دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

عنوان

گراف‌های کوهن-مکاولی

نگارش

محمّدعلی بهبودیان

استاد راهنما

آقای دکتر سیامک یاسمی

استاد مشاور

آقای دکتر حمیدرضا میمنی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در ریاضی محض

شهریور ۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

سپاسگزاری

در آغاز بر خود واجب می‌دانم که از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر سیامک یاسمی که تجارب گرانبهای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند و نیز جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی، استاد مشاور اینجانب، که همواره مرا از راهنمایی‌های خود بهره‌مند ساختند، قدردانی کنم. همچنین از کلیه‌ی دوستان و بویژه از خانواده‌ام که مرا در انجام این رساله یاری دادند، کمال تشکّر را دارم.

محمّدعلی بهبودیان

شهریورماه یک هزار و سیصد و هشتاد و هفت

چکیده

برای هر گراف متناهی G با مجموعه رئوس $V = \{x_1, ..., x_n\}$، حلقه خارج قسمتی $R/I(G)$ را نسبت می‌دهیم که در آن $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان k بوده و $I(G)$ ایده‌آل یالی متناظر با گراف G می باشد که عبارتست از ایده‌آل تولید شده توسط تک‌جمله‌ای‌های x_ix_j بطوری که $x_ix_j \in E(G)$. حال گراف G را کوهن‌ـمکاولی گوییم هرگاه حلقه $R/I(G)$ یک حلقه کوهن‌ـمکاولی باشد.

ما در این رساله به بررسی و طبقه‌بندی گراف‌های کوهن‌ـمکاولی پرداخته و روابط موجود بین این گراف‌ها و گراف‌های نامخلوط، پوسته‌پذیر و وتری را بررسی می کنیم و در صورت عدم برقراری رابطه، مثال نقضی ارائه می دهیم. همچنین طبقه‌بندی گراف‌های نامخلوط و پوسته‌پذیر مد نظر قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: کوهن‌ـمکاولی($Cohen - Macaulay$)، نامخلوط($unmixed$)، رأس‌ـبحرانی($vertex - critical$)، پوسته‌پذیر($shellable$)، وتری($chordal$)

فهرست مطالب

مقدّمه

جبر جابجایی ترکیبیاتی یکی از شاخه‌های جدید جبر جابجایی است که اولین بار توسط استنلی[۱] و هاکستر[۲] در اواسط دهه ۷۰ میلادی مطرح شد و در ده سال اخیر توجه افراد زیادی از قبیل ویلارریل[۳]، هرزوگ[۴]، میلر[۵] و ... را به خود جلب کرده است. افزوده شدن شاخه‌هایی چون نظریّه گراف، توپولوژی جبری، برنامه نویسی عددی و هندسه جبری، این شاخه را بیش از پیش جذابتر کرده است.

در این رساله ضمن بررسی گراف‌های کوهن‌ـمکاولی و ساختار آن‌ها، روابط موجود بین این گراف‌ها و گراف‌های نامخلوط، پوسته‌پذیر و وتری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و برخی از گراف‌های مذکور را بطور جداگانه طبقه بندی می‌کنیم.

در فصل اوّل تعاریف و قضایای مورد نیاز از جبر جابجایی و نظریّه گراف را بیان می‌کنیم. ابتدا مفاهیم و قضایای جبر جابجایی را یادآوری می‌کنیم سپس به مطالعه تعاریف و قضایایی از نظریّه گراف می‌پردازیم.

در فصل دوّم گراف‌های کوهن‌ـمکاولی را معرفی کرده و رابطه موجود بین این گراف‌ها و گراف‌های نامخلوط را بررسی می‌کنیم. همچنین مطالبی درباره ارتباط گراف‌های نامخلوط و رأس‌ـبحرانی ارائه می‌دهیم و در نهایت ساختارهایی برای گراف‌های کوهن‌ـمکاولی معرفی می‌کنیم.

۱ $Stanley$
۲ $Hochster$
۳ $Villarreal$
۴ $Hrzog$
۵ $Miller$

در فصل سوّم ابتدا مفهوم یک مجتمع سادکی و مفاهیم مرتبط با آن را بیان می‌کنیم. در ادامه مجتمع سادکی مکمّل یک گراف را تعریف کرده و روابط موجود را بررسی می‌کنیم سپس قضیّه‌ای در رابطه با گراف‌های دوبخشی کوهن-مکاولی اثبات کرده و نشان می‌دهیم که مجتمع سادکی مکمّل این نوع گراف‌ها پوسته‌پذیر است و در آخر به طبقه‌بندی انواع گراف‌ها می‌پردازیم.

در فصل پایانی رساله نیز به تعریف گراف وتری و مفاهیم مربوطه می‌پردازیم و قضیّه‌ای در ارتباط با تأثیر خاصیت وتری در هم‌ارز شدن خاصیت کوهن-مکاولی و نامخلوطی ارائه می‌دهیم و در پایان فصل نموداری که جمع‌بندی مطالب ارائه شده در این رساله است، ارائه می‌دهیم.

حلقه‌های در نظر گرفته شده در این رساله همگی جابجایی و یکدار و ناصفر می‌باشند.

فصل اول

پیش نیازها

در این فصل، تعاریف، لم‌ها و قضیّه‌های مورد نیاز از نظریه گراف و جبر جابجایی را یادآوری می‌کنیم.

۱-۱ پیش‌نیازهای مربوط به جبر جابجایی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد در اینصورت **واریته‌ی** I[۱] را با نماد $Var(I)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Var(I)=\{P\in spec(R)|I\subseteq P\}$$

عناصر مینیمال $Var(I)$ را ایده‌آل‌های اوّل مینیمال I می‌نامیم و مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اوّل مینیمال I را با $Min(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. اگر R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در اینصورت

$$\sqrt{I}=\{r\in R|\exists n\in \mathbf{N};r^n\in I\}$$

ایده‌آلی از R است که شامل I است و آن را **رادیکال**[۲] I می نامیم.

تذکّر ۳.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در اینصورت

$$\sqrt{I}=\bigcap_{P\in Min(I)}P.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک Rـ مدول باشد در اینصورت مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل وابسته به M را با نماد $Ass(M)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ass(M)=\{P\in spec(R)|\exists 0\neq x\in M,P=Ann(x)\}$$

[۱] $variety$
[۲] $radical$

توجّه کنید که $Ann(M) = \{r \in R | \forall x \in M, rx = 0\}$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R ، S و K سه حلقه و φ و ψ همریختی حلقه‌ای باشند. در اینصورت دنباله‌ی

$$0 \to S \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\psi} K \to 0$$

را یک رشته‌ی دقیق کوتاه[۳] گوییم هرگاه

$$ker(\varphi) = 0, im(\varphi) = ker(\psi), im(\psi) = K$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه R و تجزیه

$$I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$$

که به ازای $i = 1, ..., n$، $\sqrt{Q_i} = P_i$ تجزیه اوّلیه مینیمال I باشد. در اینصورت مجموعه n عضوی $\{P_1, ..., P_n\}$ را مجموعه ایده‌آل‌های اوّل وابسته به I می‌نامیم و با $ass(I)$ یا $ass_R(I)$ نمایش می‌دهیم.

تذکّر ۷.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. دراینصورت

$$Ass(R/I) = ass(I).$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید حلقه‌ای ناصفر باشد. زنجیره‌ی

$$P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$$

۳ *short exact sequence*

را که در آن برای هر $0 \leq i \leq n$، $P_i \in spec(R)$ زنجیره‌ی ایده‌آل‌های اوّل R می‌نامیم. تعداد" $\subset$ " ها طول زنجیر را نشان می‌دهد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی ناصفر باشد. بُعد[۴] حلقه Rرا با $\dim(R)$ نشان داده و بصورت

$$\dim(R) = \sup\{n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \mid \text{زنجیره‌ای بطول } n \text{ از ایده‌آلهای اوّل } R \text{ وجود داشته باشد}\}$$

تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه مجموعه‌ی فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد. در غیر اینصورت $\dim(R) = \infty$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $P \in spec(R)$ باشد. ارتفاع P را با $ht(P)$ نمایش داده و آن را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی طول‌های زنجیرهای

$$P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n = P$$

، از ایده‌آل‌های اوّل R تعریف می‌کنیم. به شرطی که این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد در غیر اینصورت $ht(P) = \infty$.

تذکّر ۱۱.۱.۱. اگر $\dim(R)$ متناهی باشد آنگاه

$$\dim(R) = sup\{ht(\mathrm{m})|\mathrm{m} \in Max(R)\} = \sup\{ht(P)|P \in spec(R)\}$$

تذکّر ۱۲.۱.۱. اگر (R, m) حلقه‌ای موضعی باشد آنگاه $\dim(R) = ht(\mathrm{m})$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیدR یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد بعد حلقه‌ی خارج

[۴] *dimension*

قسمتی R/I را بصورت

$\dim(R/I) = \sup\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\} |$ زنجیره‌ای بطول n از ایده‌آلهای اوّل R که همگی شامل I موجود باشد $\}$

تعریف می کنیم مشروط بر اینکه مجموعه‌ی فوق سوپریمم داشته باشد. در غیر اینصورت $\dim(R/I) = \infty$.

تذکّر ۱.۱.۱۴. فرض کنید R یک حلقه و $P \in spec(R)$ باشد در اینصورت

$$ht(P) + \dim(R/P) \leq \dim(R)$$

برهان. به نتیجه ۲.۱.۷ از[۱۰]رجوع شود. □

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. ارتفاع I را با $ht(I)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ht(I) = \inf\{ht(P) | I \subseteq P \in spec(R)\} = \inf\{ht(P) | P \in Min(I)\}$$

تذکّر ۱.۱.۱۶. اگر R حلقه‌ای چندجمله‌ای روی میدان k بوده و I ایده‌آل آن باشد آنگاه

$$\dim(R) = \dim(R/I) + ht(I).$$

قضیّه ۱.۱.۱۷.(تعمیم قضیّه ایده‌آل اصلی کرول) فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $x_1, ..., x_n \in R$ و $P \in Min(< x_1, ..., x_n >)$. دراینصورت $ht(P) \leq n$.

برهان. به قضیّه ۱.۳.۱۴ از[۱۰]رجوع شود. □

نتیجه ۱.۱.۱۸. فرض کنید k یک میدان و $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n]$. اگر

$P_t := < x_1, ..., x_t >$ که $1 \leq t \leq n$، آنگاه $ht(P_t) = t$.

توجّه کنید که برای هر $1 \leq i \leq n$، ایده‌آل $< x_1, ..., x_i >$ یک ایده‌آل اوّل است.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $a_1, ..., a_n \in R$، رشته‌ای از عناصر R بوده و M یک Rـ مدول باشد به گونه‌ای که

۱) $a_1 \notin Z(M)$ و $a_2 \notin Z(\frac{M}{a_1 M})$ و ... و $a_n \notin Z(\frac{M}{<a_1, ..., a_{n-1}>M})$؛

۲) $\frac{M}{<a_1, ..., a_n>M} \neq 0$.

در اینصورت $a_1, ..., a_n$ را یک Mـ**رشته منظّم**[5] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $I \lhd R$ و M یک Rـمدول باشد بطوریکه $IM \neq M$. در اینصورت $x_1, ..., x_n \in I$ را یک Mـ**رشته منظّم ماکسیمال** در I می‌گوییم هرگاه

$$I \subset Z(\frac{M}{<x_1, ..., x_n>M})$$

طول یک Rـرشته‌ی منظّم ماکسیمال در I را با نماد $grade(I, R)$ یا بطور خلاصه با $grade(I)$ نمایش می‌دهیم.

تذکّر ۱.۱.۲۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و I ایده‌آل آن باشد در اینصورت

$$grade(I) \leq ht(I)$$

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنید (R, m) یک حلقه‌ی نوتری و M یک Rـمدول باشد. در اینصورت $depth(M)$ را طول Mـرشته‌ی منظّم ماکسیمال در m تعریف می‌کنیم. بدیهی

[5] $M - regular\ sequence$

است که $depth(R) = grade(\mathrm{m})$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. R را **کوهن-مکاولی**[۶] می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل R مانند I داشته باشیم $ht(I) = grade(I)$.

قضیّه ۲۴.۱.۱. فرض کنید (R, m) حلقه نوتری موضعی باشد. دراینصورت R، کوهن-مکاولی است اگر و تنها اگر $ht(\mathrm{m}) = grade(\mathrm{m})$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل آن باشد و $P \in spec(R)$ ایده‌آل اوّلی از R باشد. I را P-اولیّه گوییم هر گاه $Ass(\frac{R}{I}) = \{P\}$ که در اینصورت $\sqrt{Ann(\frac{R}{I})} = P$.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض‌کنید (R, m) یک حلقه‌ی نوتری موضعی و $\dim(R) = t$. در اینصورت یک سیستم پارامتری[۷] ($s.o.p$) مجموعه‌ای از عناصر R مانند $a_۱, ..., a_t$ است به گونه‌ای که ایده‌آل $< a_۱, ..., a_t >$ یک ایده آل m-اوّلیه باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید (R, m) یک حلقه‌ی موضعی باشد. R را **منظّم**[۸] گوییم هرگاه

$$\dim(R) = \dim_{\frac{R}{\mathrm{m}}}(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}^۲})$$

[۶] $Cohen - Macaulay$

[۷] $system\ of\ parameters$

[۸] $regular$

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید (R, m) حلقه‌ای موضعی منظم با بعد t باشد. یک سیستم پارامتری منظّم R مجموعه‌ای از عناصر R مانند $a_1, ..., a_t$ است بطوری که $\mathrm{m} =< a_1, ..., a_t >$.

تذکّر ۲۹.۱.۱. هر سیستم پارامتری منظّم از حلقه‌ی R یک Rـرشته‌ی منظّم است.

لم ۳۰.۱.۱. فرض کنید $R_1 = \mathrm{k}[x]$ ، $R_2 = \mathrm{k}[y]$ و $R = \mathrm{k}[x, y]$ حلقه‌های چندجمله‌ای روی میدان k باشند. اگر I_1 و I_2 به ترتیب ایده‌آل‌هایی از R_1 و R_2 باشند آنگاه

$$depth(\frac{R_1}{I_1}) + depth(\frac{R_2}{I_2}) = depth(\frac{R}{I_1+I_2})$$

برهان. به لم ۶.۲.۷از [۱۰] رجوع شود. □

تعریف ۳۱.۱.۱. در حلقه‌ی چندجمله‌ای $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n]$ یک **تک‌جمله‌ای**[۹] عبارتست از جملاتی مانند ${x_1}^{\alpha_1}...{x_n}^{\alpha_n}$ که در آن $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای ایده‌آلی است که مولّدهای آن تک‌جمله‌ای باشند.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید k یک میدان و $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n]$باشد. در اینصورت هر ایده‌آل از R بفرم $I =< x_{i_1}, ..., x_{i_t} >$ را **ایده‌آل وجهی**[۱۰] می‌گوییم. توجّه کنید که هر ایده‌آل وجهی، یک ایده‌آل اوّل می باشد.

گزاره ۳۳.۱.۱. فرض کنید که $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n]$ و I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای از R

[۹] *monomial*
[۱۰] *face ideal*

بوده و $P \in ass(I)$ باشد در اینصورت P یک ایده‌آل وجهی خواهد بود.

برهان. با استقراء روی تعداد متغیّرهایی که در مجموعه مولّد مینیمال I (متشکّل از تک‌جمله‌ای ها)، قرار دارند پیش می‌رویم.

قرار می دهیم $\mathrm{m} =< x_۱, ..., x_n >$ و فرض می‌کنیم که P یک ایده‌آل اوّل وابسته به I باشد. اگر $\sqrt{I} = \mathrm{m}$ باشد آنگاه $P = \mathrm{m}$ و اثبات تمام می‌شود. حال فرض کنیم که $\sqrt{I} \neq \mathrm{m}$ بوده و $x_۱$ متغیّری باشد که در $\sqrt{I}$ قرار ندارد. قرار می‌دهیم

$$I_\circ = I \ , \ \forall n \geq \circ (n \in \mathbf{N}) : I_{n+۱} = (I_n : x_۱) = \{r \in R | rx_۱ \in I_n\}$$

از آنجا که R نوتری است لذا برای یک k داریم $I_k = (I_k : x_۱)$. حال دو حالت داریم:
اوّل اینکه P یک ایده‌آل اوّل وابسته $< I_n, x_۱ >$، برای یک n، باشد. در اینصورت بنابر فرض استقراء P یک ایده‌آل وجهی خواهد بود. حال فرض کنیم که برای هیچ nای P ایده‌آل اوّل وابسته به $< I_n, x_۱ >$ نباشد. دنباله دقیق زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\circ \to \frac{R}{(I_n : x_۱)} \xrightarrow{x_۱} \frac{R}{I_n} \to \frac{R}{< I_n, x_۱ >} \to \circ$$

بنابراین خواهیم داشت

$$Ass(\frac{R}{I_n}) \subseteq Ass(\frac{R}{(I_n : x_۱)}) \cup Ass(\frac{R}{< I_n, x_۱ >})$$

لذا $Ass(\frac{R}{I_n}) \subseteq Ass(\frac{R}{(I_n : x_۱)})$. حال با توجّه به اینکه برای هر $n \geq \circ$، دنباله دقیق فوق وجود دارد لذا برای هر n، P یک ایده‌آل اوّل وابسته به I_n خواهد بود. حال از آنجا که $x_۱$ در $\frac{R}{I_k}$ منظّم است لذا I_k ایده‌آلی است که به طور مینیمال توسط تک‌جمله‌ای‌ها یی از

متغیّرهای $x_۲, ..., x_n$ تولید شده است لذا بنابر استقراء P یک ایده‌آل وجهی می‌باشد.$\square$

تعریف ۳۴.۱.۱. تک‌جمله‌ای $x_۱^{\alpha_۱}...x_n^{\alpha_n}$ در حلقه $R = \mathrm{k}[x_۱, ..., x_n]$ خالی از مربع[۱۱] نامیده می‌شود هرگاه ۱ یا $\alpha_i = ۰$.

گزاره ۳۵.۱.۱. اگر k یک میدان بوده و $R = \mathrm{k}[x_۱, ..., x_n]$ و I ایده‌آلی از R باشد که توسط تک‌جمله‌ای‌های خالی از مربع تولید می‌شود آنگاه

$$I = P_۱ \cap ... \cap P_s$$

که در آن $ass(I) = \{P_۱, ..., P_s\}$.

برهان. قرار می‌دهیم $J = \bigcap_{i=۱}^{s} P_i$، بوضوح $J = \sqrt{I}$ و $I \subseteq J$ لذا کافیست نشان دهیم که $J \subseteq I$، برای این منظور فرض کنیم که $f \in J$ باشد داریم که $f = x_{i_۱}^{\alpha_۱}...x_{i_r}^{\alpha_r}$ در آن $i_۱ < ... < i_r$ و برای هر $۱ \leq i \leq r$، $\alpha_i > ۰$، از آنجا که $J = \sqrt{I}$ لذا یک $k \in \mathbf{N}$ هست که $f^k \in I$. حال چون I توسط تک‌جمله‌ای‌های خالی از مربع تولید می‌شود لذا $x_{i_۱}...x_{i_r} \in I$ پس $f \in I$ در نتیجه $J \subseteq I$. $\square$

تعریف ۳۶.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه R را **نامخلوط**[۱۲] گوییم هرگاه برای هر $P \in ass(I)$ داشته باشیم

$$ht(I) = ht(P)$$

[۱۱] $square\ free$

[۱۲] $unmixed$

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید $(H,+)$ یک نیمگروه آبلی باشد. حلقه R را Hـ**مدرّج**[۱۳] گوییم هرگاه $R=\bigoplus_{a\in H} R_a$ بطوری که برای هر $a,b\in H$، $R_aR_b\subseteq R_{a+b}$.
هر حلقه $\mathbf{Z}$ـمدرّج را حلقه مدرّج می‌نامیم.

تعریف ۳۸.۱.۱. اگر R یک حلقه Hـمدرّج و M یک Rـمدول باشد بگونه‌ای که $M=\bigoplus_{a\in H} M_a$ و برای هر $a,b\in H$، $R_aM_b\subseteq M_{a+b}$ آنگاه M را یک مدول Hـمدرّج می‌گوییم.

هر عضو f از M را یک عضو همگن از درجه a گوییم هرگاه $f\in M_a$.

نکته ۳۹.۱.۱. حلقه چندجمله‌ای $R=\mathrm{k}[x_۱,...,x_n]$ روی میدان k یک حلقه مدرّج می‌باشد. اگر در حلقه R فقط همگن بودن x_iها را لازم داشته باشیم و نیز برای هر $۱\leq i\leq n$، $\deg(x_i)>۰$ باشد در اینصورت R را حلقه **بطور مثبت مدرّج**[۱۴] می‌نامیم و با R_+ نمایش می‌دهیم.

قضیّه ۴۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری موضعی و M یک Rـمدول باشد در اینصورت اگر M یک مدول کوهن‌ـمکاولی باشد آنگاه برای هر $P\in Ass(M)$،

$$\dim(\frac{R}{P})=depth(M)$$

برهان. به قضیّه (i) ۱۷.۳ از [۳] رجوع شود. □

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه چندجمله‌ای بطور مثبت مدرّج روی میدان

۱۳ $H-graded$
۱۴ $positively\ graded$

k باشد و I یک ایده‌آل از R باشد. I را یک **ایده‌آل مدرّج** گوییم هرگاه چندجمله‌ای های همگن $f_1, ..., f_s$ موجود باشند بطوری که $I =< f_1, ..., f_s >$.

گزاره ۴۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه چندجمله‌ای بطور مثبت مدرّج روی میدان k بوده و I یک ایده‌آل مدرّج از R باشد. در اینصورت اگر $\frac{R}{I}$، کوهن_مکاولی باشد آنگاه I ایده‌آلی نامخلوط خواهد بود.

برهان. داریم $Ass(\frac{R}{I}) = ass(I)$ و $\dim(R) = \dim(\frac{R}{I}) + ht(I)$. حال فرض کنیم که $P \in ass(I)$ باشد با توجّه به قضیّه ۴۰.۱.۱ خواهیم داشت

$$\dim(\frac{R}{P}) = \operatorname{depth}(\frac{R}{I}) = \dim(\frac{R}{I}) \implies ht(P) = ht(I)$$

لذا I یک ایده‌آل نامخلوط خواهد بود.

لم ۴۳.۱.۱. (لم $Depth$) فرض کنید دنباله

$$0 \to M \to N \to K \to 0$$

یک دنباله دقیق از مدول‌های حلقه موضعی R باشند در اینصورت

الف) اگر $depth(N) < depth(K)$ باشد آنگاه $depth(M) = depth(N)$؛

ب) اگر $depth(N) = depth(K)$ باشد آنگاه $depth(M) \geq depth(N)$؛

ج) اگر $depth(N) > depth(K)$ باشد آنگاه $depth(M) = depth(K) + 1$.

برهان. به لم ۱.۳.۹ از [۱۰] رجوع شود. □

لم ۴۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و $S = R[x_1, ..., x_n]$