دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

روش گالرکین بدون المان مختلط برای حل معادلات شرودینگر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی

میثم اندامی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

بهمن ماه ۱۳۹۲

سپاس خداوندی را که نعمت سلامتی و تفکر را به من عطا کرد تا این مسیر را به سرانجام برسانم.

سپاس خداوندی را که پدر و مادری مهربان و خانواده‌ای دلسوز به من عطا کرد تا قوت قلب من در این مسیر سخت باشند.

سپاس خداوندی را که در این مسیر سخت استادی صبور، دکتر رضا مختاری را بر سر راه من قرار داد تا بتوانم با راهنمایی‌های ایشان، طی کردن مسیر برایم میسر شود.

سپاس خداوندی را که دوستانی دلسوز همچون محمد حسین دبیری، مهدی علیزاده، محمد اسدی را در کنار من قرار داد تا خالق زیباترین خاطراتم در این دانشگاه باشند.

سپاس ای خداوند کریم و مهربان، سپاس.

در پایان از دکتر حمیدرضا مرزبان جهت مشاوره و همچنین از اساتید داور آقایان دکتر حمید هاشم الحسینی و دکتر نبی اله گودرزوند چگینی جهت بازخوانی و داوری این پایان نامه تشکر و قدردانی می نمایم.

بهمن ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه روش تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط مطرح شده و با روش کمترین مربعات متحرک مقایسه شده است. همچنین روش‌های گالرکین بدون المان و گالرکین بدون المان مختلط در حل معادلات شرودینگر یک و دوبعدی و زوج معادلات شرودینگر پیاده‌سازی و مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: تقریب کمترین مربعات متحرک، تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط، روش گالرکین بدون المان، روش گالرکین بدون المان مختلط، معادله‌ی شرودینگر یک‌بعدی و دوبعدی، زوج معادلات شرودینگر.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل پس از بیان تاریخچهٔ روش‌های آزاد از شبکه، به تعریف مفاهیم مورد نیاز برای فصل‌های آینده خواهیم پرداخت.

۱.۱ روش‌های آزاد از شبکه

روش‌های آزاد از شبکه در برخی از مسائل به دلیل هزینهٔ محاسبات کمتر و دقت محاسبات بالاتر نسبت به روش‌های عددی دیگر از اهمیت بالایی برخوردار هستند. روش عددی که منجر به پیشرفت مهمی در عرصهٔ روش‌های عددی گردید، روش المان متناهی (FEM) است. این روش در سال ۱۹۵۰ به وجود آمده است و مجموعه‌ای از المان‌های تشکیل دهندهٔ دامنه است که المان‌ها با طرحی به نام شبکه به هم مربوط می‌شوند. این روش کاربرد وسیعی به علت تطابق با هندسهٔ پیچیدهٔ اشکال و انعطاف در مسائل خطی و غیرخطی دارد. اما با همهٔ این فواید این روش وابسته به شبکه دارای کمبودهایی است. هزینهٔ بالای تولید یک شبکهٔ المان متناهی، محدودیت دقت پایین، سختی تطابق تحلیلی، محدودیت در تحلیل برخی مسائل مانند کاهش دقت و به هم ریختن یا حتی حذف کامل برخی المان‌های تحت تأثیر دگردیسی‌های بزرگ، شبیه‌سازی شکاف‌ها و درزها و شبیه‌سازی شکستگی اجسام، تعدادی از این مشکلات است. به دلیل ضعف‌های بیان شده در روش المان متناهی، زمینهٔ پیدایش روش‌های آزاد از شبکه به وجود آمد.

در روش‌های بدون شبکه یا آزاد از شبکه به جای شبکه‌بندی دامنه مسئله، یک مجموعه از گره‌های پراکنده مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های آزاد از شبکه به دلیل کاربرد زیاد در مسائل مهندسی از اهمیت بالایی برخوردار هستند. تفاوت اصلی بین روش‌های آزاد از شبکه و روش‌های عددی معمول، چگونگی به‌دست آوردن توابع شکل است. روش گالرکین بدون المان (EFG) به دلیل دقت بالا در مدل‌سازی انواع مسائل فیزیکی دارای کاربرد بسیاری است. روش بدون المان گالرکین بر مبنای تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS) شکل گرفته است. این یک خاصیت مهم برای روش EFG است. در واقع از تقریب MLS برای تقریب توابع شکل روش EFG استفاده می‌شود. اما برای پیاده‌سازی روش EFG در مسائل مختلط مقدار، باید تابع مجهول را به دو قسمت حقیقی و موهومی تفکیک نمود

و سپس بر روی هر قسمت روش EFG پیاده‌سازی شود. در این قبیل از مسائل این موضوع می‌تواند هزینهٔ سنگین محاسبات را به دنبال داشته باشد. از همین رو روش گالرکین بدون المان مختلط (CEFG) ارائه گردید [۹]. روش CEFG بر اساس ترکیب روش‌های تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط (CMLS) و EFG می‌باشد. در روش CEFG دیگر نیازی به تفکیک تابع مجهول مختلط به دو قسمت حقیقی و موهومی نیست و این موضوع می‌تواند تا حدودی افزایش هزینهٔ محاسبات به وجود آمده در روش EFG را برطرف نماید. این در حالی است که میزان خطا در دو روش EFG و CEFG در مسائلی که دامنه حقیقی و تابع مجهول مختلط–مقدار باشد، تقریباً برابری می‌کند.

۲.۱ تاریخچه روش‌های آزاد از شبکه

شاید بتوان سابقهٔ استفاده از روش‌های آزاد از شبکه را نزدیک به هشتاد و دو سال پیش نسبت داد (روش‌های هم مکانی اسلیتر ۱۹۳۴، بارتا ۱۹۳۷، فریزر ۱۹۳۷ و لَنچوز ۱۹۳۸) و برخی روش‌ها مانند روش رأسی (چورین ۱۹۳۷، براند ۱۹۹۵)، روش تفاضل متناهی (FDM) با شبکهٔ دلخواه، یا روش تفاضل متناهی تعمیم یافته (GFDM) (گیرولت ۱۹۷۴ ، پاوین و پِرون ۱۹۷۵ ، اسنِل و همکاران ۱۸۹۱ ، لیسکا و اورکیس ۱۹۷۷، ۱۹۸۸، کروک و اورکیس ۱۹۸۹) تاحدی جدیدتر هستند. از دیگر روش‌های شناخته شدهٔ آزاد از شبکه، هیدرودینامیک‌های ذره‌ای هموار شده (SPH) است که در ابتدا برای شبیه‌سازی پدیده‌های فیزیک نجومی مانند انفجار ستارگان و ابرهای غباری بدون مرز مورده استفاده قرار می‌گرفت. اغلب تحقیقات جدیدتر در زمینهٔ این روش در کارهای لوسی ۱۹۷۷، مونوگان و همکار (گینگولد و مونوگان ۱۹۷۷، مونوگان و لاتانزیو ۱۹۸۵ و مونوگان ۱۹۹۲) برجسته است. جزئیات یافته‌های جدید در مورد این مباحث را می‌توان در [۲۰] یافت. علاقهٔ تحقیقاتی در رابطه با روش‌های شکل قوی آزاد از شبکه کمتر است که شاید تا حدودی به سبب ضعیف‌تر بودن نسبت به روش‌های شکل ضعیف آزاد از شبکه و تا حدودی به خاطر تمرکز روی روش‌های متناهی که در شکل ضعیف استفاده می‌شد. در واقع می‌توان روش المان متناهی را یک گام طبیعی برای روش‌های شکل ضعیف آزاد از شبکه در نظر گرفت.

از سال ۱۹۹۰ علاقهٔ تحقیقاتی در زمینهٔ روش‌های آزاد از شبکه در حال افزایش است و یک گروه روش‌های آزاد از شبکه به طور وسیع ارائه شده است. به عنوان نمونه روش‌های مانند روش‌های المان انتشاری (DEM) نایرولز ۱۹۹۲، روش گالرکین بدون المان (EFG) بلچیکو و همکاران ۱۹۹۴، روش ذره هسته باز تولید لیو و همکاران ۱۹۹۵، روش‌های درون‌یابی نقاط وانگ و لیو ۲۰۰۰ و لیو و گو ۲۰۰۱، روش پتروف–گالرکین موضعی بدون شبکه (MLPG) آتلوری ۱۹۹۸، روش گره مرزی (BNM) موخِرجی و همکاران ۱۹۹۷، روش‌های درون‌یابی گره‌های مرزی (BPIM) گو و لیو ۲۰۰۱–۲۰۰۳، روش شکل ضعیف–قوی آزاد از شبکه (MWS) لیو و لیو ۲۰۰۴ و ... .

با توجه به اهمیت بالای روش‌های تقریب و درون‌یابی توابع بر اساس گره‌ها در روش‌های آزاد از شبکه، اگر بخواهیم بر اساس طرح‌های تقریبی توابع، روش‌های آزاد از شبکه را دسته‌بندی کنیم چهار گروه خواهیم داشت. شاید معروفترین آن‌ها گروهی که بر پایهٔ تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS) باشد که به علت تولید یک تقریب پیوسته برای یک تابع میدانی بر روی تمام دامنهٔ مسئله، مانند کلیدی برای توسعهٔ بسیاری از روش‌های آزاد از شبکه عمل می‌کند و معین مثبت بودن ماتریس ضرایب آن در حالت کلی یک امتیاز برای این روش به شمار می‌رود. نایرولز و همکاران

۱۹۹۲ برای اولین بار از این تقریب برای روش المان انتشاری استفاده کردند. بسیاری از روش‌ها مانند روش گالرکین بدون المان و روش پتروف-گالرکین موضعی بدون شبکه (MLPG) با استفاده از این تقریب به وجود آمده‌اند. این قسمت‌ها برگرفته از مرجع [۳۷] است.
روش‌های آزاد از شبکه بر اساس دامنهٔ مسئله نیز قابل طبقه‌بندی هستند. روش‌های آزاد از شبکه در استفاده از تقریب‌های جدید برای توابع، توسعهٔ شیوهٔ جدید برای تشکیل روابط و توسعهٔ روش‌های آزاد از شبکه بر پایهٔ ترکیب تقریب‌های توابع و شیوهٔ تشکیل روابط، می‌توانند در آینده از تنوع بیشتری برخوردار باشند.
روسی و همکاران روش گالرکین بدون المان بهبودیافته را مورد بررسی قرار دادند و آن را در فرآیند مسئلهٔ تغییر شکل بزرگ به کار بردند [۲۸]. تیاگو و همکاران قالبیت اجرای روش EFG را برای آنالیز دقیق هندسی از صفحات مورد بررسی قرار دادند [۶]. روش بدون المان مرزی به وسیلهٔ ژنگ و هم‌کاران ارائه شده است [۱۵]. روش گالرکین بدون المان بهبودیافته مبنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک بهبود یافته (IMLS) توسط ژنگ و همکاران ارائه شده است [۳۴، ۳۵] و مبنی بر روش MLS پیشنهاد شده توسط لنکستر، ژنگ و رن روش MLS درونیاب بهبودیافته را به دست آوردند [۱۱، ۱۲]. از طرفی با ترکیب روش کمترین مربعات متحرک مختلط (CMLS) و EFG، روش CEFG برای مسائل قابل ارتجاعی و پلاستیک مرتجع در بعد دو ارائه شده است. [۷، ۲۲، ۲۳].
در این پایان‌نامه به بررسی روش کمترین مربعات متحرك مختلط پرداخته و به کمك روش گالرکین بدون المان مختلط، حل عددی معادلات شرودینگر را بررسی می‌کنیم. در فصل دوم این پایان‌نامه بعد از پرداختن به تعاریف و مفاهیم مورد نیاز، به بررسی و تشریح روش کمترین مربعات متحرک، تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط و تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط بهبودیافته می‌پردازیم که برای پیاده‌سازی روش گالرکین بدون المان و روش گالرکین بدون المان مختلط مورد نیاز است. در فصل دوم به مقایسهٔ دو روش تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط و تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط بهبودیافته پرداخته می‌شود. در فصل سوم و چهارم به پیاده‌سازی روش گالرکین بدون المان و روش گالرکین بدون المان مختلط در حل معادلات شرودینگر یک بعدی و دو بعدی می‌پردازیم. در فصل پنجم به حل عددی زوج معادلات شرودینگر می‌پردازیم و پس از آن به مقایسهٔ روش گالرکین بدون المان و روش گالرکین بدون المان مختلط در حل این مسائل می‌پردازیم. در پایان به بیان نتایج کلی و ارائهٔ پیشنهادهای در جهت ادامه کار و تحقیقات بیشتر در این مسیر پرداخته شده است. به همین منظور در ادامه تعاریف و قضایای مورد نیاز را جمع آوری کرده و به تشریح آن‌ها پرداخته شده است.

۳.۱ مفاهیم پایه

۱.۳.۱ اندیس‌گذاری چندگانه

در این قسمت به تشریح نماد اندیش‌گذاری چندگانه می‌پردازیم که به علت روبه‌رو شدن با مشتقات پاره‌ای از هر مرتبه ضروری است.

فرض کنیم α به صورت

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d),$$

باشد که در آن d بعد مسئله می‌باشد و هر مؤلفهٔ α یک عدد صحیح نامنفی است. طول بردار α برابر است با

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

و D^α نشان دهندهٔ مشتق پاره‌ای تابع u به صورت زیر است

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

اگر $|\alpha| = m$، $D^\alpha u$ نشان دهندهٔ مشتق پاره‌ای مرتبهٔ m است.

۲.۳.۱ پایهٔ کامل

با توجه به اهمیت مفهوم پایه‌های کامل در چارچوب روش‌های آزاد از شبکه و به ویژه چند جمله‌ای ها، به تشریح این مفهوم می‌پردازیم. در واقع مفهوم پایهٔ کامل مفهوم مهمی در شکل‌بندی روش MLS دارد. یک راه مناسب برای ایجاد یک پایهٔ کامل استفاده از نماد اندیس‌گذاری چندگانه می‌باشد. فرض کنید d بعد مسئله در حال بررسی باشد. اگر x عضوی از دامنه و هم طول با بردار α باشد، می‌توان نوشت

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

حال می‌توان پایه‌های چندجمله‌ای از مرتبه n را به صورت زیر تعریف کرد

$$p(x) = \{x^\alpha | |\alpha| \leq n\}.$$

چند نمونه از پایه‌های کامل مرتبهٔ اول و دوم $(d = 1, 2)$ و مرتبه سازگاری اول و دوم $(n = 1, 2)$ به شکل زیر می‌باشند

$$\begin{cases} d = 1 \\ \qquad \Longrightarrow \{\alpha : ||\alpha| \leq 1\} \rightarrow p = [1, x_1]^T, \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=2 \\ \qquad \Longrightarrow \{\alpha : ||\alpha| \le 1\} \to p=[1,x_1,x_2]^T, \\ n=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=2 \\ \qquad \Longrightarrow \{\alpha : ||\alpha| \le 2\} \to p=[1,x_1,x_2,x_1^2,x_1x_2,x_2^2]^T. \\ n=2 \end{cases}$$

از آن جایی که α یک بردار است می‌توان مجموعهٔ همهٔ بردارهای α با $|\alpha| \le n$ را به صورت یک ماتریس تعریف کرد. رابطهٔ بین d بعد مسئله و مرتبهٔ سازگاری n و تعداد مؤلفه‌های بردار پایه به صورت زیر است

$$k=\frac{1}{d!}\prod_{i=1}^{d}(n+i).$$

که در نتیجه برای بعد یک $k=(n+1)$ و برای بعد دو $k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

۳.۳.۱ مشتق ضعیف

تعریف ۱.۳.۱ مجموعهٔ تمام توابع با دامنهٔ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ که خود و تمام مشتق‌های جزئی آن تا مرتبهٔ k بر دامنهٔ توابع پیوسته باشند را با $C^k(\Omega)$ نمایش می‌دهند. یعنی

$$C^k(\Omega)=\{f : D^\alpha f \in C(\Omega); \forall |\alpha| \le k\}.$$

در این صورت $C^\infty(\Omega)$ فضای توابعی است که مشتقات آن از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته می‌باشند.

تعریف ۲.۳.۱ تابع حقیقی $||.||$ تعریف شده بر فضای برداری X را نرم نامیم اگر در سه ویژگی زیر صدق کند

۱. به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $||x|| \ge 0$ و $||x||=0$ اگر و فقط اگر $x=0$،

۲. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $||\alpha x||=|\alpha|.||x||$،

۳. برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $||x+y|| \le ||x||+||y||$ (نابرابری مثلثی).

فضای برداری X دارای نرم $||.||$ را یک فضای برداری نرم‌دار می‌نامند.

تعریف ۳.۳.۱ فرض می‌کنیم $p \ge 1$ یک عدد حقیقی باشد در این صورت تابع f که بر دامنهٔ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ تعریف شده است را متعلق به $L_p(\Omega)$ گویند اگر f اندازه‌پذیر بوده و انتگرال $\int_\Omega |f(x)|^p dx$ به مفهوم لبگ موجود باشد. فضای

$L_p(\Omega)$ یک فضای نرم‌دار با نرم زیر است

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

۴.۳.۱ فضای سوبولف

تعریف ۴.۳.۱ یک فضای نرم‌دار خطی $(V, \|.\|)$ یک فضای باناخ است اگر نسبت به نرم $\|.\|$ کامل باشد. یعنی هر دنباله کوشی در آن فضا به عضوی از آن فضا همگرا باشد.

قضیه ۵.۳.۱ فضای $L^p(\Omega)$ به ازای $0 < p \leq \infty$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۶.۳.۱ یک ضرب داخلی بر یک فضای حقیقی X نگاشتی است مانند

$$(.,.) : X \times X \to \mathbb{R},$$

به طوری که برای هر $x, y, z \in X$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$1.(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z),$$
$$2.(x, y) = (y, x),$$
$$3.(x, x) \geq 0,$$
$$4.(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

یک فضای خطی با یک ضرب داخلی، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۳.۱ یک فضای هیلبرت، یک فضای ضرب داخلی است که نسبت به نرم القایی از ضرب داخلی، کامل باشد.

تعریف ۸.۳.۱ اگر تابع $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ متعلق به فضای $L^1[a, b]$ و تابع $\nu : [a, b] \to \mathbb{R}$ متعلق به فضای $L^1[a, b]$، چنان باشد که

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b \nu(x)\varphi(x)dx.$$

آن‌گاه تابع ν مشتق ضعیف تابع u نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۳.۱ فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی باشد و مشتقات ضعیف $D^\alpha f$ برای هر $|\alpha| \leq k$ موجود باشد. در این صورت فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_k^p(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

این فضا یك فضای نرم‌دار است و نرم آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_{W_k^p(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p)^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty, \\ \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

برای جزئیات بیشتر به مرجع [۲] مراجعه نمایید.

تعریف ۱۰.۳.۱ فضای سوبولف مرتبهٔ k که با نماد $H^k(\Omega)$ نشان داده می‌شود، فضایی است شامل توابعی از فضای $L_2(\Omega)$ که خود و تمام مشتقات پاره‌ای ضعیف آن تا مرتبهٔ k متعلق به $L_2(\Omega)$ باشند. یعنی

$$H^k(\Omega) = \{f : D^\alpha f \in L_2(\Omega); \forall|\alpha| \leq k\} \equiv W_2^k(\Omega),$$

و منظور از $H_0^k(\Omega)$ فضای متشکل از عناصری از $H^k(\Omega)$ است که بر روی مرز صفر باشند.

۵.۳.۱ شکل ضعیف

تعریف ۱۱.۳.۱ فرض می‌کنیم Ω دامنهٔ باز و کراندار در $\mathbb{R}^m$ باشد و V یک فضای تابعی روی $\mathbb{R}^{m-1}$ باشد. Γ (مرزΩ) را از رده V گویند اگر برای هر نقطهٔ $x_0 \in \Gamma$ وجود داشته باشند $r > 0$ و تابع $g \in V$ به طوری که داشته باشیم

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) | x_m > g(x_1, ..., x_{m-1})\},$$

که در آن، $B(x_0, r)$ نشان‌دهندهٔ گوی m-بعدی به مرکز x_0 و شعاع r است. در حالت خاص، زمانی که V شامل توابع پیوستهٔ لیپشیتز باشد، Ω دامنهٔ لیپشیتز نامیده می‌شود.

قضیه ۱۲.۳.۱ فرض می‌کنیم Ω یک دامنهٔ لیپشیتز در $\mathbb{R}$ باشد و $1 \leq p \leq \infty$. عملگر خطی $\gamma : W_1^p(\Omega) \to L_p(\Gamma)$ با خصوصیات زیر

۱) $\gamma v = v|_\Gamma$ اگر $v \in W_1^p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$،

۲) برای ثابت $c > 0$ و $\forall v \in W_1^p(\Omega)$ داریم $\|\gamma v\|_{L_p(\Gamma)} \leq c\|v\|_{W_1^p(\Omega)}$،

۳) نگاشت $\gamma : W_1^p(\Omega) \to L_p(\Gamma)$ فشرده باشد یعنی برای هر دنبالهٔ کراندار $\{v_n\}$ در $W_1^p(\Omega)$ زیردنبالهٔ $\{v_{n'}\} \subset \{v_n\}$ موجود است به طوری که $\{\gamma v_{n'}\}$ در $L_p(\Omega)$ همگرا باشد، را عملگر اثر می‌نامند و γv می‌تواند مقدار مرزی گسترش‌یافتهٔ v نامیده شود. عملگر اثر از $W_1^p(\Omega)$ به $L_p(\Gamma)$ نه یک به یک و نه پوشا است. برد $\gamma(W_1^p(\Omega))$ یک فضای کوچک‌تر از $L_p(\Gamma)$ یعنی یک فضای سوبولف مرتبهٔ مثبت بر روی مرز است. اغلب از نماد یکسان v برای اثر $v \in H^1(\Omega)$ استفاده می‌شود.

تعریف ۱۳.۳.۱ زمانی که در مورد شکل ضعیف مسئلهٔ مقدار مرزی بحث می‌شود نیاز به تعریف اثر توابع $H^1(\Omega)$ خواهد بود. این اثر به صورت فضای $H^{1/2}(\Gamma)$ خواهد بود یعنی

$$H^{1/2}(\Gamma) = \gamma(H^1(\Omega)),$$

به طور متناظر، می‌توان از تعریف زیر برای نرم در $H^{1/2}(\Gamma)$ استفاده کرد

$$\|g\| = \inf_{v\in H^1(\Omega), \gamma v = g} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{۱.۱}$$

تعریف ۱۴.۳.۱ (شکل ضعیف) فرض کنید Ω یک دامنهٔ لیپشیتز در $\mathbb{R}^d$ با مرز Γ و $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ نشان‌دهندهٔ بردار نرمال برون‌سوی Γ باشد و تقریباً همه‌جا تعریف شده باشد. رابطهٔ

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = \int_\Gamma u v \nu_i ds - \int_\Omega u v_{x_i} dx, \qquad \forall u, v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

به رابطهٔ گاوس یا قضیهٔ دیورژانس و برای ناحیه‌های مسطح به رابطهٔ گرین معروف است. این رابطه را می‌توان برای توابعی از فضاهای سوبولف، به طوری که همواری تابع به طور دقیق برای انتگرال‌گیری در مفهوم لبگ کافی باشد، گسترش داد.

۶.۳.۱ سازگاری و افراز واحد

به بیان ساده یک طرح $\ell_h u = f$ سازگار از مرتبه p با معادلهٔ مشتقی $\ell u = f$ است هرگاه

$$\|\ell u - \ell_h u\| = O(h^p),$$

که h همان اندازه تراکم نقاط گره است. این بدیهی است که خطای تقریب $\|\ell u - \ell_h u\|$ به سمت صفر نزدیک می‌شود اگر $h \to 0$.

در بعضی مراجع گفته می‌شود یک روش عددی سازگار از مرتبه n است هرگاه بتوان چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر

n را با آن روش به طور دقیق نمایش داد. به بیان دقیق‌تر یک مجموعه از توابع $\{\Phi_i\}$ سازگار از مرتبهٔ n است اگر شرایط سازگاری زیر برقرار باشد

$$\sum_i \Phi_i(x)p(x_i) = p(x), \qquad \forall x \in \Omega,$$

که در آن p یک پایهٔ کامل است. در بعضی مراجع از اصطلاح افراز واحد (PU) از مرتبه n به جای سازگاری از مرتبه n استفاده می‌شود. با مشتق‌گیری داریم

$$\sum_i D^\alpha \Phi_i(x)p(x_i) = D^\alpha p(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

اگر این رابطه برقرار باشد گفته می‌شود توابع $\{\Phi_i\}$ یك افراز پوچ (PN) از مرتبه n تشکیل می‌دهند. در روش‌های آزاد از شبکه برقراری این دو رابطه نشان‌دهنده آن است که توابع شکل به درستی ساخته شده‌اند. اگر افراز واحد از مرتبهٔ صفر داشته باشیم آنگاه می‌توان نوشت

$$\sum_i \Phi_i(x) = ۱.$$

و از طرف دیگر بنابر تعریف پایهٔ کامل داریم

$$p_۱(x) = x^{\alpha_۱} = x^{(۰,\ldots,۰)} = ۱.$$

بنابراین واژه افراز واحد دلالت بر آن دارد که جمع توابع $\{\Phi_i\}$ سازگار از مرتبهٔ صفر برابر با یک باشد که $p_۱$ نمایشی برای نخستین تابع پایه است.

۷.۳.۱ مسائلی با شرایط مرزی دیریکلهٔ همگن

مسئلهٔ مقدار مرزی بر روی Ω را به صورت زیر

$$-\triangle u_۱ = f, \tag{۲.۱}$$

و با شرط مرزی

$$u_۱|_\Gamma = ۰. \tag{۳.۱}$$

که در آن Γ به عنوان مرز Ω داده شده است در نظر می‌گیریم. منظور از شکل ضعیف مسئله یافتن تابع $u_1 \in V$ است به طوری که برای هر $u_2 \in V$ داشته باشیم

$$a(u_1, u_2) = l(u_2), \tag{۴.۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \\ a(u_1, u_2) &= \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_2 dx, \qquad u_1, u_2 \in V, \\ l(u_2) &= \int_\Omega f u_2 dx, \qquad u_2 \in V. \end{aligned}$$

۸.۳.۱ مسائلی با شرایط مرزی دیریکلهٔ غیرهمگن

در این مسائل از شرط مرزی زیر به جای شرایط مرزی مسائل همگن استفاده می‌شود

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f, \qquad \forall x \in \Omega, \\ u_1 &= g, \qquad \forall x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

که در آن Γ مرز مسئله مورد نظر است. در ابتدا شکل ضعیف مسئله را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم مسائل همگن و غیرهمگن در نظر گرفته شده دارای جوابی به صورت $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ باشند. با در نظر گرفتن برقراری شرایط همواری تابع محک u_2 و ضرب رابطهٔ (۲.۱) در این تابع و در نهایت انتگرال‌گیری از آن به دست خواهیم آورد

$$\int_\Omega (-\triangle u_1) u_2 dx = \int_\Omega f u_2 dx,$$

و با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_2 ds + \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_2 dx = \int_\Omega f u_2 dx.$$

اگر فرض کنیم u_2 بر روی Γ برابر با صفر است، انتگرال مرزی صفر می‌شود و می‌توان نوشت

$$\int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_2 dx = \int_\Omega f u_2 dx, \qquad u_1 \in H^1(\Omega), u_2 \in H_0^1(\Omega), f \in L_2(\Omega).$$

باید توجه داشت که جواب u_1 باید در شرط مرزی (۵.۱) بر روی Γ صدق نماید. در نهایت شکل ضعیف برای مسائل مقدار مرزی غیرهمگن به صورت زیر به دست می‌آید

$$\int_\Omega \nabla u_1.\nabla u_2 dx = \int_\Omega f u_2 dx, \quad \forall u_2 \in H_0^1(\Omega). \tag{۶.۱}$$

اما باید توجه کرد که نمی‌توان برای شکل ضعیف فوق جواب یکتا در نظر گرفت، زیرا تابع u_1 و تابع محک u_2 در فضاهای یکسانی قرار ندارند. برای رفع این مشکل از عملگر اثر γ استفاده می‌کنیم به طوری که داشته باشیم

$$\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma),$$

چون $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ بنابراین تابعی مانند y وجود دارد به طوری که $\gamma y = g$. بنابراین با فرض

$$u_1 = w + y,$$

هدف یافتن تابع w در فضای $H_0^1(\Omega)$ است به طوری که داشته باشیم

$$\int_\Omega \nabla w.\nabla u_2 dx = \int_\Omega (f u_2 - \nabla y.\nabla u_2) dx, \qquad \forall u_2 \in H_0^1(\Omega), \tag{۷.۱}$$

تابع w باید در شرط مرزی $w = 0$ و در Ω در معادلهٔ

$$-\triangle w = f + \triangle y.$$

صدق نماید. حال با در نظر گرفتن $u_1 = w + y$ یک جواب برای رابطهٔ (۶.۱) به دست می‌آوریم.

فصل ۲

تقریب کمترین مربعات متحرک مختلط

تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط (CMLS) تعمیمی از تقریب یک تابع برداری است [۳۲،۱۴]. روش‌های بدون المان نتیجه شده از تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط دارای بازدهی محاسباتی بیشتری هستند و تحت همان توزیع گره‌ای، روش بدون المان مبنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط دارای دقت محاسباتی بالاتری هستند. امّا در تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط، مفاهیم ریاضی و مفاهیم فیزیکی توابع، واضح نیستند. تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط بهبودیافته (ICMLS) همهٔ فواید تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط را به ارث برده و علاوه بر آن، توابع در تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط بهبودیافته مفهوم فیزیکی ساده‌ای دارند. به کمک تقریب کمترین مربعات متحرک متغیر مختلط و روش گالرکین بدون المان (EFG) روش گالرکین بدون المان متغیر مختلط (CEFG) ارائه شده است [۹]. روش گالرکین بدون المان متغیر مختلط هزینهٔ محاسباتی کمتری از روش گالرکین بدون المان دارد. در ادامه برای شناخت بهتر مسئله و روش، پیش نیازهایی می‌آوریم.

۱.۲ تابع وزن یا هسته

توابع وزن اساسی‌ترین نقش را در تولید توابع شکل در روش کمترین مربعات متحرک دارند. در واقع این توابع باید در شرایط زیر صدق نمایند [۷]

- $w(x-y,h) > 0$ در Ω_i زیر دامنه‌ای از Ω ،
- $w(x-y,h) = 0$ در خارج از Ω_i ،
- خاصیت نرمال بودن : $\int_\Omega w(x-y,h)d\Omega = 1$ ،
- $w(s,h)$ به طور یکنواخت نزولی باشد، چنانکه $s = \|x-y\|$،
- $w(s,h) \to \delta(s)$ هرگاه $h \to 0$ ، که در آن $\delta(s)$ تابع دلتای دیراک است.