وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان :

اشتقاق های موضعی و اشتقاق های موضعی تقریبی

استاد راهنما :
دکتر محمد حسین ستاری

استاد مشاور :
دکتر شهرام رضا پور

پژوهشگر :
جواد هاشم پور

مهر / ۱۳۸۹
تبریز / ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

تمام آنچه در آسمانها و زمین از جنبندگان وجود دارند، و همچنین فرشتگان، برای خدا سجده می کنند و تکبر نمی ورزند. سپاس خدای را که از وجود خویش به ما هستی بخشید و بر ما نعمت خویش افزون کرد.

در این مجال از تمامی عزیزان، که بنده را در رسیدن به این نقطه یاری کرده‌اند، تشکر و قدردانی می نمایم. از جمله اعضای خانواده‌ام که با تلاش های خودشان محیطی آرام برای مطالعه بنده فراهم کردند. استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد حسین ستاری که همیشه بنده را مورد لطف خود قرار داده، و هر لحظه دریای علم خود را در اختیار بنده گذاشته، و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند. دکتر شهرام رضا پور که در طول این پروژه از راهنماییهای ایشان بهره بردم. دکتر قربانعلی حقیقت دوست که داوری این پروژه را پذیرفتند. و سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام. تشکری ویژه از پدر و مادرم که بهترینها برای من بوده و هستند و نیز برادر بزرگم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند. همچنین نباید زحمات برادر و خواهرم را از یاد ببرم.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

جواد هاشم پور

مهر ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه، عملگرهای خطی خاصی از جبر باناخ A بتوی یک $A-$مدول باناخ X، که اشتقاق موضعی تقریبی نامیده می شوند، مطالعه شده‌اند. نشان داده شده است که وقتی A یک C^*-جبر، جبر باناخ تولید شده توسط خود توان ها، جبر نیمساده پوچساز، و یا جبر گروهی از $SIN-$گروه یا گروه کلاً ناهمبند باشد، اشتقاق های موضعی تقریبی کراندار از A به X اشتقاق خواهند بود.

کلمات کلیدی: اشتقاق، اشتقاق های موضعی، اشتقاق های موضعی تقریبی،مضروب، مضروب موضعی، مضروب های موضعی تقریبی

پیشگفتار

مفهوم اشتقاق موضعی توسط کادیسون در [۱۷] معرفی گردید، که از تحقیقات قبلی وی و رینقروس در مورد کوهمولوژی هشیلد از جبرهای عملگری مختلف، الهام گرفته شده بود. هنگامی که در مورد شرایط لازم برای اشتقاق بودن یک نگاشت تحقیق می کنیم اشتقاق های موضعی به طور طبیعی آشکار می شوند. کادیسون نشان داد که اگر A یک جبر فون نئومن و X یک $A-$مدول باناخ دوگان باشد، آنگاه اشتقاق های موضعی کراندار از A به X اشتقاق خواهند بود. جانسون، نتیجه کادیسون را گسترش داده و نشان داد که اگر A یک C^*-جبر باشد در اینصورت اشتقاق های موضعی از A به هر $A-$مدول باناخ ، اشتقاق هستند. [۱۴]

همچنین اشتقاق های موضعی در مطالعه " بطور جبری انعکاسی بودن " فضای خطی از اشتقاق ها نیز ظاهر می شوند. در [۱۸] لارسون ، به مطالعه انعکاسی بودن و بطور جبری انعکاسی بودن زیر فضاهای خاصی از عملگرها پرداخته و این سوال را مطرح کرده است که کدام جبرها دارای فضای اشتقاق بطور جبری انعکاسی هستند. به بیانی دیگر در کدام جبرها، هر اشتقاق موضعی، یک اشتقاق است. وی نشان داد که برای $B(X)$ (X یک فضای باناخ) جواب مثبت است. [۱۹]

همچنین این سوال را نیز می توان پرسید که برای کدام جبرها، فضای خطی اشتقاق های کراندار، انعکاسی هستند. برای پاسخ به این سوال، مفهوم اشتقاق های موضعی تقریبی را معرفی می کنیم. اشتقاق های موضعی تقریبی خیلی کلی تر از اشتقاق های موضعی هستند و به ما اجازه می دهند که انعکاسی بودن و بطور جبری انعکاسی بودن را در یک زمان بررسی کنیم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این فصل، برخی تعاریف مقدماتی و قضایایی را که در فصل های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت را می آوریم.

۱.۱ فضاهای انعکاسی

تعریف ۱.۱.۱ فضاهای باناخ X و Y را در نظر می گیریم.
$L(X,Y)$ مجموعه عملگرهای خطی از X به Y و $B(X,Y)$ مجموعه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را نشان می دهد. اگر S زیر فضایی از $L(X,Y)$ باشد در اینصورت قرار می دهیم $ref_a(S) = \{T \in L(X,Y) \mid T(x) \in Sx, x \in X\}$ و اگر S زیر فضایی از $B(X,Y)$ باشد در اینصورت قرار می دهیم $ref(S) = \{T \in B(X,Y) \mid T(x) \in [Sx], x \in X\}$ که در آنها
$Sx = \{S_\circ x \mid S_\circ \in S\}$(مدارx درS) و $[Sx] = \overline{Sx}$
در حالت اول S را بطور جبری انعکاسی گوییم هرگاه $S = ref_a(S)$
در حالت دوم S را انعکاسی گوییم هرگاه $S = ref(S)$

تعریف ۲.۱.۱ یک بردار جدا کننده برای زیر فضای S از $L(X)$ یک بردار مانند $x \in X$ است که تبدیل مقابل یک به یک باشد. $s \longrightarrow sx \quad (s \in S)$

نمادگذاری ۱.۱.۱ فضای تمام تبدیل ها با رتبه متناهی در $L(X)$ را با $L_f(X)$ و فضای تمام تبدیل ها از رتبه متناهی در $B(X)$ را با $B_f(X)$ نشان می دهند. برای زیر فضای S از $L(X)$ قرار می دهیم $S_f = S \cap L_f(X)$

لم ۱.۱.۱ اگر S زیر فضای خطی بعد متناهی از $L(X)$ با $S_f = \{0\}$ باشد آنگاه S انعکاسی است.

برهان. به لم ۴.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

لم ۲.۱.۱ اگر S زیر فضای خطی بعد متناهی از $L(X)$ باشد آنگاه $ref_a(S) \subseteq S + L_f(X)$.

برهان. به لم ۵.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

قضیه ۱.۱.۱ اگر S زیر فضای خطی بعد متناهی از $L(X)$ باشد آنگاه

$$ref_a(S) = S + ref_a(S_f)$$

برهان. به قضیه ۶.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

لم ۳.۱.۱ اگر S زیر فضای خطی بعد متناهی از $L(X)$ باشد که شامل عملگرهای از رتبه متناهی است در اینصورت $ref_a(S)$ ، بعد متناهی بوده شامل عملگرهای از رتبه متناهی است.

برهان. به لم ۷.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

نتیجه ۱.۱.۱ فرض کنیم S زیر فضای بعد متناهی از $L(X)$ باشد آنگاه S انعکاسی است اگر و تنها اگر S_f انعکاسی باشد.

برهان. به نتیجه ۸.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

نتیجه ۲.۱.۱ فرض کنیم S زیر فضای خطی بعد متناهی از $L(X)$ باشد آنگاه ref_aS نیز بعد متناهی است.

برهان. به نتیجه ۹.۲ از [۱۸] رجوع گردد. ■

مثال ۱.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و S زیر فضای خطی بعد متناهی از $B(H)$ باشد که شامل هیچ عملگر غیر صفر از رتبه متناهی نیست در اینصورت S انعکاسی است .

برهان. به نتیجه ۳.٦ از [۱۸] رجوع گردد. ■

۲.۱ A—مدول

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر روی میدان F باشد. فضای خطی M روی میدان F را یک $A-$مدول چپ گوییم هرگاه نگاشتی مانند$(a,m) \to am$ از $A \times M$ به M با خواص زیر موجود باشد.

۱) نسبت به a خطی

۲) نسبت به m خطی

۳) $a_۱(a_۲m) = (a_۱a_۲)m$

نگاشت فوق را ضرب مدولی گوییم. به همین ترتیب $A-$مدول راست نیز تعریف می گردد.
باضرب معکوس، A تبدیل به یک جبر می شود که آنرا جبر معکوس A گفته و با $rev(A)$ نشان می دهند. بنابراین هر $A-$مدول راست ، یک $rev(A)-$مدول چپ است.
M را $A-$مدول ($A-$مدول دو طرفه) گوییم هرگاه هم $A-$مدول راست و هم $A-$مدول چپ باشد و داشته باشیم $(a,b \in X, m \in M) \quad a(mb) = (am)b$

تعریف ۲.۲.۱ $A-$مدول چپ M را $A-$مدول چپ نرمدار گوییم هرگاه

$$\exists\ K > ۰\ ; \| am \| \leq\ K \| a \| \| m \| \quad (a \in A\ ,\ m \in M)$$

تعریف ۳.۲.۱ یک $A-$مدول چپ نرمدار را باناخ گوییم هرگاه با نرمش فضای خطی تام باشد.

مثال ۱.۲.۱ جبر A را در نظر می گیریم.

۱) A یک $A-$مدول می باشد، که ضرب های مدولی همان ضرب اعضای A می باشند.

۲) هر ایدآل چپ A یک $A-$مدول چپ نرمدار است.

۳) اگر X یک $A-$مدول چپ نرمدار با دوگان X^* باشد در اینصورت X^* با ضرب مدولی زیر، به یک $A-$مدول راست باناخ تبدیل می شود که آنرا $A-$مدول راست باناخ دوگان گوییم.

$$(fa)(x) = f(ax) \ (f \in X^* \ , \ a \in A \ , \ x \in X)$$

و اگر X یک $A-$مدول راست باشد ضرب مدولی برای X^* بصورت زیر خواهد بود.

$$(af)(x) = f(xa) \ \ (f \in X^* \ , \ a \in A \ , \ x \in X)$$

تعریف ۴.۲.۱ A$-$مدول چپ باناخ X را اساسی گوییم هرگاه $X = \overline{AX}$ که در آن $AX = lin\{ax \mid a \in A, x \in X\}$

$A-$مدول X را اساسی گوییم هرگاه بعنوان $A-$مدول راست و چپ اساسی باشد.

۳.۱ جبر باناخ منظم

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم S یک مجموعه نا تهی باشد، مجموعه توابع از S به $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{C}^S$ نشان می دهیم. یک جبر از توابع روی S ، یک زیر جبر از $\mathbb{C}^S$ است.

تعریف ۲.۳.۱ گوییم یک زیر مجموعه E از $\mathbb{C}^S$ نقاط S را جدا می کند هرگاه برای هر $s, t \in S$ که $s \neq t$

$$\exists \ f \in E \ ; \ f(s) \neq f(t)$$

بعلاوه E بطور قوی نقاط S را جدا می کند هرگاه $\forall\, s \in S \ \exists\, f \in E \ ; \ f(s) \neq 0$

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{F}$ یک خانواده ناتهی از نگاشتهای $f : X \longrightarrow Y_f$ باشد، بطوریکه هر Y_f یک فضای توپولوژیک است. فرض کنیم τ مجموعه تمام اشتراک های متناهی از مجموعه های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathcal{F}$ و $V \subset Y_f$ باز است. در اینصورت τ یک توپولوژی روی X است. و در حقیقت کوچکترین توپولوژی روی X است که هر $f \in \mathcal{F}$ را پیوسته می کند. τ را توپولوژی ضعیف القایی از $\mathcal{F}$ و یا بطور مختصر $\mathcal{F}-$توپولوژی روی X گوییم.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی غیر تهی و A یک جبر از توابع روی X باشد. در اینصورت A یک جبر تابعی است هرگاه A نقاط X را بطور قوی جدا کند و $A-$توپولوژی روی X، توپولوژی داده شده باشد.

خانواده زیر مجموعه های بسته از فضای توپولوژیکی X را با F_X نشان می دهند.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی غیر تهی و A یک جبر تابعی روی X باشد. در اینصورت A منظم است هرگاه برای هر $S \in F_X$ و هر $x \in X \backslash S$،
$\exists\, f \in A \ ; \ f(x) = 1, f(S) \subset \{0\}$

.

۴.۱ آنالیز هارمونیک

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده هاسدورف باشد. یک اندازه هار چپ روی G عبارت است از یک اندازه رادون (ناصفر) مانند μ بطوریکه $\mu(E) = \mu(xE) \quad (x \in G \ , \ E \subset G)$

در واقع اندازه هار چپ، اندازه رادون پایای چپ است.

قضیه ۱.۴.۱ هر گروه موضعاً فشرده دارای یک اندازه هار چپ است.

برهان. به قضیه ۱۰.۲ از [۱۰] رجوع گردد. ■

مثال ۱.۴.۱ روی گروههای گسسته، اندازه شمارشی ، بعنوان اندازه هار می باشد.

قضیه ۲.۴.۱ اگر λ و μ اندازه های هار روی G باشند. در اینصورت $c \in (0, \infty)$ چنان وجود دارد که $\mu = c\lambda$

برهان. به قضیه ۲۰.۲ از [۱۰] رجوع گردد. ■

تعریف ۱.۴.۱ اگر λ اندازه هار چپ روی G و $x \in G$ باشد. در اینصورت λ_x که بصورت $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$ تعریف می شود یک اندازه هار است. لذا بنابر قضیه یکتایی اندازه هار، عددی مانند $\Delta(x) \in (0, \infty)$ چنان وجود دارد که $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$.
تابع Δ از G به $(0, \infty)$ را که $x \longrightarrow \Delta(x)$ تابع مدولار می نامند. ($\Delta(x)$ فقط به x وابسته است.)
تابع مدولار یک همومرفیسم (گروهی) پیوسته از G به $\mathbb{R}_\times$ است.
اگر $\Delta \equiv 1$ در اینصورت λ اندازه هار راست نیز می باشد. در این حالت G را تک مدولی گوییم.

مثال ۲.۴.۱ گروه های آبلی و گسسته، تک مدولی هستند. چرا که $\lambda(xE) = \lambda(E) = \lambda(Ex)$

گزاره ۱.۴.۱ اگر K زیر گروه فشرده ای از G باشد در اینصورت $\Delta \mid_K \equiv 1$.

برهان. به گزاره ۲۷.۲ از [۱۰] رجوع گردد. ■

۱.۴.۱ جبر گروهی و جبر اندازه

در این قسمت فرض بر این است که G یک گروه موضعاً فشرده با اندازه هار λ می باشد.

تعریف ۲.۴.۱ اگر λ اندازه هار چپ روی G باشد قرار می دهیم

$$L^p(G) = \{f \; ; \; \int \mid f \mid^p d\lambda < \infty\}$$

اگر G گسسته باشد $l^1(G)$ را داریم

$$l^1(G) = \{f \mid \Sigma_{x \in G} \; \mid f(x) \mid < \infty\}$$

تعریف ۳.۴.۱ مجموعه $\{\mu$ اندازه رادون مختلط منظم است. $\mid \mu\}$ را جبر اندازه گفته با $M(G)$ نشان می دهند. توجه کنیم که داریم $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_3 - \lambda_4)i$ که λ_i اندازه مثبت است. لذا شرایط رادون بودن را روی λ_i ها بررسی می کنیم.

$M(G)$ توسط $C_\circ(G)^*$ مشخص می شود. در واقع یک ایزومرفیسم ایزومتری به شکل زیر بین آنها وجود دارد.

$$\mu \longrightarrow \Phi_\mu \quad ; \quad \Phi_\mu(f) = \int_G f d\mu \quad (f \in C_\circ(G))$$

$M(G)$ یک فضای باناخ است که با ضرب زیر تبدیل به جبر باناخ می شود.

$$\mu, \nu \in M(G) \qquad < \mu * \nu, f >= \int_G \int_G f(st) d\mu(s) d\nu(t)$$

ضرب فوق را پیچش و یا ضرب پیچشی می نامند.

براحتی بررسی می شود که $\quad \| \mu * \nu \| \leq \| \mu \| \| \nu \|$

تعریف ۴.۴.۱ اندازه گسسته روی G بصورت مقابل تعریف می شود. $(x \in G)$

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \neq E \end{cases}$$

براحتی بررسی می شود که $\delta_x \in M(G)$ و $\delta = \delta_1$ واحد $MG)$ می باشد.

G آبلی است اگر وتنها اگر $M(G)$ جابجایی باشد.

روی $M(G)$ برگشت $\mu \longrightarrow \mu^*$ به صورت $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ تعریف می شود.

لذا داریم $\mu^{**} = \mu$ و

$$\int \varphi d\mu^* = \int \varphi(x^{-1}) d\overline{\mu}(x)$$

می توان $L^1(G)$ را بعنوان زیر جبری از $M(G)$ در نظر گرفت.

$$\begin{cases} L^1(G) \longrightarrow M(G) \\ f \longrightarrow \mu_f := f(x)d(x) \end{cases} \Longrightarrow \mu_f(E) = \int_E f(x)dx \quad ; \quad \| f \|_{L^1(G)} = \| f \|_{M(G)}$$

با فرض $f, g \in L^1(G)$ تابع $f * g$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy \quad (x \in G) \qquad \| f * g \| \leq \| f \| \| g \|$$

لذا $L^1(G)$ یک جبر باناخ می باشد.

توجه کنیم که وقتی f و g را بعنوان اندازه در نظر می گیریم $f * g$ با تعریفی که برای ضرب پیچشی اندازه ها داریم یکسان است.

با استفاده از $M(G)$ می توان روی $L^1(G)$ یک برگشت به صورت زیر تعریف کرد.

$$f^*(x)dx = \overline{f(x^{-1})}d(x^{-1}) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})dx$$

بعنوان تابع $$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$$

پس $L^1(G)$ یک $*-$جبر باناخ است که آن را جبر گروهی می گوییم.

برای $f \in L^p(G)\ ,\ \mu \in M(G)$ تعریف می کنیم $(\mu * f)(x) = \int f(y^{-1}x)d\mu(y)$

لذا داریم $\mu * f \in L^p(G)$ و $\| \mu * f \| \leq \| \mu \| \| f \|_p$ و در حالتی که $p = 1$ و یا G تک مدولی باشد.

$f * \mu$ به صورت مقابل تعریف می شود. $(f * \mu)(x) = \int \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu(y)$

لذا داریم $f * \mu \in L^1(G)$ و $\| f * \mu \| \leq \| f \|_p \| \mu \|$

بنابراین $L^1(G)$ یک ایده‌آل $M(G)$ است.

تذکر ۱.۴.۱ فرض کنیم S زیر مجموعه بازی از گروه موضعاً فشرده G باشد. و فرض کنیم $L^1(S)$ شامل آن $f \in L^1(G)$ هایی باشد که روی S^c (متمم S) صفر می شوند و در نتیجه $L^1(S)$ شامل آن $f \in L^1(G)$ هایی است که $\int_{S^c} | f | = 0$. در اینصورت $L^1(S)$ یک زیر فضای خطی بسته از $L^1(G)$ است. اگر S یک نیم گروه باشد برای $f, g \in L^1(S)$ داریم $(f * g)(x) = 0 \quad (x \in S^c)$ لذا $f * g \in L^1(G)$. بنابراین اگر S یک نیم گروه در G باشد، $L^1(S)$ زیر جبر بسته از $L^1(G)$ خواهد بود.

تعریف ۵.۴.۱ فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. جبر فوریه G را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$A(G) = L^2(G) * L^2(G)^* = \{f * g^* \mid ;\ f, g \in L^2(G)\}$$