمدول از Y در نظر بگیرید. آنگاه $X = A + N = M$.

اگر در بحث بالا $X + A = X \oplus A$ را با X جایگزین کنیم آنگاه داریم که $X + A = X \oplus A$ که یک جمعوند مستقیم از M است بنابراین Y یک نیمه‌ساده است. برای هر کجا که Y_n نامنفرد باشد می‌نویسیم $Y = Z(Y) \oplus Y_n$ آنگاه $M/(X \oplus Y_n) = X \oplus Y/X \oplus Y_n \cong Z(Y)$ چون $M = (X + Y_n) + N$ با استفاده از (۱) $X \oplus Y_n = M$ این نشان می‌دهد که $Z(Y) = 0$ بنابراین Y تصویری است.

(۲ → ۳)

فرض کنید $M = K + N$ و M/K تاب طلایی باشد.

با استفاده از (۲) برای هر جا که Y نیمه‌ساده تصویری است $M = K \oplus Y$ و لذا $Y \cong M/K$ ، یک تاب طلایی است. که این الزاماً $Y = 0$ را نتیجه می‌دهد. و بنابراین $M = K$.

(۳ → ۱)

اگر M/X تاب طلایی باشد آنگاه M/X منفرد است و با توجه به $M = X + N$ تعریف δ -کوچک حاصل می‌شود. ■

قضیه ۳.۱.۲:

(۱) فرض کنیم A و B و C مدول باشند به طوری که $A \leq B \leq C$ آنگاه $A \leq_e C$ اگر و تنها اگر

$$B \leq_e C \text{ و } A \leq_e B$$

(۲) فرض کنید A_1 و A_2 و B_1 و B_2 زیرمدول‌های از مدول C باشند. اگر $A_1 \leq_e B$ و $A_2 \leq_e B$ و $A_1 \cap A_2 \leq_e B_1 \cap B_2$ آنگاه

(۳) فرض کنید A یک زیرمدول از مدول C و $f: B \rightarrow C$ یک همریختی باشد. اگر $A \leq_e C$ آنگاه

$$f^{-1}(A) \leq_e B$$

(۴) فرض کنید M مدول و N و K زیرمدول‌های M . آنگاه $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$ اگر و تنها اگر

$$H \cap K \leq_e M$$

(۵) فرض کنید $\{A_i \mid i \in I\}$ و $\{B_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های مدول C باشند اگر هر A_i مستقل و $A_i \leq_e B_i$ آنگاه B_i مستقل از $\oplus B_i$ و $\oplus A_i \leq_e \oplus B_i$

اثبات:

(۱) اگر $A \leq_e C$ آنگاه واضح است که $A \leq_e C$. چون هر زیرمدول غیرصفر از C با A اشتراک غیرصفر دارد، هر زیرمدول غیرصفر از C با B نیز اشتراک غیرصفر دارد بنابراین $B \leq_e C$.

برعکس، فرض می‌کنیم که $A \leq_e B \leq_e C$. برای هر زیرمدول $M \leq C$ داریم $B \cap M \neq 0$ زیرا $B \leq_e C$. پس هر $B \cap M$ یک زیرمدول از B است و همچنین $A \cap B \cap M \neq 0$ زیرا $A \leq_e B$. لذا $A \cap M \neq 0$ که نتیجه می‌دهد $A \leq_e C$.

(۲) برای هر زیرمدول غیرصفر $M \leq B_1 \cap B_2$ ما داریم که $A_2 \cap M \neq 0$ زیرا $A_2 \leq_e B_2$. لذا $A_2 \cap M$ یک زیرمدول غیرصفر از B_1 است و همچنین $A_1 \cap A_2 \cap M \neq 0$ زیرا $A_1 \leq_e B_1$ بنابراین

$$A_1 \cap A_2 \leq_e B_1 \cap B_2$$

(۳) فرض کنید M هر زیرمدول از B باشد اگر $f(M) = 0$ آنگاه $f^{-1}(A) \cap M = 0$ و لذا $f^{-1}(A) \cap M \neq 0$ اگر $f(M) \neq 0$ آنگاه $f(M) \leq_e C$ زیرا $A \leq_e C$. بنابراین $f^{-1}(A) \cap M \neq 0$ و لذا $f^{-1}(A) \leq_e B$.

(۴) فرض کنید $K \leq_e M$ و $H \leq_e M$. اگر $L \leq M$ با $L \cap H \cap K = 0$ آنگاه $L \cap H = 0$ زیرا $M \leq_e K$. لذا $L = 0$ زیرا $H \leq_e M$ طرف دیگر از قسمت (۱) حاصل می‌شود.

■ (۵) واضح است.

قضیه ۴.۱.۲:

(۱) مدول M منفرد است اگر و تنها اگر $M \cong \frac{B}{A}$ برای بعضی مدول‌های B و زیرمدول‌های اساسی A از آن.

(۲) فرض می‌کنیم A زیرمدولی از مدول غیرمنفرد B باشد. $\frac{B}{A} \leq_e A$ اگر و تنها اگر $A \leq_e B$.

اثبات:

(۱) فرض کنید M یک مدول حلقه R باشد. M را با $\frac{B}{A}$ یکرخت می‌گیریم (برای بعضی

R -مدول‌های A که $A \leq_e B$)

برای هر $b \in B$ یک ایدآل $I = \{r \in R \mid br \in A\}$ را داریم که با استفاده از قضیه (۳.۱.۳) قسمت

(۲) و در نظر گرفتن هم‌ریختی $f: R \rightarrow B$ ایدآل $I = f^{-1}(A)$ در R اساسی است پس $\frac{B}{A}$ منفرد است از

طرف دیگر فرض کنید $\frac{B}{A}$ منفرد باشد M را با $\frac{F}{K}$ یکرخت در نظر می‌گیریم. (برای بعضی R -مدول‌های آزاد F و بعضی زیرمدول‌های K از F).

یک پایه $\{x_j \mid j \in J\}$ را برای F انتخاب می‌کنیم. برای هر $j \in J$ ایدآل اساسی I_j در R وجود دارد

به طوری که $x_j I_j \leq k$ زیرا $\frac{F}{K}$ منفرد است. با استفاده از قضیه قبل از آنجا که $\bigoplus_j x_j I_j \leq_e \bigoplus_j x_j R$ لذا $K \leq_e F$.

(۲) فرض کنید که B یک مدول راست بر روی حلقه R باشد. با توجه به قسمت (۱) اگر $A \leq_e B$

آنگاه $\frac{B}{A}$ منفرد است.

از طرف دیگر فرض می‌کنیم $\frac{B}{A}$ منفرد باشد عنصر x را از زیرمدول C از B در نظر می‌گیریم چون $\frac{B}{A}$

منفرد است ایدآل $I \leq_e R$ وجود دارد به طوری که $xI \leq A$. از آنجا که B غیرمنفرد است $xI \neq 0$ نتیجه

می‌دهد که $A \cap C \neq 0$ بنابراین $A \leq_e B$.

لم ۵.۱.۲: فرض کنید M یک مدول باشد.

۱. برای زیرمدول‌های N ، K و L از M با $K \subseteq N$ ما داریم،

الف) $N \ll_{\delta} M$ اگر و تنها اگر $K \ll_{\delta} M$ و $N/K \ll_{\delta} M/K$ ،

ب) $N + H \ll_{\delta} M$ اگر و تنها اگر $N \ll_{\delta} M$ و $H \ll_{\delta} M$ ،

۲. اگر $M \ll_{\delta} K$ و $f: M \rightarrow N$ یک هم‌ریختی باشد آنگاه $N \ll_{\delta} f(K)$. به خصوص اگر

$$K \ll_{\delta} M \subseteq N \ll_{\delta} K \ll_{\delta} N$$

۳. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$ و $K_1 \subseteq M_1 \subseteq M$ و $K_2 \subseteq M_2 \subseteq M$ آنگاه $K_1 \oplus K_2 \ll_{\delta} M$ اگر و

تنها اگر $M_1 \ll_{\delta} K_1$ و $M_2 \ll_{\delta} K_2$.

اثبات:

۱- الف: $N \ll_{\delta} M$ آنگاه $N + L = M$ با $\frac{M}{L}$ منفرد که نتیجه می‌دهد $L = M$

$$N/K + L/K = M/K \implies \frac{M/K}{L/K} \cong \frac{M}{L}$$

و M/L منفرد است.

$$M/K = (N + L)/K = L/(N \cap K) = L/K \implies N/K \ll_{\delta} M/K$$

و واضح است که $K \ll_{\delta} M$.

۱- ب: $N + L = M$ نتیجه می‌دهد که $L = M$ پس $M = L + H + K$ با $\frac{M}{L}$ منفرد پس $H + K$

در M ، δ -کوچک است.

از طرف دیگر $K + H \ll_{\delta} M$ یعنی $K + H + L = M$ با $\frac{M}{L}$ منفرد. پس $L = M$ که $H + L = M$ با

$\frac{M}{L}$ منفرد نتیجه می‌دهد $H \ll_{\delta} M$ برای زیرمدول K نیز بدین صورت حاصل می‌شود.

۲- فرض کنید $L \leq M$ و $N = L + f(K)$ آنگاه $\overline{f(L)} + k = M$ چون $K \ll_{\delta} M$ ، این نتیجه

می‌دهد که $M/\overline{f(L)}$ منفرد است، با $M \leq_e \overline{f(K)}$. با توجه به تعریف زیرمدول اساسی $K \subseteq \overline{f(L)}$ پس

$$f(K) \leq L \text{ لذا } N = L$$

(۳) فرض کنید $p_i : M \rightarrow M_i$ یک تصویر M به M_i به موازات M_j باشد ($i \neq j$)، لذا $K_i = p_i(K_i)$.

نتیجه از قسمت (۲) حاصل می‌شود. برعکس اگر $K_i \ll_{\delta} M_i \leq M$ ($i = 1, 2$) آنگاه از قسمت (۱-ب) و (۲) داریم

$$K_1 \oplus K_2 = K_1 + K_2 \ll_{\delta} M_i.$$

تعریف ۶.۱.۲: فرض کنید S رده‌ای از همه مدول‌های ساده منفرد باشد برای یک مدول M

$$\delta(M) = \cap \{N \subseteq M \mid M/N \in S\}$$

لم ۷.۱.۲: فرض کنید M و N مدول باشند:

$$1. \delta(M) = \sum \{L \subseteq M \mid L \ll_{\delta} M\}.$$

۲. اگر $f : M \rightarrow N$ یک R -همریختی باشد آنگاه $f(\delta(M)) \subseteq \delta(N)$ از این رو $\delta(M)$ یک زیرمدول

تغییرناپذیر کامل از M است و $M.\delta(R_R) \subseteq \delta(M)$.

$$3. \text{ اگر } M = \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ آنگاه } \delta(M) = \bigoplus_{i \in I} \delta(M_i).$$

۴. اگر هر زیرمدول سره از M در یک زیرمدول ماکسیمال از M قرار داشته باشد آنگاه $\delta(M)$ بزرگترین

زیرمدول δ -کوچک منحصر به فرد از M است.

اثبات:

۱- فرض کنید $L \ll_{\delta} M$. اگر K زیرمدول ماکسیمال اساسی از M باشد و اگر $L \not\subseteq K$ آنگاه

$L + K = M$ اما چون $L \ll_{\delta} M$ ، داریم $K = M$ که یک تناقض است.

بنابراین هر زیرمدول δ -کوچک از M در $\delta(M)$ قرار دارد. از طرف دیگر فرض می‌کنیم $x \in \delta(M)$. اگر

$N \leq M$ با $Rx + N = M$ را داشته باشیم آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

یا $N = M$ است یا M زیرمدول ماکسیمال اساسی K را دارد به طوری که $N \leq K$ و $x \notin K$. اگر

$x \in \delta(M)$ آنگاه مورد دوم اتفاق نمی‌افتد نتیجه می‌دهد $x \in \delta(M)$ و $Rx \ll_{\delta} M$.