بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

بررسی جامع عملکرد روشهای بازیافت تنش برای برآورد خطا در حل مسائل سه بعدی به روش اجزاء محدود

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه

فرشید مسیبی برزی

استاد راهنما

دکتر بیژن برومند

۱۳۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته مهندسی سازه آقای فرشید مسیبی

تحت عنوان

بررسی جامع عملکرد روشهای بازیافت تنش برای برآورد خطا در حل مسائل سه بعدی به روش اجزاء محدود

در تاریخ ۱۳۸۲/۳/۲۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱-استاد راهنمای پایان نامه — دکتر بیژن برومند

۲-استاد مشاور پایان نامه — دکتر محمد مهدی سعادت پور

۳-استاد داور — دکتر مجتبی ازهری

۴-استاد داور — دکتر حمید هاشم الحسینی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر مجید سرتاج

تقدیر و تشکر

اکنون که به لطف ایزد منان این کوشش ناچیز به مقصود رسیده است، بر خود لازم می دانم مراتب سپاسگزاری قلبی خود را از تمام کسانی که در این راه مرا یاری نمودند، ابراز نمایم. انجام این پایان نامه، بدون راهنمایی و هدایت استاد عزیز، جناب آقای دکتر برومند به هیچ وجه ممکن نبود. همچنین لازم است از زحمات بیدریغ جناب آقای دکتر محمد مهدی سعادتپور، جناب آقای دکتر مجتبی ازهری و سایر اساتید خود تشکر نمایم؛ زیرا آنچه آموخته ام در محضر ایشان بوده است. از جناب آقای دکتر حمید هاشم الحسینی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را متحمل شدند، تشکر می نمایم.

محبت، صبر و دلداریهای خانواده عزیزم — که آنچه دارم از ایشان است — همواره تحمل سختیها را بر من آسان می نمود و بدون همدلی و همیاری آنان طی این طریق ناممکن بود. کمال تشکر، قدردانی و امتنان را از ایشان دارم. همچنین از تمامی دوستانم که در طی این مرحله همواره در کنار من بودند، تشکر می نمایم.

فرشید مسیبی برزی

هفتم تیرماه ۱۳۸۲

تقدیم به فروغ راه زندگیم، پدر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان	صفحه

فصل سوم: برآورد کارایی روشهای بازیافت خطا

فصل چهارم: برنامه رایانه ای و نتایج عددی

فصل پنجم: جمع بندی نتایج و پیشنهادات

عنوان | صفحه

چکیده

نیاز روزافزون فناوری امروز به حل سریع و دقیق مسائل پیچیده، روشهای عددی را تبدیل به یکی از مهمترین مباحث در حوزه علوم مهندسی نموده است. روش اجزاء محدود به عنوان یکی از قویترین این روشها، جایگاه ویژه ای در حل مسائل مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات داراست. به تدریج با نیاز به حل مسائل پیچیده تر به کمک این روش و لزوم حل سریعتر و اقتصادی تر آنها، آنالیز تطبیقی اهمیتی ویژه یافته است. مهمترین مرحله یک آنالیز تطبیقی، برآورد سطح و پراکندگی خطا در حل اجزاء محدود می باشد، از این رو بررسی کارایی برآوردکننده های خطا و انتخاب صحیح برآوردکننده مناسب برای مسأله مورد نظر، اهمیت زیادی در کارایی یک آنالیز تطبیقی داراست.

مقایسه برآوردکننده های خطا بر مبنای یک سری از مسائل نمونه همواره امری پذیرفته شده در میان محققین بوده است، اما بابوشکا و همکارانش در مقالاتی که بین سالهای ۱۹۹۴ تا ۱۹۹۷ منتشر شد، ضمن ارائه یک روش عددی برای مقایسه برآوردکننده های خطا، نشان دادند این گونه مقایسه ها می توانند به نتایج گمراه کننده ای منجر شود. روش ذکر شده، تنها برای مسائلی با یک مرز قابل استفاده است. از این رو در این پایان نامه با توسعه دو روش جدید، این محدودیت برطرف شده و کارایی سه برآوردکننده خطای SPR و فرمهای اصلی و بهبود یافته REP در مسائل انتقال حرارت و الاستیسیته سه بعدی با شرایط مرزی و الگوهای شبکه المان بندی و نسبتهای طولی مختلف با یکدیگر مقایسه شده است.

نتایج بررسیها نشان می دهد کارایی روش SPR و فرم بهبود یافته روش REP هر دو دارای کارایی قابل قبولی در مسائل سه بعدی هستند. همچنین نشان داده شد فرم اصلی REP بسیار به نسبتهای طولی بالا حساس است و نباید در مسائلی که شبکه المان بندی زیاد بهم ریخته است به کار رود. کارایی برآوردکننده های خطا در مسائل انتقال حرارت بیش از مسائل الاستیسیته و در مسائل سه بعدی کمتر از مسائل دو بعدی می باشد. همچنین کارایی برآوردکننده ها در نزدیکی مرزها کاهش می یابد که علت عمده آن تغییر تعریف برآوردکننده ها و استفاده از برونیابی به جای درونیابی است.

فصل اول
مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می شوند. با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریعتر و دقیقتر آنها، روشهای تحلیلی دیگر جوابگوی نیازهای روزافزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره در کنار توسعه مبانی علوم، تلاش کرده اند روشهای عددی را نیز توسعه بخشند. امروزه با ورود رایانه ها به عرصه محاسبات مهندسی و رشد بسیار سریع قدرت، سرعت و همزمان کاهش قیمت آنها، روشهای عددی نقش بسیار مهمی در رشد فناوری یافته اند به نحوی که رایانه ها و نرم افزارهای محاسبات عددی جزئی از ابزارهای روزمره مهندسین به شمار می آید.

روشهای عددی نیز همواره در حال توسعه بوده اند و در این مسیر، روشهای متعددی توسط محققین ابداع گشته است. از مهمترین این روشها می توان به روش تفاضلهای محدود، روش اجزاء محدود، روش احجام محدود و روش المانهای مرزی اشاره کرد. هر کدام از این روشها موارد کاربرد خاص خود را داشته و هنوز هم محققان در صدد رشد و توسعه این روشها و ابداع روشهای جدید هستند.

روش اجزاء محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه های توسعه این روش را باید در اوائل دهه ۱۹۴۰

میلادی جستجو کرد. در سال ۱۹۴۳، کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروزه المانهای مثلثی خطی نامیده می شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روش اجزاء محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزاء محدود را بر این روش نهاد. کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکویچ و چونگ پیشنهاد شد. محققین بسیاری برای پیشبرد این روش تلاش کرده اند و تحقیقات در این زمینه هنوز هم ادامه دارد. اطلاعات بیشتر در مورد تاریخچه، دستاوردها و برخی مسائل حل نشده این روش در مرجع [۱] موجود است.

۱-۲- روش اجزاء محدود

از آنجا که روش اجزاء محدود امکان حل معادلات دیفرانسیل پاره ای را فراهم می آورد، امروزه این روش در بسیاری از رشته های علوم برای حل معادلات بنیادی این رشته ها به کار می رود. معادله دیفرانسیل خطی پاره ای:

$$\mathbf{S}^T\mathbf{DSu}+\mathbf{b}=\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{in}\,\Omega \tag{۱-۱}$$

که در آن $\mathbf{S}$ عملگر دیفرانسیلی است، شکل کلی بسیاری از معادلات مورد استفاده در مهندسی می باشد. از جمله این مسائل می توان به مسائل انتقال حرارت و الاستیسیته اشاره کرد که در این پایان نامه به عنوان نمونه مسائل اجزاء محدود مورد بررسی قرار خواهند گرفت. عملگر $\mathbf{S}$ و ماتریس $\mathbf{D}$ مورد استفاده در این مسائل در پیوست الف آورده شده است. برای حل معادله (۱-۱) به روش اجزاء محدود با شرایط مرزی:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\overline{\mathbf{t}} & \text{on}\,\Gamma_N\\ \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}} & \text{on}\,\Gamma_D\neq\varnothing\end{cases}$$
$$\Gamma_N\cup\Gamma_D=\Gamma=\partial\Omega \quad \text{and} \quad \Gamma_N\cap\Gamma_D=\varnothing \tag{۲-۱}$$

با ضرب طرفین معادله در میدان وزن مجازی $\delta\mathbf{u}^T$ و انتگرالگیری بر روی دامنه، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega+\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega=0 \tag{۳-۱}$$

با استفاده از قضیه گرین، رابطه بالا را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathbf{t}}\, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\, d\Omega = \mathbf{0} \qquad (۴-۱)$$

که در آن:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\delta\mathbf{u} \qquad (۵-۱)$$

با گسسته سازی دامنه حل و انتخاب میدان وزن مجازی به صورت:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\overline{\mathbf{u}} \qquad (۶-۱)$$

که در آن $\mathbf{N}$ توابع شکل و $\delta\overline{\mathbf{u}}$ مقادیر ثابت هستند، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \overline{\mathbf{t}}\, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, d\Omega \right) = \mathbf{0} \qquad (۷-۱)$$

که در آن:

$$\mathbf{B} = \mathbf{SN} \qquad (۸-۱)$$

از آنجا که حل باید مستقل از انتخاب $\delta\overline{\mathbf{u}}$ باشد:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \overline{\mathbf{t}}\, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, d\Omega = \mathbf{0} \qquad (۹-۱)$$

با گسسته سازی $\mathbf{u}$ به صورت:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}_h \tag{۱-۱۰}$$

و جایگذاری آن در رابطه (۱-۹)، رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}_h = \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega \tag{۱-۱۱}$$

و یا:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_b \tag{۱-۱۲}$$

در رابطه فوق $\mathbf{K}$ اصلاحاً *ماتریس سختی* نامیده می شود. با حل دستگاه معادلات خطی فوق و جایگذاری در روابط بالا، تمامی کمیتها قابل محاسبه خواهند بود.

۱-۳- خطاها در روش اجزاء محدود

واضح است که روش اجزاء محدود یک روش تقریبی است. با توجه به آنچه در قسمت قبل آمد، منابع خطا در روش اجزاء محدود را می توان به سه گروه عمده تقسیم کرد:

۱- *خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسأله*: این خطا از آنجا ناشی می شود که در حالت کلی نمی توان دامنه حل مساله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره ای شکل را هیچگاه نمی توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود، هر چند این کار با هر دقت دلخواه با ریزتر کردن شبکه المان بندی امکان پذیر است.

۲- *خطای ناشی از گرد کردن اعداد*: این گروه از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولاً به صورت زنجیروار به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریزتر نمودن شبکه المان بندی معمولاً این گروه از خطاها را تشدید می کند. برای کاهش این گروه از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان

حل همراه است.

۳- *خطای ناشی از گسسته سازی*: این گروه از خطاها، عمده ترین منبع خطا در روش اجزاء محدود بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می باشد. این گروه از خطاها نیز با ریزتر کردن شبکه المان بندی و نیز بالاتر بردن درجه توابع شکل مورد استفاده کاهش می یابند.

آنچه از این پس در این پایان نامه به عنوان خطا مورد بحث قرار خواهد گرفت، خطای ناشی از گسسته سازی است و بنابراین همواره فرض بر آن خواهد بود که دامنه حل به طور کامل توسط المانهای مورد استفاده پوشیده شده و محاسبات نیز به صورت کاملاً دقیق انجام می گیرد.

در یک حل اجزاء محدود خطای یک کمیت مانند $\boldsymbol{\sigma}$ به صورت تفاضل مقدار دقیق آن کمیت و مقدار حاصل از حل اجزاء محدود تعریف می گردد:

$$\mathbf{e}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{h} \qquad (۱۳-۱)$$

واضح است که خطای یک کمیت همانند خود آن کمیت، تابع مکان خواهد بود. از این رو برای بیان سطح خطای موجود در یک حل اجزاء محدود از *معیارهای خطا* استفاده می شود. یک معیار خطا تابعی است از میدان خطای یک کمیت خاص که سطح خطای موجود در یک حل اجزاء محدود روی یک زیر دامنه را توسط یک کمیت عددی بیان می کند. از معروفترین معیارهای خطا می توان به معیار انرژی و معیار L_2 اشاره کرد که به عنوان مثال برای کمیت $\boldsymbol{\sigma}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left\|\mathbf{e}_{\sigma}\right\|_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}_{\sigma}^{T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_{\sigma} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۴-۱)$$

$$\left\|\mathbf{e}_{\sigma}\right\|_{L_2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}_{\sigma}^{T} \mathbf{e}_{\sigma} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۵-۱)$$

معیار دیگری که در فصل سوم از آن استفاده خواهد شد، معیار L_∞ است که برای هر کمیت دلخواه (نه لزوماً خطا) مانند $\mathbf{u}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\left\|\mathbf{u}\right\|_{L_\infty,\Omega} = \max\left(u_i\right) \text{ on } \Omega \qquad (۱۶-۱)$$