دانشگاه پیام نور

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض (جبر)

دانشکده علوم پایه
گروه علمی ریاضی

عنوان:

تعمیم ایده آل های اول

استاد راهنما:

دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور:

دکتر محبوبه حسین یزدی

نگارش:

افروزه جعفری

مرداد ۱۳۸۹

اتا

تا:

سپاسگزاری

سپاس بی کران خالق یکتا را که توفیق علم آموزی در محضر اساتیدی گرانقدر و مجرب را به من داد.

از جناب آقای دکتر احمد خاکساری استاد راهنمای گرامی به خاطر تمام زحماتی که در تالیف این پایان نامه برایم کشیده اند بی نهایت سپاسگزارم و زحمات ایشان را ارج می نهم. از خداوند متعال برای ایشان لحظاتی سرشار از سلامتی و موفقیت را آرزومندم.

از سر کار خانم دکتر محبوبه حسین یزدی استاد مشاور گرانقدر که در تهیه این پایان نامه من را یاری کردند تشکر می کنم. همچنین از جناب آقای دکتر بهمن یوسفی استاد داور محترم کمال تشکر را دارم.

در این جا بر خود لازم می دانم از خانواده دلسوزم که همواره همراه و مشوق اصلی من بوده و هستند به خصوص برادر عزیزم تشکر و قدردانی کنم.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. تعمیم های مختلفی از ایده آل های اول مطالعه شدند. برای مثال ایده آل محض I از حلقه R را اول ضعیف می نامند؛ هر گاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I - \{0\}$ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$. همچنین ایده آل محض I از حلقه R را تقریباً اول می نامند؛ هر گاه برای هر $a, b \in R$ ؛ اگر $ab \in I - I^2$ ، آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

حال ما می خواهیم با استفاده از نگاشت $\phi : I(R) \longrightarrow I(R) \cup \{\emptyset\}$ به طوری که $I(R)$ مجموعه ایده آل های R می باشد؛ مفهوم ایده آل های اول را تعمیم دهیم.

همچنین نشان می دهیم که ایده آل های $\phi-$اول خواص مشابه زیادی با ایده آل های اول دارند.

فهرست مطالب

مقدمه

همه جا R یک حلقه جابجایی و یکدار با حلقه کسر های $T(R)$ می باشد. مجموعه ایده آل های حلقه R را با نماد $I(R)$ ؛ و مجموعه ایده آل های محض آن را با نماد$I^*(R)$ نشان می دهیم. ایده آل های اول نقشی اساسی در نظریه حلقه های جابجایی دارند. ایده آل P از حلقه R را اول می نامند هر گاه $P \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in R$ ؛ اگر $ab \in I$، آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$. روش های متفاوتی وجود دارند که می توان مفهوم ایده آل اول را تعمیم داد. برای این منظور ما می توانیم جایی را که a, b(a یا b و ab) قرار می گیرند ، محدود کنیم یا گسترش دهیم.

ایده آل های اول ضعیف در سال ۲۰۰۳ توسط اندرسون و اسمیت نوشته شدند.[۲]. ایده آل های اولیه ضعیف وتقریباً اول هم در [۳] ,[۵] بررسی شدند.

این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم و قضایای مقدماتی می پردازیم. در فصل دوم مفهوم ایده آل های $\phi-$ اول را بیان کرده و قضایا و نتایجی را روی آن بررسی می کنیم. در فصل سوم این مفهوم را به مدول ها گسترش می دهیم و در فصل آخر ایده آل های $\phi-$۲- جاذب را بررسی می کنیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل مفاهیم و قضایای مقدماتی را که در فصل های دیگر پایان نامه به آن ها نیاز داریم، بیان می کنیم.

۱.۱. حلقه

تعریف ۱.۱.۱.

مجموعه غیر تهی R همراه با دو عمل دوتایی "$+$" و "$.$" ، که به ترتیب جمع و ضرب نامیده می شوند و معمولاً با نماد $(R,+,.)$ نمایش می دهند را یک حلقه گوییم، هرگاه:
(۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد.(عضو خنثی عمل جمع را با 0(صفر) نمایش می دهند).
(۲) عمل ضرب روی R خاصیت شرکت پذیری داشته باشد؛ یعنی برای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم:

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

(۳) عمل ضرب روی عمل جمع خاصیت پخشی داشته باشد؛ یعنی برای هر $a, b, c \in R$؛ داشته باشیم:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

نماد گذاری:

از این به بعد حرف R را برای حلقه $(R,+,.)$ در نظر گرفته و برای هر دو عضو a, b از R، ab را به جای $a.b$ در نظر می گیریم.

تعریف ۲.۱.۱.

حلقه R را یک حلقه یکدار می نامند، هر گاه R همراه با عمل ضرب دارای عضو همانی باشد. عضو همانی ضرب را با ۱ نشان داده و برای هر عضو a از R داریم:

$$a.1 = 1.a = a$$

تعریف ۱.۱.۳.
حلقه R را یک حلقه جابجایی می گوییم هر گاه برای هر $a,b\in R$، داشته باشیم $ab=ba$.

مثال ۱.۱.۴.
مجموعه اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی و اعداد مختلط همراه با جمع و ضرب معمولی حلقه هایی جابجایی و یکدار هستند.

در سراسر این پایان نامه R حلقه ای جابجایی و یکدار است.

تعریف ۱.۱.۵.
فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر $u\in R$ را یکه یا معکوس پذیر گوییم هر گاه یک $v\in R$ وجود داشته باشد که $uv=vu=1$. چنین v یکتاست و آن را با نماد u^{-1} نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۶.
فرض کنید R یک حلقه و $x\in R$. در این صورت x را مقسوم علیه صفر می نامند؛ هر گاه عضو غیر صفر $y\in R$ وجود داشته باشد که $xy=0$.

تعریف ۱.۱.۷.
حلقه R را حوزه صحیح می نامند، هر گاه برای هر $x,y\in R$، از $xy=0$ نتیجه شود $x=0$ یا $y=0$. به عبارت دیگر R حوزه صحیح است هر گاه فاقد مقسوم علیه صفر باشد.

تعریف ۱.۱.۸.
برای عدد طبیعی n فرض کنید $Z_n=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{n-1}\}$، مجموعه باقی مانده های اعداد صحیح به پیمانه n باشند؛ در این صورت Z_n، همراه با جمع و ضرب تعریف شده به صورت

$$\forall x,y\in Z_n,\qquad \overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$$

$$\forall x,y\in Z_n,\qquad \overline{x}.\overline{y}=\overline{xy}$$

یک حلقه بوده و به آن حلقه اعداد صحیح به پیمانه n می گویند.

تعریف ۱.۱.۹.
فرض کنید R یک حلقه دلخواه و x یک متغیر روی R باشد. در این صورت مجموعه

$R[x]=\{a_\circ+a_1x+\cdots+a_nx^n|a_i\in R, n\in N\cup\{\circ\}\}$ که متشکل از همه چند جمله ای های با ضرایب در R است؛ همراه با جمع و ضرب تعریف شده بوسیله

$$(a_\circ+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_\circ+b_1x+\cdots+b_mx^m)=$$

$$(a_\circ+b_\circ)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx_m$$

که در آن $n\leq m$؛ و

$$(a_\circ+a_1x+\cdots+a_nx^n)(b_\circ+b_1x+\ldots+b_mx_m)=\sum_{ij}c_{ij}x^{i+j}$$

که در آن $\circ\leq i\leq n$ و $\circ\leq j\leq m$ و $c_{ij}=a_\circ b_{i+j}+\cdots+a_{i+j}b_\circ$؛ یک حلقه است. این حلقه را حلقه چند جمله ای ها روی حلقه R می نامند؛ و اعضای $R[x]$ را چند جمله ای با ضرایب در R می نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱.
فرض کنید R یک حلقه دلخواه و x، یک متغیر روی R باشد. در این صورت مجموعه $R[[x]]=\{a_\circ+a_1x+\cdots|a_i\in R\}$، همراه با جمع و ضرب تعریف شده بوسیله

$$(a_\circ+a_1x+\cdots)+(b_\circ+b_1x+\cdots)=(a_\circ+b_\circ)+(a_1+b_1)x+\cdots$$

و

$$(a_\circ+a_1x+\cdots)(b_\circ+b_1x+\cdots)=a_\circ b_\circ+(a_\circ b_1+a_1b_\circ)x+\cdots$$

تشکیل یک حلقه می دهد، این حلقه را حلقه سری های توانی روی حلقه R می نامند و اعضای $R[[x]]$ را سری توانی با ضرایب در R می نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱.
عضو x از حلقه R را پوچ توان می نامند؛ هر گاه عدد طبیعی مثل n وجود داشته باشد که $x^n=\circ$.

تذکر ۱۲.۱.۱.
هر عضو پوچ توان مقسوم علیه صفر است؛ زیرا اگر n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $x^n=\circ$، آن

گاه $x.x^{n-1} = x^n = 0$. ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست؛ به عنوان مثال در حلقه Z_6 داریم $\overline{3}.\overline{2} = \overline{0}$. اما برای هر عدد طبیعی n داریم $\overline{3}^n = \overline{3}$.

تعریف ۱.۱.۱۳.

عضو x از حلقه R را خود توان گویند؛ هرگاه $x = x^2$.

تذکر ۱.۱.۱۴.

اگر حلقه R فقط شامل یک عضو باشد، آن را حلقه بدیهی می گویند. لذا R نابدیهی است اگر و تنها اگر R بیش از یک عضو داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵.

حلقه R را میدان می نامند؛ اگر R نا بدیهی بوده و هر عضو غیر صفر R یکه باشد.

تذکر ۱.۱.۱۶.

بدیهی است که هر میدان حوزه صحیح است؛ زیرا اگر $xy = 0$ و $x \neq 0$، آن گاه $x^{-1}(xy) = 0$ لذا $y = 0$. اما عکس آن درست نیست. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ حوزه صحیح است ولی میدان نیست.

تعریف ۱.۱.۱۷.

زیر مجموعه S از حلقه R را زیر مجموعه بسته ضربی یا به اختصار $m.c.s$ می نامند در صورتی که:

(۱) $1 \in S$.

(۲) S تحت عمل ضرب حلقه بسته باشد؛ یعنی اگر $x, y \in S$، آن گاه $xy \in S$.

(۳) $0 \notin S$.

مثال ۱.۱.۱۸.

مجموعه اعداد طبیعی زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه اعداد صحیح می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹.

فرض کنید R یک حلقه و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. رابطه "$\sim$" را روی حاصل ضرب دکارتی $R \times S$ بدین صورت تعریف می کنیم که $(r, s) \sim (r', s')$ اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $t(rs' - r's) = 0$. به سادگی می توان دید که رابطه "$\sim$" روی $R \times S$ یک رابطه هم ارزی است. حال کلاس هم ارزی $[(r, s)]$ را با علامت $\frac{r}{s}$ نشان می

دهیم و مجموعه تمام کلاس های هم ارزی را با $S^{-1}R$ نمایش می دهیم. لذا داریم:

$$S^{-1}R = \{\frac{r}{s} | r \in R, s \in S\}$$

ضرب و جمع را روی $S^{-1}R$ چنین تعریف می کنیم:

$$\frac{r_1}{s_1}.\frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

و

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$

به سادگی می توان دید که عمل جمع و ضرب فوق روی $S^{-1}R$ خوش تعریف است و $S^{-1}R$ همراه با این دو عمل تشکیل یک حلقه جابجایی و یکدار می دهد؛ که در آن $0_{S^{-1}R} = \frac{0}{1}$ و $1_{S^{-1}R} = \frac{1}{1}$.
با توجه به تعریف کلاس هم ارزی به راحتی نتیجه می شود که برای هر $s \in S$، داریم $\frac{0}{s} = \frac{0}{1}$ و $\frac{s}{s} = \frac{1}{1}$.
حلقه $S^{-1}R$ را حلقه کسر های R نسبت به S می نامند و با نماد $T(R)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۱.۲۰.

اگر R یک حوزه صحیح و $S = R \setminus \{0\}$، آن گاه $S^{-1}R$ میدان است که آن را میدان خارج قسمتی R می نامند. و آن را با نماد K نشان می دهیم.

مثال ۱.۱.۲۱.

اگر $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح و $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ در نظر بگیریم، آن گاه $Q = S^{-1}\mathbb{Z}$ میدان اعداد گویا می باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲.

زیر مجموعه غیر تهی S از R را یک زیر حلقه R می نامند، هر گاه S با همان اعمال جمع و ضرب حلقه R خود تشکیل یک حلقه بدهد.

قضیه ۱.۱.۲۳.(محک فشرده)

فرض کنید R یک حلقه و S یک زیر مجموعه غیر تهی از R باشد؛ در این صورت S زیر حلقه R است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\forall a, b \in S, \quad a - b \in S \tag{1}$$

$$\forall a,b \in S, \qquad ab \in S \qquad (۲)$$

اثبات: بدیهی است. ■

تعریف ۲۴.۱.۱.

زیر مجموعه غیر تهی I از حلقه R را یک ایده آل از R می نامند؛ هر گاه به ازای هر $x,y \in I$ و $r \in R$ داشته باشیم: $x-y \in I$ و $rx \in I$.

تذکر ۲۵.۱.۱.

چون R یکدار است، لذا برای هر $x \in I$ داریم $-x = (-۱_R)x = -x \in I$. بنابراین در تعریف فوق $x-y \in I$ را می توان با $x+y \in I$ عوض کرد.

تعریف ۲۶.۱.۱.

فرض کنید I یک ایده آل از R باشد؛ در این صورت I را ایده آل محض R می نامند؛ هر گاه $I \neq R$.$(۱_R \notin I)$.

نماد گذاری:

در سراسر این پایان نامه مجموعه ایده آل های محض حلقه R را با نماد $I^*(R)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۱.

اگر I یک ایده آل حلقه R باشد؛ منظور از $S^{-۱}I = I_S$، مجموعه زیر است:

$$S^{-۱}I = \{\frac{r}{s} | \ r \in I, s \in S\}$$

تعریف ۲۸.۱.۱.

انتقال از R به R_P برای یک ایده آل اول P از R را موضعی کردن حلقه R در P گویند. به عبارت دیگر اگر R یک حلقه و P ایده آل اول باشد؛ در این صورت $R_P = S^{-۱}R$ است که در آن $S = R - P$؛ و حلقه R_P موضعی است با ایده آل ماکسیمال

$$m = \{\frac{r}{s} \ | r \in P, s \in S = R - P\}$$

تذکر ۲۹.۱.۱.

اگر I و J ایده آل های حلقه R باشند، آن گاه $I+J$ هم ایده ال حلقه R است و داریم:

$$I+J=\{i+j|\, i\in I, j\in J\}$$

تعریف ۳۰.۱.۱.

اگر X زیر مجموعه ای از حلقه R باشد؛ در این صورت مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی به صورت $r_۱x_۱+r_۲x_۲+\cdots+r_nx_n$ را که در آن $r_i\in R$ و $x_i\in X$ می باشد؛ ایده آل تولید شده توسط X می نامند. در صورتی که $X=\emptyset$ باشد؛ ایده آل تولید شده توسط X را بنابر قرارداد ایده آل صفر در نظر می گیرند و اگر X متناهی باشد؛ مثلاً $X=\{x_۱,x_۲,\cdots,x_n\}$، در این صورت ایده آل تولید شده توسط X را با علامت زیر به کار می برند:

$$<x_۱,x_۲,\cdots,x_n>=Rx_۱+Rx_۲+\cdots+Rx_n$$

تعریف ۳۱.۱.۱.

در تعریف بالا اگر X تک عضوی باشد؛ مثلاً $X=\{x\}$، در این صورت ایده آل تولید شده توسط X را با Rx نشان می دهند و ایده آل اصلی تولید شده توسط X می خوانند و داریم

$$<x>=\{rx|\, r\in R\}$$

تعریف ۳۲.۱.۱.

اگر I وJ ایده ال های حلقه R باشند؛ ایده آل تولید شده توسط $\{xy|x\in I, y\in J\}$ را با علامت IJ نمایش می دهیم و آن را حاصل ضرب دو ایده آل I و J می نامیم پس داریم:

$$IJ=\{\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i\,|\, x_i\in I, y_i\in J\}$$

تعریف ۳۳.۱.۱.

فرض کنید R یک حلقه و I ایده آلی از حلقه R باشد. رابطه "$\sim$" را روی R چنین تعریف می کنیم:

$$\forall a,b\in R:\ a\sim b\Longleftrightarrow a-b\in I$$

به راحتی دیده می شود که رابطه "$\sim$" روی R یک رابطه هم ارزی است. یعنی هر سه خاصیت انعکاسی، تقارن و تعدی را دارد. بنابر این می توان کلاس های هم ارزی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$[a] = \{b \in R \,|\, a \sim b\} = \{b \in R \,|\, b - a \in I\} = \{b \in R \,|\, b \in a + I\} = a + I$$

که در آن $a + I = \{a + i \,|\, i \in I\}$. حال کلیه کلاس های هم ارزی را در یک مجموعه ریخته و نامی برای آن انتخاب می کنیم؛ فرض کنید نام آن $\frac{R}{I}$ باشد، پس داریم:

$$\frac{R}{I} = \{[a] \,|\, a \in R\} = \{a + I \,|\, a \in R\}$$

حال دو عمل «'+» و «'.» را روی مجموعه $\frac{R}{I}$ بدین صورت تعریف می کنیم:

$$.' : \frac{R}{I} \times \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{I}$$

$$.'(a + I, b + I) = ab + I$$

و

$$+' : \frac{R}{I} \times \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{I}$$

$$+'(a + I, b + I) = a + b + I$$

به راحتی دیده می شود که این دو عمل خوش تعریف هستند و $\frac{R}{I}$ همراه با این دو عمل تشکیل یک حلقه می دهد. حلقه $(\frac{R}{I}, +', .')$ را حلقه خارج قسمتی می نامند؛ که برای راحتی کار «'+» و «'.» را با «+» و«.» نشان می دهیم. البته باید توجه داشت که «'+» و «'.» عمل بین کلاس های هم ارزی است؛ که ما برای راحتی کار با«+» و «.» نشان می دهیم.

تذکر ۱.۱.۳۴.
صفر حلقه $\frac{R}{I}$؛ I و یک آن $1_R + I$ می باشد.

تعریف ۱.۱.۳۵.
ایده آل m از حلقه R را ماکسیمال می نامند؛ در صورتی که $m \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل I از R؛ اگر $m \subseteq I$، آن گاه $I = R$ یا $m = I$.

قضیه ۱.۱.۳۶.
ایده آل محض m از حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{m}$ میدان باشد.

اثبات: رجوع کنید به [۱۰ قضیه ۱.۴.۲]. ■

تعریف ۱.۱.۳۷.
حلقه R را موضعی می نامند؛ هرگاه فقط یک ایده آل ماکسیمال اشته باشد.

مثال ۱.۱.۳۸.
فرض کنید K یک میدان و $R = K[[x]]$ حلقه سری های توانی روی میدان K باشد. در این صورت R یک حلقه موضعی است؛ با ایده آل ماکسیمال $< x >$.

قضیه ۱.۱.۳۹.
فرض کنید R یک حلقه باشد و $m \neq R$، یک ایده آل از R به طوری که اگر $x \in R \setminus m$، آن گاه x یکه است. در این صورت R یک حلقه موضعی است و m تنها ایده ال ماکسیمال حلقه R است.

اثبات: رجوع کنید به [۱۰، قضیه ۱.۴.۲۱]. ■

قضیه ۱.۱.۴۰.
فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:
(۱) R یک حلقه موضعی است؛
(۲) مجموعه m شامل غیر یکه ها یک ایده آل محض از حلقه R است؛
(۳) R موضعی و مجموعه m شامل غیر یکه ها تنها ایده آل ماکسیمال حلقه R است.

اثبات: رجوع کنید به [۱۰، قضیه ۱.۴.۲۴]. ■

تعریف ۱.۱.۴۱.

اگر I و J دو ایده آل از حلقه R باشند؛ آن گاه ایده آل حاصل تقسیم I بر J را با نماد $(I:J)$ نشان می دهیم؛ و داریم:

$$(I:J)=\{x\in R\,|\,xJ\subseteq I\}$$

تعریف ۴۲.۱.۱.
اگر I ایده آل صفر باشد، یعنی $I=\{0\}$؛ در این صورت $(0:J)$ را پوچ ساز ایده آل J می نامند و با نماد $Ann(J)$ نشان می دهیم و داریم:

$$(0:J)=\{x\in R\,|\,xJ=0\}$$

تذکر ۴۳.۱.۱.
اگر J برابر با ایده آل اصلی تولید شده توسط $x\in R$ باشد؛ یعنی $J=<x>$، در این صورت به جای نمایش $(I:J)=(I:<x>)$، از نمایش $(I:x)$ استفاده می کنیم. همچنین اگر $J=<x>$ و $I=0$ ، آن گاه داریم:

$$(I:J)=(0:<x>)=(0:x)=Ann_R(x)$$

لم ۴۴.۱.۱.
اگر R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد؛ هر ایده آل متناهی تولید شده‌اش اصلی است و توسط یک خود توان به وجود می آید.

لم ۴۵.۱.۱.
اگر I و J ایده آل های حلقه R باشند؛ آن گاه $(I:J)$ نیز یک ایده آل حلقه R می باشد. لذا برای هر $x\neq 0$، $Ann(x)$ یک ایده آل محض از حلقه R است.

تذکر ۴۶.۱.۱.
توجه شود که $(I:J)$ ایده آلی از R است، اما $\frac{I}{J}$ ایده آلی از حلقه $\frac{R}{J}$ است. و همواره داریم $I\subseteq(I:J)$.

تعریف ۴۷.۱.۱.

حلقه R را منظم فون نویمان می نامند؛ هر گاه برای هر $a \in R$، یک $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $axa = a$.

مثال ۴۸.۱.۱.

حلقه R را حلقه بولی می نامند، هر گاه هر عضو $x \in R$ خود توان باشد ($x^{2} = x$). حلقه های بولی منظم فون نویمان هستند.

تعریف ۴۹.۱.۱.

فرض کنید I یک ایده آل از حلقه R باشد؛ رادیکال ایده آل I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان می دهیم و تعریف می کنیم:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \,|\, x^n \in I,\, \exists\, n \in N\}$$

تعریف ۵۰.۱.۱.

ایده آل P از حلقه R را اول می نامند، هرگاه $P \in I^*(R)$، و برای هر $a, b \in R$؛ اگر $ab \in P$، آن گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

قضیه ۵۱.۱.۱.

ایده آل P از حلقه R اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد.

اثبات: رجوع کنید به [۱۰، قضیه ۱.۴.۱]. ■

همان طور که در مقدمه بیان شد ما می توانیم با محدود کردن و یا گسترش دادن جایی که a, b قرار می گیرند؛ به مفاهیم ایده آل اول ضعیف، تقریباً اول، اول قوی، نیم اول و اولیه دست یافت. ابتدا جایی را که a, b قرار می گیرند گسترش می دهیم؛ تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵۲.۱.۱.

فرض کنید R یک حوزه صحیح و K میدان خارج قسمتی آن باشد. در این صورت ایده آل I از حلقه R را اول قوی می نامند؛ هر گاه برای هر $a, b \in K$؛ اگر $ab \in I$، آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تذکر ۵۳.۱.۱.

توجه شود که در همه تعاریفی که برای حالت قوی بیان می شود؛ در حلقه هایی که دارای مقسوم علیه صفر هستند؛ $T(R)$ جایگزین K می شود.

تعریف ۵۴.۱.۱.

ایده آل I از حلقه R را اولیه می نامند؛ هرگاه $I \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in R$ که $a \notin \sqrt{I}$، اگر $ab \in I$ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۵۵.۱.۱.

ایده آل I از حلقه R را اولیه قوی می نامند؛ هر گاه $I \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in K$، که $a \notin \sqrt{I}$، اگر $ab \in I$ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۵۶.۱.۱.

ایده آل I از حلقه R را نیم اول می نامند؛ هر گاه $I \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in R$، که $a = b$، اگر $ab \in I$ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۵۷.۱.۱.

ایده آل I از حلقه R را نیم اول قوی می نامند؛ هر گاه $I \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in K$، که $a = b$، اگر $ab \in I$ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۵۸.۱.۱.

ایده آل I از حلقه R را اول ضعیف می نامند؛ هر گاه $I \in I^*(R)$ و برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in I - \{o\}$؛ آن گاه $a \in I$ یا $b \in I$.