وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

رفتار مجانبی دنباله ها و خم های به طور تقریبی انقباضی و کاربردهای آن در معادلات تحولی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل نظری

استاد راهنما:

دکتر هادی خطیب زاده

دانشجو:

اعظم خسروی

زمستان ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

رفتار مجانبی دنباله ها و خم های به طور تقریبی انقباضی وکاربردهای آن در معادلات تحولی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل نظری

استاد راهنما:

دکتر هادی خطیب زاده

دانشجو:

اعظم خسروی

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر

مهربانم

تقدیر و سپاسگزاری

بارالها تو را سپاس که فضلت را کران نیست و شکرت را زبان نیست

حمد و سپاس خدایی را که توفیق علم و دانش آموزی به بندگان خویش عطا فرمود و مرا توفیق شاگردی و همدمی با اهل قلم و علم و معرفت ارزانی داشت. اینک که به یاری ایزدمنان این رساله به پایان رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از عزیزانی که روشنایی بخش راهم بودند و مرا در انجام این پروژه یاری و هدایت نمودند تشکر و قدردانی کنم.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر اسماعیل نظری که افتخار شاگردی ایشان را طی دوره کارشناسی ارشد داشته‌ام و نیز از استاد راهنمای گرامی و فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر هادی خطیب‌زاده که راهنمایی پایان‌نامه حاضر را قبول زحمت فرمودند و در تمام مراحل این پژوهش صبورانه مرا هدایت کرده و با راهنمایی‌های ارزنده و تشویق‌هایشان زمینه رشد و تعالی مرا در کسب علم، معرفت و اخلاق فراهم نمودند تشکر و قدردانی فراوان نمایم و سلامتی و توفیق روز افزون این عزیزان را از خدای متعال خواستارم.

از همه بزرگواران و اساتید گرامی که در طول دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، وسایر عزیزانی که همکاریهای لازم را مبذول داشتند و همه دوستان عزیزم که به نوعی بنده را در تهیه و تنظیم پایان‌نامه یاری نمودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

در نهایت والاترین سپاس خود را به محضر خانواده بزرگوارم که همواره دریای بیکران مهر خویش را بی‌دریغ بر من ارزانی داشتند تقدیم می‌نمایم، به امید آنکه قطره‌ای ازدریای بیکران محبتشان را پاسخگو باشم و سلامتی و بهروزی ایشان را از درگاه ایزد منان خواستارم.

خسروی، زمستان ۸۹

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به مطالعه دنباله‌ها و خم‌های کراندار به طور تقریبی انقباضی و قضایای مربوط به رفتار مجانبی آن‌ها می‌پردازیم. سپس با استفاده از نظریه خم‌های به طور تقریبی انقباضی، رفتار مجانبی جواب معادلات تحولی از مرتبه اول و دوم غیر همگن از نوع یکنوا را بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول : مقدماتی از آنالیز تابعی و عملگرهای یکنوای ماکسیمال... ۱

۱-۱ مقدماتی از آنالیز تابعی.. ۱

۱-۲ عملگرهای یکنوای ماکسیمال.. ۷

فصل دوم : رفتار مجانبی دنباله‌ها و خم‌های به طورتقریبی انقباضی........ ۱۲

۱-۲ قضایای همگرایی ضعیف برای دنباله‌ها... ۱۲

۲-۲ همگرایی قوی در دنباله ۳۶

۲-۳ قضایای همگرایی ضعیف برای خم‌ها.. ۴۷

فصل سوم : کاربرد نظریه خم های به طور تقریبی انقباضی در معادلات تحولی.............................. ۵۱

۳-۱ رفتار مجانبی از سیستم اتلافی نیمه خود گران.. ۵۱

۳-۲ رفتار مجانبی جواب های کراندار معادلات تحولی ناهمگن مرتبه دوم.................................. ۵۷

۳-۲-۱ مقدمه ۵۷

۳-۲-۲ قضایای همگرایی ضعیف.. ۶۰

۳-۲-۳ قضایای همگرایی قوی ۶۶

مقدمه

اولین قضیه ارگودیک غیر خطی توسط بیون [۴] بیان شد و سپس توسط بیون- برزیس [۳] کاربرد آن در معادلات تحولی نشان داده شد. پس از قضیه معروف ارگودیک غیرخطی بیون، شاخه جدیدی در آنالیز تابعی غیرخطی بنام نظریه ارگودیک غیرخطی پایه گذاری شد. بحث اصلی و عمده این نظریه مطالعه رفتار مجانبی خم‌ها و دنباله‌های حاصل از نگاشت ها و نیم‌گروههای انقباضی و تعمیم های آنها می‌باشد. خواننده علاقه مند به مطالعه بیشتر می تواند به مراجع [۱] و [۶-۵] و [۱۰-۹] و [۱۸] و [۲۲- ۲۱] و [۲۶-۲۴] و [۲۹-۲۸] مراجعه کند.

در فصل اول، مقدماتی از آنالیز تابعی و نظریه عملگرهای یکنوای ماکسیمال را که در این پایان نامه به آن نیاز داریم می‌آوریم.

در فصل دوم این پایان نامه، که بر اساس مراجع [۱۱ و ۱۴] می باشد به بررسی بخشی از کارهای انجام شده توسط جعفری روحانی درباره رفتار مجانبی دنباله ها و خم های کراندار به طور تقریبی انقباضی در فضای هیلبرت می پردازیم.

فصل سوم این پایان نامه، که بر اساس مراجع [۱۷-۱۲] می باشد به بررسی رفتار مجانبی معادلات تحولی نسبت به یک عملگر یکنوای ماکسیمال با استفاده از نتایج فصل دوم اختصاص داده شده است.

عملگرهای یکنوای ماکسیمال، توابع محدب و زیردیفرانسیل آنها که مثال مهمی از عملگرهای یکنوای ماکسیمال است جایگاه ویژه ای در آنالیز تابعی غیرخطی دارند. این عملگرها و تعمیم‌های آنها در نظریه بهینه یابی غیرخطی، نامساوی‌های تغییراتی و نظریه نیم‌گروههای غیر خطی و معادلات تحولی نقش اساسی بازی می کنند.

نظریه نیم گروهها و معادلات تحولی غیرخطی که توسعه طبیعی نظریه نیم گروههای خطی و قضیه هیله- یوشیدا می باشد، به ابزاری اساسی در معادلات دیفرانسیل به ویژه معادلات پاره ای تبدیل شده است. معادلات بسیاری در ریاضی- فیزیک مانند معادله انتشار، معادله موج، معادله شرودینگر و... توسط این معادلات به صورت یکپارچه درآمده اند به طوری که هر نظریه ای که درباره وجود و رفتار مجانبی جواب معادله تحولی غیرخطی باشد در مورد تمام مثال‌های عملی آن نیز برقرار می‌باشد.

وجود جواب این معادلات در جای خود ثابت شد و خواننده می تواند به مرجع [۲ صفحه ۳۹۶] مراجعه کند.

در این پایان نامه به بررسی رفتار مجانبی و همگرایی جواب و میانگین جواب این معادلات با استفاده از خم های تقریبا" انقباضی که در فصل دوم بیان شده می پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم که جواب یا میانگین جواب معادله تحولی وقتی متغیر زمان به بی‌نهایت میل می کند به صفر عملگر یکنوای ماکسیمال همگرایی ضعیف می باشد. در حالتی که عملگر یکنوای ماکسیمال، زیردیفرانسیل یک تابع محدب، شبه پیوسته پایینی و سره باشد (رجوع کنید به [۲۳]) جواب یا میانگین جواب به صفر عملگر که در این حالت برابر نقطه می نیمم تابع محدب می باشد، همگراست. از این رو این معادلات و شکل گسسته آنها به عنوان الگوریتمی برای تقریب جواب مسائل بهینه یابی محدب نیز بکار می روند. همچنین نشان خواهیم داد که با فرض شرایط بیشتری روی عملگر یکنوای ماکسیمال مانند قویاً یکنوا بودن و... می‌توان قضایای همگرایی قوی جواب را نیز به دست آورد.

واژه نامه

عنوان	**object**
انعکاسی	reflexive
بسته	closed
پوش محدب	convexhull
تابع پیوسته	continuous function
حد ضعیف	weak limit
خم انقباضی	non-expansive curve
خم به طور تقریبی انقباضی	almost non-expansive curve
خم کراندار	bounded curve
دنباله نزولی	non-increasing sequence
دنباله کشی	Cauchy sequence
دنباله انقباضی	non-expansive sequence
دنباله به طور تقریبی انقباضی	almost non-expansive sequence
دنباله به طور تقریبی انقباضی فرد	almost odd non-expansive sequence
دنباله انقباضی فرد	odd non-expansive sequence
دنباله کراندار	bounded sequence
رفتار مجانبی	asymptotic behavior
زیر دنباله	subsequence
زیر مشتق	subdifferential
سره	porper
سیستم اتلافی	dissipative system
شبه پیوسته	semicontinuous
ضرب داخلی	inner product
عملگر صعودی	non-decreasing operator
عملگر قویاً یکنوا	strongly monotone operator
عملگر یکنوا	monotone operator
عملگر یکنوای ماکسیمال	maximal monotone operator
فضای هیلبرت	Hilbert space
فضای هیلبرت حقیقی	real Hilbert space
کمترین	minimum

asymptotic regular	به طور مجانبی منظم
weakly asymptotically regular	به طور ضعیف مجانبی منظم
strictly convex	به طور اکید محدب
asymptotic center	مرکز مجانبی
evolution equation	معادله تحولی
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی- شوارتز
norm	نرم
ergodic theory	نظریه ارگودیک
projection map	نگاشت تصویر
lower semi-continuous	نیم پیوسته پایینی
weak convergence	همگرایی ضعیف
strong convergence	همگرایی قوی
uniformly convergence	همگرایی یکنواخت

فهرست مراجع و مآخذ

[1] N. C. Apreutesei, “Nonlinear second order evolution equations of monotone type and applications”, Pushpa Publishing House, Allahabad, India, 2007.

[2] J. P. Aubin and I. Ekeland, “Applied nonlinear analysis”, Dover Publications, 2006, 396.

[3] J. B. Baillon and H. Bre’zis, Une Remarque sur 1 e comportement asmptotique des semi-groupes non line’aires, Houston J. Math.2 (1976), 5-7.

[4] J. B. Baillon, Un the’ore’me de type ergodique pour les contractions non line’aires dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), A1511-A1514.

[5] V. Barbu, “Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces”, Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976.

[6] H. Be’rzis, “Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert”, in: Nort-Holland Mathematics studies, vol. 5, Nort-Holland Publishing Co, Amsterdam, London, 1973.

[7] H. Be’rzis, “Analysis Functional: Theorie et Applications” , Masson, Paris, 1983.

[8] R. E. Bruck, On the strong convergence of an averaging iteration for the solution of operator equations involving monotone operators in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. 64 (1978) 319-327.

[9] R. E. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert spaces,J. Funct. Anal. 18 (1975) 15-26.

[10] R. E. Bruck, Periodic forcing of solutions of a boundary value problem for a second order differential equation in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. 76 (1980) 159-173.

[11] B. Djafari Rouhani, Ergodic theorems for nonexpansive sequences in Hilbert spaces and related problems, Ph. D. Thesis, Yale university, 1981, part 1. pp, 1- 76.

[12] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behavior of quasi-autonomous dissipative systems in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 147 (1990) 465-476.

[13] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behavior of almost nonexpansive sequences in A Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. 151 (1990) 226-235.

[14] B. Djafari Rouhani, A new proof of the weak convergence theorems for nonexpansive sequences and curves in Hilbert spaces, preprint, 1984.

[15] B. Djafari Rouhani, H. Khatibzadeh, Asymptotic behavior of solutions to some homogeneous second order evolution equations of monotone type, J. Inequal. Appl. (2007) Art. ID 72931, 8 pp.

[16] B. Djafari Rouhani, H. Khatibzadeh, Asymptotic behavior of bounded solutions to some second order evolution systems,Rocky Mountain J. Math. 40 (2010) 1289-1311.

[17] B. Djafari Rouhani, H. Khatibzadeh, Asymptotic behavior of bounded solutions to a class of second order nonhomogeneous evolution equations, Nonlinear Anal. 70 (2009) 4369-4376.

[18] M. Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed-point property, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 206-208.

[19] J. Garcia Falset, W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 43 (2001), 377-401.

[20] W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, A mean ergodic theorem for nonlinear semigroups which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sense, J. Math. Anal. App. 246 (2000),1-27.

[21] E. Mitidieri, Asymptotic behaviour of some second order evolution equations, Nonlinear Anal. 6 (1982) 1245-1252.

[22] E. Mitidieri, Some remarks on the asymptotic behaviour of the solutions of second order evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 107 (1985) 211-221.

[23] G. Morosanu, "Nonlinear Evolution Equations and Applications", Editura Academiei Roman (and D. Reidel Publishing Company), Bucharest, 1988.

[24] G. Morosanu, Asymptotic behaviour of solutions of differential equations associated to monotone operators, Nonlinear Anal. 3 (1979) 873-883.

[25] H. Okochi, A note on asymptotic strong convergence of linear contraction semigroups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 56 (1980) 83-84.

[26] I. E. Poffld, S. Reich, An incomplete Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. 113 (1986) 514-543.

[27] L. Ve'ron, Unexemple concernant le comportement asymptotic de le solution bornee de lequation $\frac{d^2u}{dt^2} \in \partial\varphi(u)$. Monatsh. Math. 89 (1980) 57-67.

[28] L. Ve'ron, Problmes d evolution du second order associes a des operateurs monotones, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 278 (1974) 1099-1101.

[29] L. Ve'ron, Equations d evolution du second order associes a des operateurs maximaux monotones, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 75 (1975-76) 131- 147.

ABSTRACT

In this thesis, we study bounded almost nonexpansive sequences and curves, theories asymptotic behavior. So by theory almost nonexpansive curves, investigated asymptotic behavior solution to a class first and second order nonhomogeneous of monotone type evolution equations.

TAFRESH UNIVERSITY

GROP'S MATHMATICAL

THESIS MASTER:

ASMPTOTIC BEHAVIOUR OF ALMOST NON-EXPANSIVE SEQUENCES AND CURVES AND ITS APPLICATIONS TO EVOLUTION EQUATIONS

SUPERVISORS:

DR. E. NAZARI

DR. H. KHATEIBZADEH

STUDENT:

A.KHOSRAVI

2011

فصل اول

مقدماتی از آنالیز تابعی و عملگرهای یکنوای ماکسیمال

در این فصل مقدماتی از آنالیز تابعی و نظریه عملگرهای یکنوای ماکسیمال که در فصل های بعد به آن نیاز داریم، می آوریم.

در این فصل فضای هیلبرت را با نماد H و ضرب داخلی و نرم را به ترتیب نماد های $(.,.)$ و $\|.\|$ نشان می دهیم.

مطالب این فصل از مراجع[۷ و ۲۳] می باشد.

۱-۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

تعریف ۱-۱-۱

فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار باشد و $A \subset X$. در این صورت A را مجموعه محدب گوییم اگر برای هر $x, y \in A$ و برای هر $t \in (0,1)$ داشته باشیم $tx + (1-t)y \in A$.

تعریف ۱-۱-۲

فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار باشد. می‌گوییم تابع $\varphi: X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و برای هر $t \in (0,1)$ داشته باشیم

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y)$$