دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب و تعمیم های آن برای حل دستگاه معادلات خطی

استاد راهنما:

خانم دکتر فائزه توتونیان

استاد مشاور:

آقای دکتر علیرضا سهیلی

نگارنده:

داود هزاری

مرداد ۱۳۹۰

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب و تعمیم های آن برای حل دستگاه معادلات خطی

نام نویسنده: داود هزاری

نام استاد(ان) راهنما: دکتر فائزه توتونیان

نام استاد(ان) مشاور: دکتر علیرضا سهیلی

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه: ریاضی کاربردی**	**رشته تحصیلی: آنالیز عددی**
تاریخ تصویب: ۸۹/۰۹/۱۵		**تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۰۴/۱۲**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	**دکتری ○**	**تعداد صفحات: ۸۵**

چکیده رساله/پایان نامه :

دستگاه

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $x, b\epsilon\mathbb{C}^{n}$ یک ماتریس تنک بزرگ و معین مثبت غیر هرمیتی است. هدف از انجام این پایان نامه معرفی روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب و بیان تعمیم های آن است که مبتنی بر ایجاد یک شکاف نرمال و هرمیتی اریب در ماتریس ضرایب می باشد.

روش تکراری HSS که مبتنی بر ایجاد شکاف هرمیتی و هرمیتی اریب در ماتریس ضرایب است اولین بار در سال ۲۰۰۲ برای حل دستگاههای خطی غیر هرمیتی و معین مثبت $Ax = b$ توسط بای، گلوب و انجی مطرح شد. در سال ۲۰۰۷ بای، گلوب و انجی تکنیک ساخت روش تکراری HSS را به روش تکراری NSS تعمیم داده و یک طرح تسریع SOR برای روش تکراری NSS مطرح کردند. در سال ۲۰۰۸ طرح تسریع SOR تعمیم یافته (GSOR) برای روش تکراری NSS توسط منگ و وو ارائه گردید.

در این پایان نامه به بررسی روشهای تکراری HSS و NSS پرداخته و شرایط همگرایی و نحوهٔ پیاده سازی آنها را مورد بررسی قرار خواهیم داد و سپس طرحهای تسریع SOR و GSOR را برای روشهای HSS/NSS استفاده خواهیم کرد و با مثال عددی به بررسی کارائی این طرحهای تسریع و مقایسه آنها خواهیم پرداخت و در پایان روش متفاوت دیگری جهت تسریع روش تکراری NSS به کار می گیریم، که روش تکراری ANSS نامیده می شود و با مثال عددی نشان می دهیم که روش ANSS بهتر و یا حداقل به خوبی روش NSS عمل می کند.

کلید واژه:	**امضای استاد راهنما:**
۱. ماتریس هرمیتی	
۲. ماتریس هرمیتی اریب	
۳. ماتریس نرمال	
۴. روش تکراری مبتنی بر شکاف	**تاریخ:**
۵. روش SOR	

فهرست مندرجات

پیش گفتار

دستگاه

$$Ax = b, \qquad (۱.۰)$$

را در نظر بگیرید که در آن $x, b \in \mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس تنک بزرگ و غیر هرمیتی معین مثبت است.

هدف از انجام این پایان نامه معرفی روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب و بیان تعمیم‌های آن برای حل دستگاه (۱.۰) است که مبتنی بر ایجاد شکاف نرمال و هرمیتی اریب در ماتریس ضرایب می‌باشد.

روش تکراری HSS[۱] که مبتنی بر ایجاد شکاف هرمیتی و هرمیتی اریب برای ماتریس ضرایب است اولین بار در سال ۲۰۰۲ برای حل دستگاه‌های خطی غیر هرمیتی و معین مثبت (۱.۰) توسط بای[۲]، گلوب[۳] و انجی[۴] مطرح شد [۲]. سپس روش تکراری HSS به خاطر شکل زیبا و کارائی بسیار خوب آن مورد توجه بسیاری قرار گرفت. در سال ۲۰۰۷ بای، گلوب و انجی تکنیک ساخت روش تکراری HSS را به روش تکراری NSS[۵] تعمیم داده و یک طرح تسریع SOR برای روش تکراری NSS مطرح کردند [۳]. در سال ۲۰۰۸ طرح تسریع SOR تعمیم یافته ($GSOR$[۶]) برای روش تکراری NSS توسط منگ[۷] و وو[۸] مورد بررسی

---

[۱] Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Method
[۲] Z. Z. Bai
[۳] G. H. Gloub
[۴] M. K. Ng
[۵] Normal and Skew-Hermitian Splitting Method
[۶] Generalized Successive-Overrelaxation
[۷] L. L. Meng
[۸] Y. J. Wu

قرار گرفت [۱۰].

هدف از انجام این پایان نامه بررسی جامعی از روشهای تکراری HSS، NSS و $ANSS$[۹] می‌باشد. ابتدا به تفضیل این روشها و شرایط همگرایی و نحوهٔ پیاده سازی آن‌ها را مورد بررسی قرار خواهیم داد و سپس طرح‌های تسریع SOR و $GSOR$ را برای روشهای NSS/HSS استفاده خواهیم کرد و به بررسی کارائی این طرح‌های تسریع و مقایسه آنها خواهیم پرداخت. این پایان نامه به صورت زیر تنظیم شده است:

در فصل اول به معرفی و تعریف برخی از مفاهیم و قضایایی که در فصلهای بعد مورد استفاده است می‌پردازیم، در فصل دوم روش تکراری شکاف هرمیتی و هرمیتی اریب و روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب که به ترتیب مبتنی بر ایجاد شکاف هرمیتی و هرمیتی اریب و شکاف نرمال و هرمیتی اریب در ماتریس ضرایب است را بررسی می‌کنیم، در ادامه نشان می‌دهیم که روشهای تکراری HSS و NSS بدون هیچ شرطی به جواب دستگاه همگرا است، و همچنین کران بالایی برای عامل انقباض روش تکراری HSS وNSS ارائه می‌دهیم که به ترتیب به شعاع طیفی قسمت هرمیتی ماتریس ضرایب و شعاع طیفی ماتریس شکاف نرمال بستگی دارد. در فصل سوم طرح‌های تسریع SOR و $GSOR$ را برای روش تکراری NSS بررسی می‌کنیم و شرایط همگرایی را برای این طرح‌های تسریع بیان خواهیم کرد. در فصل چهارم روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب تسریع یافته را که مبتنی بر ایجاد شکاف نرمال و هرمیتی اریب در ماتریس ضرایب است را بررسی می‌کنیم و در ادامه شرایط همگرایی روش $ANSS$ را مطرح می‌کنیم.

---
[۹] Accelerated Normal and Skew-Hermitian Splitting Method

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اساسی

در این فصل به ارائهٔ مقدمات، مفاهیم، تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعهٔ همهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A طیف ماتریس A نامیده می‌شود و با $Spect(A)$ نمایش داده می‌شود. همچنین شعاع طیفی ماتریس مربعی A برابر بزرگترین ویژهٔ A از لحاظ قدر مطلق است و با $\rho(A)$ نمایش داده می‌شود. یعنی:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \lambda_i \mid$$

تعریف ۲.۱.۱ نرم برداری یک تابع $\|.\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ است که به هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ یک عدد حقیقی $\|x\|$ نسبت می‌دهد و شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\|x\| \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$.

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$.

تعریف ۳.۱.۱ نرم ماتریسی یک تابع $\|.\| : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ است که به هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ یک عدد حقیقی $\|A\|$ نسبت می‌دهد و شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\|A\| \geq 0$ برای هر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $\|A\| = 0$ اگر و فقط اگر $A = O$.

۲) $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ برای هر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$.

۳) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ برای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

تعریف ۴.۱.۱ نرم ماتریسی $\|.\|$ برای ماتریسهای $m \times n$، با نرمهای برداری $\|.\|_m$ و $\|.\|_n$ به ترتیب از $\mathbb{C}^m$ و $\mathbb{C}^n$ سازگار نامند هرگاه:

$$\|Ax\|_m \leq \|A\| \; \|x\|_n$$

که در آن $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

تعریف ۵.۱.۱ نرم ماتریسی $\|.\|$ برای ماتریسهای مربعی $n \times n$، زیرضربی[1] (تحت ضربی) نامیده می‌شود هرگاه:

$$\|AB\| \leq \|A\| \; \|B\| \qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

تعریف ۶.۱.۱ برای یک نرم برداری مفروض $\|.\|$ و برای ماتریسهای مربعی، نرم طبیعی ماتریسی یا نرم وابسته ماتریسی که با نماد $lub(A)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$lub(A) = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

تعریف ۷.۱.۱ برای نرم وابسته ماتریسی A یعنی $lub(A)$، عدد $lub(A) \times lub(A^{-1})$ عدد شرطی[2] ماتریس A نامیده و با نماد $cond(A)$ نمایش داده می‌شود. یعنی داریم:

$$cond(A) = lub(A) \times lub(A^{-1})$$

اصولا برای هر نرم ماتریسی مفروض مانند $\|.\|$، عدد شرطی ماتریس A به صورت زیر نیز تعریف می‌شود:

$$cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$$

[1] Submultiplicative
[2] Condition Number

تعریف ۸.۱.۱ [۱۱] ماتریس بلوکی $\begin{pmatrix} A_{r\times r} & C_{r\times s} \\ R_{s\times r} & B_{s\times s} \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. وقتی که ماتریس A و B نامنفرد باشند آنگاه ماتریس S و T که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$S = B - RA^{-1}C \quad \text{و} \quad T = A - CB^{-1}R$$

به ترتیب مکمل شور نسب به A و B نامیده می‌شوند.

۲.۱ روشهای تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

برای حل دستگاه

$$Ax = b \tag{۱.۱}$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و b یک ماتریس ۱ $\times n$ است، اگر A وارون‌پذیر باشد در این صورت برای n بزرگ، محاسبه‌ی A^{-1} بسیار طولانی و برای n بزرگ عملی نیست. لذا برای حل دستگاه (۱.۱) از روشهای تکراری استفاده می‌کنیم. محاسبات را با یک حدس اولیهٔ $x^{(0)}$ آغاز می‌کنیم و تا آنجا ادامه می‌دهیم که به تقریب قابل قبولی از جواب دست یابیم. در روشهای تکراری، ماتریس B، $n \times n$ را به گونه‌ای می‌سازیم که دنباله‌ی $\{x^{(i)}\}_{i\in N}$ به دست آمده از رابطهٔ

$$x^{(i+1)} = Bx^{(i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

به بردار $\hat{x}$، جواب دستگاه (۱.۱)، همگرا باشد، یعنی:

$$\lim_{i\to\infty} x^{(i+1)} = \hat{x}$$

توجه داریم که $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ و B را ماتریس تکرار نامند. برای ساختن روش تکراری برای معادله مٔاتریسی $Ax = b$، یک ماتریس وارون‌پذیر B در نظر می‌گیریم و معادله مٔذکور را به صورت $Bx + (A - B)x = b$ می‌نویسیم. اکنون رابطه‌ی تکراری زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$Bx^{(i+1)} + (A - B)x^{(i)} = b \tag{۲.۱}$$

با حل معادلهٔ (۲.۱) نسبت به $x^{(i+1)}$ داریم:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - B^{-1}(Ax^{(i)} - b) = (I - B^{-1}A)x^{(i)} + B^{-1}b \tag{۳.۱}$$

برای رده‌ی مهمی از روشهای تکراری، ماتریس B را به کمک شکاف دادن ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$، که نامنفرد و همه درایه‌های قطری آن ناصفر می‌باشند، به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$A = D - E - F$$

که در آن $D = (d_{ii})$ یک ماتریس قطری است به طوری که $d_{ii} = -a_{ii}$ ، و $E = (e_{ij})$ یک ماتریس پایین مثلثی اکید است به‌طوری که $e_{ij} = -a_{ij}$ برای $i > j$ و $F = (f_{ij})$ یک ماتریس بالا مثلثی اکید است به طوری که $f_{ij} = -a_{ij}$ برای $i < j$. در روشهای تکراری نیاز به آزمون توقف داریم که آزمونهای زیر از آن جمله‌اند:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon,$$

$$\|Ax^{(k+1)} - b\| < \varepsilon,$$

و یا

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon,$$

$$\frac{\|Ax^{(k+1)}-b\|}{\|b\|}<\varepsilon,$$

در عمل یکی از این آزمونها انتخاب می‌گردد.

اکنون به ارائهٔ برخی از روشهای تکراری مهم می‌پردازیم.

۱)روش تکراری ژاکوبی[۳]

در روش ژاکوبی که آن را روش گام کامل نیز می‌نامند، در رابطه‌ی (۳.۱) قرار می دهیم: $B=D$. لذا ماتریس تکرار به صورت

$$J=I-B^{-1}A=D^{-1}(E+F)$$

است و رابطه‌ی تکراری برای درایه‌های $x^{(i)}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x_j^{(i+1)}=\frac{1}{a_{jj}}(b_j-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{jk}x_k^{(i)}),\qquad j=1,2,\dots,n\qquad i=0,1,2,\dots$$

۲)روش تکراری گوس-سایدل[۴]

در این روش که آن را روش تک‌گام نیز می‌نامند، در رابطه‌ی (۳.۱) قرار می‌دهیم: $B=D-E$. لذا ماتریس تکرار به صورت

$$H=I-B^{-1}A=I-(D-E)^{-1}A$$

است و رابطه‌ی تکراری برای درایه‌های $x^{(i)}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x_j^{(i+1)}=\frac{1}{a_{jj}}(b_j-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}x_k^{(i+1)}-\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}x_k^{(i)}),\quad j=1,2,\dots,n\qquad i=0,1,2,\dots$$

[۳] Jacobi Method

[۴] Gauss-Siedel Method

۳)روش تکراری SOR[۵]

در این روش، در رابطه‌ی (۳.۱) قرار می‌دهیم: $B = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$، که در آن $\omega \neq 0$ می‌باشد. لذا ماتریس تکرار به صورت

$$L_\omega = (D - \omega E)^{-1}(\omega F + (1 - \omega)D)$$

است و رابطه‌ی تکراری برای درایه‌های $x^{(i)}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \frac{\omega}{a_{jj}}(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j}^{n} a_{jk}x_k^{(i)}), \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

تذکر: اگر A یک ماتریس مختلط $n \times n$ به صورت

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix}$$

باشد، که در آن عناصر $A_{i,j}$، $i = 1, 2, \dots, p$، $j = 1, 2, \dots, p$، ماتریس هستند و بعلاوه ماتریسهای $A_{i,i}$، $i = 1, 2, \dots, p$، مربعی می‌باشند، آنگاه با شکاف ماتریس A به صورت $A = D - E - F$، که در آن

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & & & \\ & A_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{p,p} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad -E = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ A_{2,1} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$-F = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} & \dots & A_{1p} \\ & 0 & \dots & A_{2,p} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه با فرض این که $A_{i,i}$ها، $1 \leq i \leq p$، ماتریسهای وارون پذیر باشند، مشابه با حالت اسکالر، روشهای تکراری ژاکوبی بلوکی، گوس-سایدل بلوکی و SOR بلوکی تعریف می‌شوند.

[۵] Successive over-Relaxation Method

۳.۱ همگرایی روشهای تکراری

در این بخش قضایا و تعاریفی که مربوط به همگرایی روشهای تکراری ژاکوبی، گوس-سایدل و SOR است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۱ [۱۳] (الف) روش تکراری $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$ همگرا است اگر و فقط اگر $\rho(T) < 1$.

(ب) برای همگرایی روش تکراری $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$ کافی است که برای یک نرم طبیعی دلخواه داشته باشیم $\|T\| < 1$.

تعریف ۲.۳.۱ [۱۵] فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$، $n \geq 2$، باشد. ماتریس A به طور ضعیف دوری از اندیس $k(> 1)$ نامیده می‌شود اگر یک ماتریس جایگشت P موجود باشد به طوری که PAP^T به شکل زیر باشد

$$PAP^T = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & A_{1,k} \\ A_{2,1} & O & \dots & O & O \\ O & A_{3,2} & \ddots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{k,k-1} & O \end{bmatrix}$$

که در آن زیر ماتریسهای قطری صفر، مربعی هستند.

تعریف ۳.۳.۱ [۱۵] فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$، $n \geq 2$، افراز شده به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} \qquad (۴.۱)$$

که در آن زیر ماتریسهای قطری $A_{i,i}$، $1 \leq i \leq N$، مربعی و نامنفرد هستند. اگر ماتریس تکرار روش ژاکوبی بلوکی برای ماتریس A، یعنی $J = D^{-1}(E+F)$، به طور ضعیف دوری از اندیس $p(\leq 2)$ باشد، آنگاه A را نسبت به افرازی به شکل (۴.۱)، p—دوری می‌نامند.

تعریف ۴.۳.۱ [۱۵] اگر ماترس بلوکی A، p—دوری باشد، آنگاه ماتریس A را مرتب سازگار نامیم اگر همه مقادیر ویژه ماتریس $B(\alpha) = \alpha L + \alpha^{-(p-1)}U$، برای $\alpha \neq 0$ مستقل از α باشد، که در آن $L = D^{-1}E$ و $U = D^{-1}F$ است.

قضیه زیر برای ماتریسهای بلوکی p—دوری در مرجع [۱۵] اثبات شده است.

قضیه ۵.۳.۱ فرض کنید ماتریس بلوکی A(به شکل (۴.۱))، یک ماتریس مرتب سازگار p—دوری با زیر ماتریسهای قطری نامنفرد $A_{i,i}$، $1 \leq i \leq N$، باشد. اگر $\omega \neq 0$ و λ یک مقدار ویژه غیر صفر ماتریس تکرار روش SOR بلوکی، یعنی $L_\omega = (D-\omega E)^{-1}(\omega F + (1-\omega)D)$، و اگر μ در رابطه زیر صدق کند

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1}\omega^p\mu^p \qquad (5.1)$$

آنگاه μ یک مقدار ویژه ماتریس تکرار روش ژاکوبی بلوکی، یعنی $J = D^{-1}(E+F)$، است. برعکس اگر μ یک مقدار ویژه ماتریس J و λ در رابطه (۵.۱) صدق کند، آنگاه λ یک مقدار ویژه ماتریس L_ω است.

قضایای زیر برای ماتریسهای ۲ـدوری در مرجع [۱۷] اثبات شده‌اند.

قضیه ۶.۳.۱ اگر A یک ماتریس مرتب سازگار با عناصر قطری غیر صفر باشد، به طوری که ماتریس تکرار روش ژاکوبی، یعنی $J = D^{-1}(E+F)$، دارای مقادیر ویژه حقیقی باشد، آنگاه $\rho(L_\omega) < 1$ اگر و فقط اگر $0 < \omega < 2$ و $\rho(J) < 1$. (L_ω ماتریس تکرار روش SOR است)

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنید A یک ماتریس مرتب سازگار با عناصر قطری غیر صفر باشد. اگر برخی از مقادیر ویژه ماتریس تکرار ژاکوبی، یعنی $J = D^{-۱}(E+F)$، مختلط باشند، روش SOR همگرا است اگر برای عدد مثبتی مانند τ و هر مقدار ویژه $\mu = \delta + i\beta$ از ماتریس J، نقطه (δ, β) در درون بیضی

$$\vartheta(۱, \tau) := \{(\delta, \beta) \;:\; \delta^۲ + \frac{\beta^۲}{\tau^۲} = ۱\}$$

قرار گیرد و ω در رابطه زیر صدق کند

$$\circ < \omega < \frac{۲}{۱+\tau} \qquad (٦.۱)$$

برعکس، اگر روش SOR همگرا باشد، آنگاه همه مقادیر ویژه ماتریس J، برای $\tau > \circ$ای، درون بیضی $\vartheta(۱,\tau)$ قرار می‌گیرند. علاوه بر این، اگر μای درون بیضی $\vartheta(۱,\tau)$ قرار گیرد و اگر روش SOR همگرا باشد آنگاه رابطه (٦.۱) برقرار است.

فصل ۲

روشهای تکراری شکاف هرمیتی-هرمیتی اریب و نرمال-هرمیتی اریب

۱.۲ مقدمه

دستگاه

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad x, b \in \mathbb{C}^n \tag{۱.۲}$$

را در نظر بگیرید که در آن A یک ماتریس تنک بزرگ و غیر هرمیتی معین مثبت است.

در این فصل روش تکراری شکاف هرمیتی و هرمیتی اریب (HSS[۱])، مبتنی بر شکاف ماتریس ضرایب A به دو قسمت هرمیتی و هرمیتی اریب، و نیز روش تکراری شکاف نرمال و هرمیتی اریب (NSS[۲])، مبتنی بر شکاف ماتریس ضرایب A به دو قسمت نرمال و هرمیتی اریب، برای حل دستگاه معادلات خطی(۱.۲) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تجزیه و تحلیل نظری نشان می‌دهد که روش‌های HSS و NSS بدون هیچ شرطی به جواب منحصر به فرد دستگاه معادلات (۱.۲) همگرا هستند. علاوه براین، در [۲] و [۳] به ترتیب یک کران بالا برای عامل انقباض روش HSS و NSS ارائه شده است که این عامل برای روش HSS تنها به شعاع طیفی قسمت هرمیتی A و برای روش NSS تنها به شعاع طیفی قسمت نرمال شکاف A وابسته بوده و مستقل از قسمت هرمیتی اریب A است.

۲.۲ روش تکراری HSS

در بسیاری از مسائل با حل دستگاه $Ax = b$ روبرو می‌شویم، که در این مسائل A یک ماتریس تنک بزرگ و غیر هرمیتی معین مثبت است. برای حل دستگاه فوق با روشهای تکراری، ابتدا باید شکاف مناسبی (مشابه روشهای ژاکوبی و گوس سایدل و غیره) برای ماتریس A اختیار

[۱] Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Method

[۲] Normal and Skew-Hermitian Splitting Method

شود. به طور طبیعی هر ماتریس A دارای یک شکاف هرمیتی-هرمیتی اریب (HS) به صورت زیر می‌باشد[۱۶، ۴، ۱]

$$A = H + S \qquad (۲.۲)$$

که در آن ماتریسهای H و S به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$H = \frac{۱}{۲}(A + A^H), \qquad S = \frac{۱}{۲}(A - A^H)$$

و A^H ترانهاده هرمیتی ماتریس A است.

حال برای حل دستگاه $Ax = b$، به بررسی روش تکراری HSS که مبتنی بر چنین شکافی است، می‌پردازیم.

روش تکراری HSS

حدس اولیه $x^{(۰)} \in \mathbb{C}^n$ مفروض است. تا هنگامی که دنباله $\{x^{(k)}\}$، برای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، همگرا شود محاسبه کنید

$$(\alpha I + H)x^{(k+\frac{۱}{۲})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b$$

$$(\alpha I + S)x^{(k+۱)} = (\alpha I - H)x^{(k+\frac{۱}{۲})} + b$$

که α یک ثابت مثبت و مفروض است.

روش HSS یک روش تکراری است که در هر تکرار بین H، قسمت هرمیتی A، و S، قسمت هرمیتی اریب A، به طور متناوب حرکت کرده و دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ را تولید می‌کند. البته در این روش می‌توان نقش H و S را عوض کرد، یعنی ابتدا دستگاه خطی با ضریب $(\alpha I + S)$ و سپس دستگاه خطی با ضریب $(\alpha I + H)$ را حل کرد.

۳.۲ آنالیز همگرایی روش تکراری HSS

در این بخش ما به مطالعه آنالیز همگرایی روش HSS می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که این روش را می‌توان به عنوان یک روش تکراری شکاف دو گامی تعمیم داد. و لم زیر یک معیار کلی را برای همگرایی یک روش تکراری دو گامی توصیف می‌کند.(مرجع [۱۳] را ملاحظه کنید)

لم ۱.۳.۲ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $A = M_i - N_i$، $i = ۱, ۲$، دو شکاف برای ماتریس A باشند، که در آن $M_۱$ و $M_۲$ نامنفردند و $x^{(۰)} \in \mathbb{C}^n$ یک حدس اولیه مفروض باشد. اگر $\{x^{(k)}\}$ دنباله تولید شده از روش تکراری دو گامی زیر باشد

$$\begin{cases} M_۱ x^{(k+\frac{۱}{۲})} = N_۱ x^{(k)} + b \\ M_۲ x^{(k+۱)} = N_۲ x^{(k+\frac{۱}{۲})} + b \end{cases} \qquad (۳.۲)$$

که در آن $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، آنگاه

$$x^{(k+۱)} = M_۲^{-۱} N_۲ M_۱^{-۱} N_۱ x^{(k)} + M_۲^{-۱}(I + N_۲ M_۱^{-۱})b, \qquad (۴.۲)$$

به علاوه اگر شعاع طیفی $\rho(M_۲^{-۱} N_۲ M_۱^{-۱} N_۱)$ ماتریس تکرار $M_۲^{-۱} N_۲ M_۱^{-۱} N_۱$ کمتر از یک باشد، آنگاه دنباله تکراری $\{x^{(k)}\}$ برای هر حدس اولیهٔ $x^{(۰)} \in \mathbb{C}^n$ به جواب منحصر به فرد $x^* \in \mathbb{C}^n$ دستگاه $Ax = b$ همگرا است.

اثبات: چون ماتریسهای $M_۱$ و $M_۲$ نامنفرد هستند، از حذف $x^{(k+\frac{۱}{۲})}$ بین دو معادله (۳.۲)، رابطه تکراری (۴.۲) نتیجه می‌شود و بنابر قضیه ۱.۳.۱ روش تکراری (۴.۲) همگرا است اگر و فقط اگر $\rho(M_۲^{-۱} N_۲ M_۱^{-۱} N_۱)$ کوچکتر از یک باشد.□

برای همگرایی روش HSS با استفاده از لم ۱.۳.۲ قضیه زیر را بیان می‌کنیم: