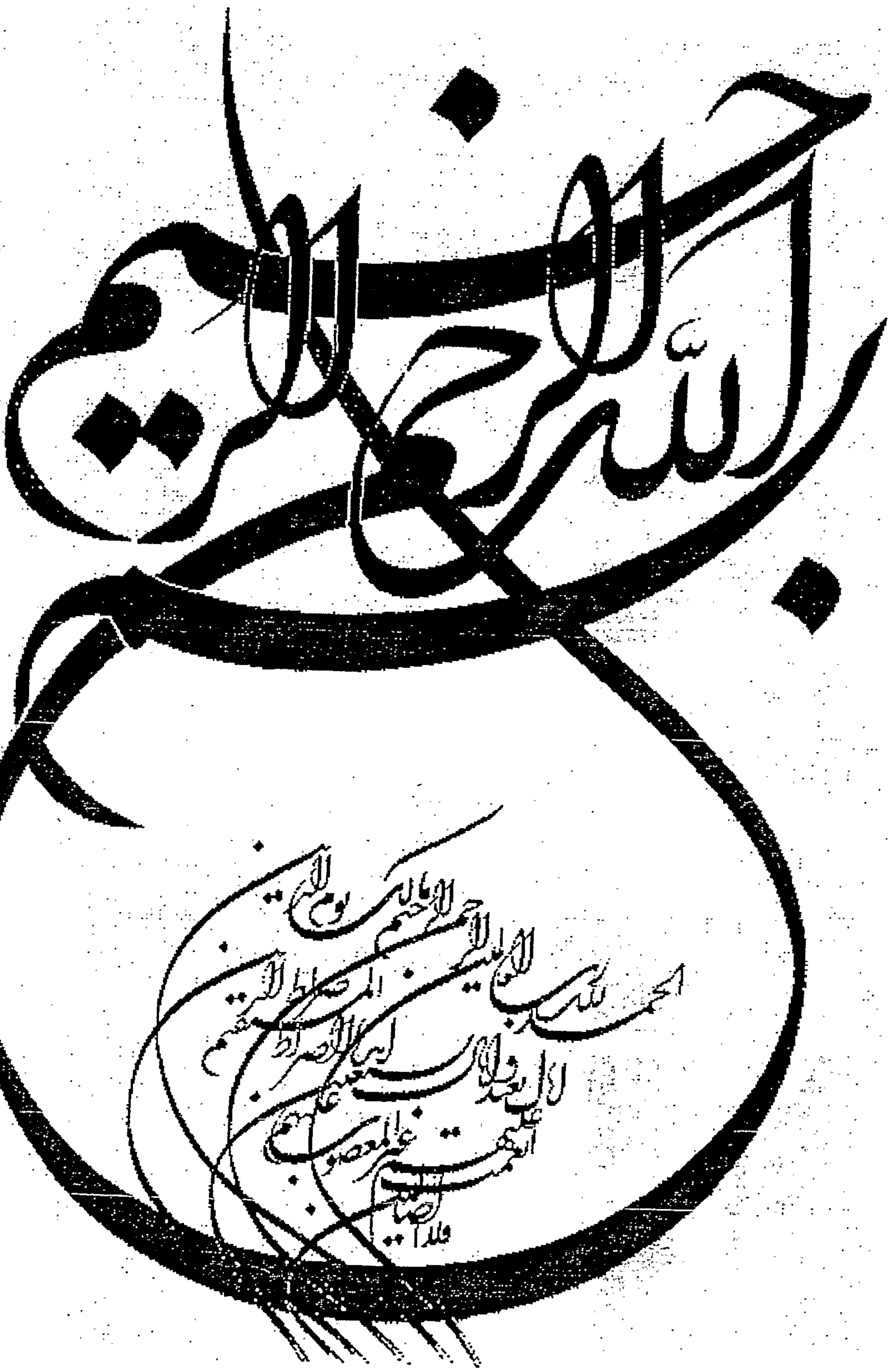
بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

١١٤٩٤٠

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی


پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

# پوشش های ماکسیمال، کاهش یافته و دارای اشتراک بدون هسته

# برای ۳-گروه های آبلی مقدماتی


استادان راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:

وجیهه سجاد




دی ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم وجیهه سجاد

## تحت عنوان:

## پوشش های ماکسیمال ، کاهش یافته و بدون هسته برای ۳- گروههای آبلی مقدماتی

در تاریخ ... ۸۷/۱۰/۴ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه .........عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنمای پایان نامه | دکترعلیرضا عبدالهی | با مرتبه علمی دانشیار | امضاء |
| ۲- استاد راهنمای پایان نامه | دکتر علی اکبر محمدی | با مرتبه علمی استاد | امضاء |
| ۳- استاد داور داخل گروه | دکتر شکرا.. سالاریان | با مرتبه علمی دانشیار | امضاء |
| ۴- استاد داور خارج گروه | دکتر محمدجواد عطایی | با مرتبه علمی استادیار | امضاء |

مهر و امضای مدیر گروه

سپاس خداوندرا که خودرا به ماشناسانید و شکر خویش را الهام فرمود و درهای معرفت را بر ما گشود، فرمان داد که طاعت مارا بیازماید و نهی کرد تا شکرگذاری ما آشکار گردد، هرچه کند مسئول دیگران نیست و دیگران همه مسئول اویند. «صحیفه سجادیه»

با تقدیم خالصانه ترین تشکرات قلبی از زحمات بی دریغ جناب آقای دکتر عبدالهی که در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند و سرمشقی بودند برای آنان که به فراتر از افق های خویش می اندیشند. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

از جناب آقای دکتر محمدی که در تدوین هرچه بهتر این پایان نامه مرا از راهنمایی های ارزنده شان بهره مند نمودند، کمال تشکر را دارم.

از داوران محترم، جناب آقای دکتر عطایی و جناب آقای دکتر سالاریان نیز صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از زحمات بی دریغ خانواده ام، دوستان عزیزم «اکرم اسدالهی، زهرا وفایی و سحر شکرچیان» و کارمندان دانشکده علوم تشکر و قدردانی می نمایم.

تقدیم به مادر فداکارم

که هر چه دارم ثمرهٔ استقامت، ایثار و مهربانی اوست

و

تقدیم به روان پاک برادرعزیزم « محمد»

که با پاکترین قلبها و والاترین اندیشه ها، دلسوزانه برایم زحمت کشید.

## چکیده


یک n-پوشش برای گروه G ، یک مجموعه از زیر گروه های سره G است که اجتماع آنها گروه G را تشکیل می دهد.
یک n-پوشش را کاهش یافته گویند، اگر هیچ زیر مجموعه سره آن یک پوشش نباشد.
یک n-پوشش را بیشین گویند، اگر همه اعضای آن زیر گروه های بیبشین G باشد.
یک n-پوشش را دارای اشتراک بدون هسته گویند، اگر هسته اشتراک آنها بدیهی باشد.
در این پایان نامه ابتدا تمام ۳-گروههای آبلی مقدماتی که دارای n-پوشش کاهش یافته بیشین می باشند مشخص می شود، همچنین مفهوم مجموعه بلوکی در هندسه متناهی را تعریف می کنیم و سپس به رابطه بین مجموعه بلوکی و پوشش می پردازیم، در ادامه به بررسی مساله زیر خواهیم پرداخت:
اگر $G_1$ و $G_2$ دو گروه که دارای n وm-پوشش کاهش یافته بیشین و دارای اشتراک بدون هسته باشند، آیا $G_1 \times G_2$ نیز دارای (n+m-1)-پوشش کاهش یافته بیشین و دارای اشتراک بدون هسته می باشند؟



**واژه های کلیدی:** پوشش، بدون هسته، کاهش یافته، آبلی مقدماتی، ماکسیمال.

## فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول: مفاهیم اولیه ........................................................ ۱

فصل دوم: n‌ـپوشش برای p ـگروهها ........................................................ ۱۳

فصل سوم: n‌ـپوشش و مجموعه بلوکی ........................................................ ۶۹

فصل چهارم: حاصل ضرب دو پوشش ........................................................ ۹۱

## پیشگفتار .

**تعریف.** فرض کنید $G$ یک گروه و $n$ یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد. یک $n$ ـپوشش برای گروه $G$، یک مجموعه $\mathcal{C} = \{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ از زیرگروه‌های سرهٔ $G$ یا یک مجموعه $\mathcal{C} = \{M_i g_i \mid 1 \leq i \leq n, M_i \leq G, g \in G\}$ از هم‌دسته‌های $G$ است به طوری که اجتماع آنها گروه $G$ را تشکیل می‌دهد.

**تعریف.** پوشش $\mathcal{C}$ راکاهش یافته گویند، اگرهیچ زیرمجموعهٔ سرهٔ آن یک پوشش نباشد و آن را بیشین گویند هرگاه همه اعضای آن زیرگروه‌های بیشین $G$ باشند.

**تعریف.** پوشش $\mathcal{C}$ را دارای اشتراک بدون هسته گویند، اگراشتراک $D = \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M$ از $\mathcal{C}$ بدون هسته در $G$ باشد یعنی $D_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1} D g$ زیرگروه بدیهی از $G$ باشد.

**تعریف.** رده تمام گروه‌های $G$ که دارای یک $n$ـپوشش کاهش یافته، بیشین و دارای اشتراک بدون هسته باشد را با $\mathfrak{C}_n$ نمایش داده وگوییم $G$ یک $\mathfrak{C}_n$ـگروه است.

**تعریف.** یک $n$ـپوشش کاهش یافته بیشین و دارای اشتراک بدون هسته برای گروه $G$ را، یک $\mathfrak{C}_n$ ـپوشش برای گروه $G$ گوییم.

به سادگی می‌توان بررسی نمود که گروهی وجود ندارد که اجتماع دو زیر گروه سره خود باشد.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود، آیا گروهی یا گروه‌هایی وجود دارند به‌طوری‌که اجتماع سه یا بیشتر از زیر گروه‌های سره خود باشند؟

اسکرزا[۱] در سال ۱۹۲۶ [۱۷] و گریکو[۲] در سال ۱۹۵۶ [۸] به ترتیب ساختار تمام

---

G. Scorza[۱]

D. Greco[۲]

گروه‌های ۳ و ۴ ـپوشش کاهش یافته‌و دارای اشتراک بدون هسته را مشخص کردند. درسال ۱۹۹۷-بریس [۳] و دیگران [٦] گروه هایی که ۵ ـپوشش کاهش یافتهٔ بیشین دارند را مشخص کردند. همچنین در سالهای ۲۰۰۵ و ۲۰۰٦ عبدالهی و دیگران [۲]، [۴] گروه هایی که دارای $\mathfrak{C}_n$ـپوشش، که در آن $n = ۷, ٦$ می‌باشد را به دست آوردند و هم‌چنین باتوجه به تعریف مجموعه بلوکی در هندسه تصویری توانستند یک تناظر یک به یک بین $\mathfrak{C}_n$ـپوشش برای $p$ـگروه‌های آبلی مقدماتی و مجموعه بلوکی برقرار کنند و توسط مجموعه بلوکی، ساختار $p$ـگروه‌های آبلی مقدماتی که دارای $\mathfrak{C}_۸$ـپوشش و $\mathfrak{C}_۹$ـپوشش می‌باشد را به‌دست آوردند [۳].

این پایان نامه شامل چهار فصل است.

در فصل اول، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می پردازد.

در فصل دوم، به بررسی $\mathfrak{C}_n$ـپوشش برای $p$ ـگروه‌های آبلی مقدماتی می‌پردازد، که در آن $۳ \leq n \leq ۷$.

در فصل سوم، در ابتدا به رابطه بین مجموعهٔ بلوکی و $n$ ـپوشش می پردازد و سپس قضایای مربوط به ۳ـگروه‌های آبلی مقدماتی برای ۸ و ۹ ـپوشش را بررسی می‌کند.

درفصل‌چهارم، به بررسی حدس زیر می‌پردازد، که اخیراً توسط عبدالهی ثابت شده است [۱].

اگر $G_۱$ و $G_۲$، به ترتیب دارای $\mathfrak{C}_n$ و $\mathfrak{C}_m$ـپوشش باشند، آیا برای $G_۱ \times G_۲$ نیز می‌توان $\mathfrak{C}_{(n+m-۱)}$ـپوشش در نظر گرفت؟

---

[۳] R. A. Bryce

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایایی که در اثبات قضایای فصل‌های بعدی به کار می‌رود را، آورده‌ایم.

**تعریف ۱.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه و $G = G_0$، $G_1$، ...، $G_n$ زیرگروه‌هایی از $G$ باشند. دراین‌صورت

(الف) اگر به‌ازای هر $i$، $0 \leqslant i \leqslant n$، $G_i \lhd G_{i+1}$، آن‌گاه سری

$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n$ را یک سری از زیرگروه‌های $G$ می‌نامند.

(ب) اگر به‌ازای هر $i$، $0 \leqslant i \leqslant n$، $G_i \lhd G$، آن‌گاه سری $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n$ را یک سری نرمال برای $G$ گویند.

(ج) اگر $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = \{e\}$ یک سری از زیرگروه‌های $G$ باشد به‌طوری که $G_{i+1} \lhd G_i$، آن‌گاه این سری را یک سری زیر نرمال گویند و $\frac{G_i}{G_{i+1}}$، $0 \leqslant i \leqslant n-1$ را عوامل این سری و تعداد عوامل غیربدیهی در این سری را طول سری می‌نامند.

**تعریف ۲.۱** . یک سری نرمال $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n = \{e\}$ برای یک گروه $G$ را یک سری مرکزی برای $G$ گویند اگر به‌ازای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ در مرکز $\frac{G}{G_{i+1}}$ قرار داشته باشد.

**تعریف ۳.۱** . گروه $G$ را پوچ‌توان گوییم، هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد.

**تعریف ۴.۱** .فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $x \in G$. دراین صورت مرکزساز $x$ در $G$ عبارت است از $C_G(x) = \{g \in G | gx = xg\}$.

اگر $H$ یک زیرمجموعه غیر تهی از $G$ باشد، آن‌گاه مجموعه

$\{g \in G | gh = hg \quad \forall h \in H\}$ را مرکز ساز $H$ در $G$ گوییم و آن‌را با $C_G(H)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۵.۱** .اگر $X$ زیر مجموعه غیر تهی از$G$ باشد، آن‌گاه مجموعه $N_G(X)=\left\{g\in G|gXg^{-1}=X\right\}$ را نرمالساز $X$ در $G$ گویند.

**تذکر ۶.۱** .

الف)اگر $X\leq G$، آن‌گاه $X\lhd N_G(X)$.

ب) اگر $X\leq G$، آن‌گاه $|G:N_G(X)|$، تعداد مزدوجهای $X$ در $G$ است.

**قضیه ۷.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه و $H$ زیرگروهی از آن باشد. دراین‌صورت

(الف) $C_G(H)$ زیرگروهی از $G$ است.

(ب)$C_G(H)\trianglelefteq N_G(H)$.

(ج) $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ با زیرگروهی از گروه خودریختی های $H$ یکریخت است.

**اثبات** . ر. ک. [۱۵]، صفحات ۳۷،۳۸].

**تعریف ۸.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه و $p$ یک عدد اول باشد. دراین‌صورت $G$ را یک $p$—گروه گوییم، اگر به‌ازای هر $g\in G$، عدد صحیح غیرمنفی $n_g$ وجود داشته‌باشد به‌نحوی که $o(g)=p^{n_g}$.

**تعریف ۹.۱** . فرض کنید $G$ یک گروه و $p$ عددی اول باشد. دراین‌صورت عنصر $a\in G$ را یک $p$—عنصر گوییم هرگاه، مرتبه آن توانی از عدد $p$ باشد.

**تعریف ۱۰.۱** . یک زیرگروه $P$ از یک گروه $G$ را یک $p$—زیرگروه سیلو ($p$ عددی اول است) از $G$ گوییم اگر $P$ یک $p$—زیرگروه بیشین از $G$ باشد

**قضیه ۱۱.۱ .** هر گروه آبلی متناهی حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری است که هر یک از مرتبه توانی از یک عدد اول می‌باشند.

**اثبات .** ر.ک. [ ۲۳، صفحه ۱۳۲].

**تعریف ۱۲.۱ .** گروه آبلی $G$ را آبلی مقدماتی گوییم، هرگاه عدد اول $p$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in G$ داشته باشیم $a^p = ۱$.

**لم ۱۳.۱ .** اگر گروه $G$ را آبلی مقدماتی در نظر بگیریم و $|G| = p^n$ ($p$ عدد اول می‌باشد)، آن‌گاه $G \cong \underbrace{C_p \times ... \times C_p}_{n}$.

**اثبات .**

ر. ک. [۲۳، صفحه ۱۰۳].

**قضیه ۱۴.۱ .** فرض کنیم $G$ یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه $p^m$ باشد. دراین‌صورت

$$|Aut(G)| = (p^m - p^{m-۱})...(p^m - ۱).$$

**اثبات .** ر.ک. [۲۳، صفحه ۱۴۴].

**تذکر ۱۵.۱ .** اگر $G \cong C_p \times C_p =< a > \times < b >$، آن‌گاه $G$ دارای $p + ۱$ زیرگروه از مرتبه $p$ مانند $< ab^i >, < b >$ که در آن $۱ \leq i \leq p$ می‌باشد.

**تعریف ۱۶.۱ .** فرض کنید $۱ < N \lhd G$. دراین‌صورت $N$ را یک زیرگروه نرمال کمین گوییم هرگاه زیرگروه نرمال $L$ از $G$ وجود نداشته باشد به‌طوری که $۱ < L < N$.

**لم ۱۷.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $H$، $K$ زیرگروه‌های $G$ باشند. دراین صورت اگر $H$ و $K$ زیر گروه‌های نرمال $G$ باشند به‌طوری‌که $H \cap K = \{e\}$، آن‌گاه به ازای هر $a \in H$ و به ازای هر $b \in K$، $ab = ba$.

**اثبات** . ر.ک. [۱۵]، صفحه ۴۱].

**قضیه ۱۸.۱** . فرض کنید $H$ و $K$ زیرگروه‌هایی از $G$ باشند. دراین صورت

الف) $|HK|.|H \cap K| = |H|.|K|$.

ب)اگر شاخص $H$ و $K$ در $G$ متناهی باشد، آن‌گاه $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = HK$.

**اثبات** . ر. ک. [۱۵]، صفحه ۱۴].

**لم ۱۹.۱** . اگر $M$ زیرگروه بیشین $G$ باشد، آن‌گاه یا $M$ دقیقاً دارای $|G : M|$ مزدوج در $G$ است و یا $M \lhd G$ و $|G : M|$ یک عدد اول است.

**اثبات** . ر. ک. [۲۴]، صفحه ۳۳۶].

**تعریف ۲۰.۱** . زیرگروه فراتینی $G$ که آن را با $Frat(G)$ یا $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$\Phi(G) = G$، اگر $G$ دارای زیرگروه بیشین نباشد.

$\Phi(G)$ اشتراک تمام زیرگروه‌های بیشین $G$ است، اگر $G$ دارای زیرگروه بیشین باشد.

**قضیه ۲۱.۱** . اگر $G$ یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) $G$ پوچ‌توان است.

(ب) هر زیرگروه‌بیشین $G$ نرمال است.

**اثبات** . ر. ک. [۱۵، صفحه ۱۳۰].

**قضیه ۲۲.۱** . فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و $p$ یک عدد اول باشد به‌طوری که $p\Big||G|$. دراین‌صورت یک $p$-زیرگروه سیلو چون $H$ در $G$ نرمال است اگر و فقط اگر $G$ تنهایک $p$-زیرگروه سیلو داشته باشد.

**اثبات** . ر. ک. [۱۵، صفحه ۱۳۰].

**لم ۲۳.۱** . اگر $G$ یک $p$—گروه متناهی ($p$ عددی اول) باشد، آن‌گاه $G$ پوچ‌توان است.

**اثبات** . ر. ک. [۱٦، صفحه ۱۴۵].

**لم ۲۴.۱** . اگر $G$ یک $p$—گروه متناهی ($p$ عددی اول) باشد، آن‌گاه هر زیرگروه بیشین دارای شاخص $p$ می‌باشد.

**اثبات** . طبق مفروضات لم داریم $G$ پوچ‌توان است. لذا هر زیرگروه بیشین $M$ در $G$ نرمال است. بنابراین $\frac{G}{M}$ هیچ زیرگروه غیر بدیهی ندارد، در نتیجه $|\frac{G}{M}|=p$.

**لم ۲۵.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $H,K\lhd G$ به‌طوری که

(۱) $H\cap K=\{e\}$.

(۲) $G=HK=\{hk|h\in H,k\in K\}$.

دراین‌صورت $G\cong H\times K$.

**تعریف ۲۶.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $N \lhd G$ و $H \leqslant G$ به‌طوری‌که

(۱) $G = HN$.

(۲) $H \cap N = 1$.

دراین‌صورت $G$ را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $N$ توسط $H$ گوییم و با $G = H \propto N$ نشان می دهیم.

**لم ۲۷.۱** . فرض کنید $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک خانواده از گروه‌ها باشد. یک گروه $G$ را حاصل‌ضرب زیر مستقیم[1] $G_\lambda$ـها گوییم، هرگاه یک تکریختی $f : G \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $P_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$ همریختی تصویری به مولفه $\lambda$ـام باشد، آن‌گاه همریختی $P_\lambda o f : G \longrightarrow G_\lambda$ پوشا باشد.

اکنون اگر $N_1$، ...، $N_n$ زیرگروه‌های نرمال $G$ باشد، چنان‌که $\bigcap_{i=1}^{n} N_i = 1$ و به ازای هر $i \in \{1, ...n\}$، $\frac{G}{N_i} \cong G_i$، آن‌گاه $G$ حاصل‌ضرب زیر مستقیم $G_1 \times ... \times G_n$ است.

**اثبات** . کافی است یک همریختی یک به یک از $G$ به $G_1 \times ... \times G_n$ معرفی کنیم. $F : G \longrightarrow G_1 \times ... \times G_n$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x) = (N_1x, N_2x, ..., N_nx)$$

داریم

$$F(xy) = (N_1xy, N_2xy, ..., N_nxy) = (N_1xN_1y, ..., N_nxN_ny) =$$
$$(N_1x, N_2x, ..., N_nx)(N_1y, ..., N_ny) = F(x)F(y)$$

[1] Subdirectproduct

اکنون هسته $F$ را تعیین می‌کنیم.

$$kerF=\{x\in G|F(x)=(N_1,...,N_n)\}=$$
$$\{x\in G|(N_1x,N_2x,...,N_nx)=(N_1,...,N_n)\}=$$
$$\{x\in G|N_1x=N_1,...,N_nx=N_n\}=\{x|x\in N_1,...,x\in N_n\}$$
$$=\{x|x\in N_1\cap N_2...\cap N_n\}=N_1\cap N_2...\cap N_n=1$$

پس $F$ یک به یک بوده و در نتیجه $G\hookrightarrow G_1\times ...\times G_n$ $\blacksquare$

**تعریف ۲۸.۱** . فرض کنید $G$ یک گروه و $H$ زیرگروهی از آن باشد. دراین‌صورت H رامشخصه در $G$ گوییم، هرگاه به ازای هر خودریختی $\alpha$ از $G$، $\alpha(H)\leqslant H$.

**قضیه ۲۹.۱** . فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت $\Phi(G)$، زیرگروه فراتینی $G$، یک زیرگروه مشخصه و لذا نرمال در $G$ می‌باشد.

**اثبات** . ر. ک. [۱۶]، صفحه ۲۹۰.

**تعریف ۳۰.۱** . فرض کنید $G$ یک گروه و $n$ عددی صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد. در این‌صورت زیرگروه $G^n$ از $G$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G^n=<g^n:g\in G>$$

**لم ۳۱.۱** . اگر $G$ یک $p-$گروه متناهی باشد، آن‌گاه $\frac{G}{\Phi(G)}$ آبلی مقدماتی است.

**اثبات** . ر. ک. [۱۶]، صفحه ۱۵۹.

**قضیه ۳۲.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت اگر $K\trianglelefteq G$، آن‌گاه $\Phi(K)\leqslant\Phi(G)$.

**اثبات** . ر.ک. [۱۵]، صفحه ۱۳۱.

**قضیه ۳۳.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $G' \leqslant \Phi(G)$.

**اثبات** . ر.ک. [۱۵، صفحه ۱۳۲].

**قضیه ۳۴.۱** (کیلی ). اگر $G$ یک گروه و $S_G$ گروه متقارن روی $G$ باشد، آن‌گاه یک تکریختی $S_G \longrightarrow G$ وجود دارد. به‌عبارت دیگر هر گروه $G$ با زیرگروهی از $S_G$ یکریخت است.

**اثبات** . ر. ک. [۱۵، صفحه ۳۶].

**لم ۳۵.۱** . فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. در این‌صورت $H \lhd G$ اگر و تنها اگر $H$ اجتماعی از رده‌های مزدوجی $G$ باشد.

**اثبات** . ر. ک. [۲۲، صفحه ۵۶].

**لم ۳۶.۱** .

(۱) $Alt_۴$ فقط یک زیرگروه نرمال غیر بدیهی و سره یکریخت با ۴ـگروه کلاین دارد.

(۲) $Alt_۴$ دارای زیر گروهی از مرتبه ٦ نیست.

(۳) $Sym_۴$ فقط دارای یک زیرگروه نرمال از مرتبه ۱۲ است که همان $Alt_۴$ می‌باشد.

(۴) سه زیر گروه مرتبه ۸ از $Sym_۴$ عبارتند از

$$\{۱, (۱۳), (۲۴), (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳), (۱۲۳۴), (۱۴۳۲)\},$$
$$\{۱, (۱۲), (۳۴), (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳), (۱۳۲۴), (۱۴۲۳)\}$$
$$\{۱, (۱۴), (۲۳), (۱۴)(۲۳), (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۲۴۳), (۱۳۴۲)\}$$

**اثبات .**

(۱) می دانیم

$$Alt_۴ = \{۱, (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳), (۱۲۳), (۱۳۲), (۱۲۴),$$
$$(۱۴۲), (۱۳۴), (۱۴۳), (۲۳۴), (۲۴۳)\}$$

بنابراین $|Alt_۴| = ۲^۲ \times ۳$، و با استفاده از لم ۳۵.۱، برای تعیین همه زیرگروه‌های نرمال $Alt_۴$، کافی است ملاحظه کنیم که طول رده‌های مزدوجی $Alt_۴$، عبارتند از۱، ۳، ۴، ۴. بنابراین، اگر $H \lhd Alt_۴$ و $H \neq ۱$، $H \neq Alt_۴$، آن‌گاه باتوجه به $۱ \in H$، مرتبه $H$ برابر است با $۳ + ۱$ و لذا باتوجه به اعضای $Alt_۴$، فقط یک ۲ـزیرگروه سیلوی $N = \{۱, (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۴۵), (۱۴)(۲۳)\}$ یکریخت با ۴ ـگروه کلاین $V$ دارد.

(۲) اگر $H \leq Alt_۴$ و $|H| = ٦$، آن‌گاه $|Alt_۴ : H| = ۲$ پس $H \lhd G$، که با (۱) در تناقض است.

(۳) اگر $K \neq Alt_۴$ و $|K| = ۱۲$، آن‌گاه چون $Alt_۴$ زیرگروه بیشین است پس $KAlt_۴ = Sym_۴$. لذا $|KAlt_۴| = ۲۴$، پس $|K \cap Alt_۴| = ٦$ که با(۱) در تناقض است.■

**قضیه ۳۷.۱ .** اگر $n \neq ۴$ تنها زیرگروه‌های نرمال $Sym_۴$ عبارت است از $۱, Alt_۴, Sym_۴$.

**اثبات .** ر. ک. [۱۵]، صفحه ۷۲].

**تعریف ۳۸.۱ .**

فرض کنید $X \leq G$. دراین صورت هسته $X$ در گروه $G$ را که با $CoreX = X_G$