بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

علوم ریاضی

ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آنالیز ریاضی

عنوان

نگاشت های حافظ جفت عملگرهای با حاصلضرب تصویر

استاد راهنما

دکتر شیرین حجازیان

استاد مشاور

دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

نگارنده

مریم امیری سام

۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: نگاشت های حافظ جفت عملگرهای با حاصلضرب تصویر

نام نویسنده: مریم امیری سام

استاد راهنما: دکتر شیرین حجازیان

استاد مشاور: دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی محض	رشته تحصیلی: آنالیز ریاضی
تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۰۲/۱۰	تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۶/۲۷
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۹۰

چکیده پایان‌نامه : فرض کنیم $\mathcal{B}(H)$ جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط H با بعد بزرگتر یا مساوی ۲ باشد. در این پایان نامه ثابت می کنیم که یک نگاشت پوشای φ روی $\mathcal{B}(H)$ حافظ تصویر ضرب ناصفر است اگر و فقط اگر یک عملگر یکانی یا پاد یکانی U روی H و ثابت λ با شرط $\lambda^۲ = ۱$ وجود داشته باشند طوری که برای هر $A \in \mathcal{B}(H)$ داشته باشیم $\varphi(A) = \lambda UAU^*$. نتیجه مشابهی برای نگاشت هایی که ضرب سه تایی جردن را حفظ می کنند بدست خواهیم آورد.

واژگان کلیدی: نگاشت ، تصویر، ضرب عملگرها، ضرب سه تایی جردن دو عملگر

امضای استاد راهنما: تاریخ:

تقدیم به همسر مهربانم

که در راه کسب علم مشوقم بوده است.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

پروردگارا

من در خانهٔ فقیرانهٔ خود چیزی دارم که تو در عرش کبریایی خود نداری

من چون تویی دارم که تو چون خود نداری

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس هستی بخش هنر آفرین را که پهنه خلقت را بیاراست.

سرکار خانم دکتر حجازیان

آنگاه که جان جهان در سکوت نیستی و پوچی خزیده بود طنین نخستین که در جهان و فضای عدم کاینات پیچید، سایش قلم بود بر لوح آفرینش خداوندی، دستان نقاش خالقی که پهنه هزار نقش خلقت را به تصویر می کشید. اول آفریده را قلمی تراشید که برآنچه می سرایید و می نوشت سوگند گفته بود.

از یگانه هنرمند مطلق، زیستنی پرشکوه و جایگاهی بس نیکو برایتان آرزومندم و وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی های هوشمندانه شما که همچون امواج آرام دریایی بی کران، قایق شکسته مرا به ساحل دانش رسانید صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده شما، این قایق کنجکاوی در این دریای مواج جهل و تاریکی به ساحل علم و روشنی نمی رسید.

همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر ابراهیمی ویشکی با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس گرمای امیدش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

مریم امیری سام

۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۱.۱ تعاریف و مقدمات . . . ۱

۲.۱ چند گزاره کاربردی . . . ۷

۳.۱ چند قضیه مهم . . . ۱۰

۲ نگاشت های حافظ تصویر ضرب ناصفر ۱۳

۱.۲ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ضرب ناصفر و یک به یک بودن . . . ۱۳

۲.۲ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ضرب ناصفر، تصویرهای ناصفر و رتبه . . . ۱۸

۳.۲ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ضرب ناصفر، ترتیب، عملگرهای خودتوان و تعامد . . . ۲۲

۴.۲ اثبات قضیه اصلی . . . ۲۷

۵.۲ حذف خاصیت پوشایی . . . ۴۹

۳ نگاشت های حافظ تصویر ناصفر ضرب سه تایی جردن ۵۱

۱.۳ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ناصفر ضرب سه تایی جردن و یک به یک بودن . . . ۵۱

۲.۳ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ناصفر ضرب سه تایی جردن، تصویرهای ناصفر و رتبه . . . ۵۵

۳.۳ رابطه نگاشت های حافظ تصویر ناصفر ضرب سه تایی جردن، ترتیب و تعامد . . . ۵۸

۴.۳ اثبات قضیه اصلی . . . ۶۲

مراجع ۸۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۶

پیش‌گفتار

در چند دهه اخیر محققین بسیاری مسئله نگهدار روی جبر عملگرها را مطالعه می‌کنند. اولین مسأله در این زمینه توسط فربینیوس [۲۵] مطرح شد.این مسأله به شرح زیر می باشد.
فرض کنید φ یک نگاشت خطی روی M_n باشد. دراین صورت φ حافظ دترمینان ماتریس است یعنی به ازای $A \in \mathcal{B}(H)$، $\det(\varphi(A)) = \det(A)$، اگر و فقط اگر دو ماتریس $M, N \in M_n$ با شرط $\det(MN) = ۱$ موجود باشند طوری‌که یکی از شرایط زیر برقرار باشد
(۱) $\varphi(A) = MAN$ به ازای هر $A \in M_n$.
(۲) $\varphi(A) = MA^tN$ به ازای هر $A \in M_n$.
بعد از آن دیودونه [۲۶] به مطالعه در این زمینه پرداخت و مسأله زیر را مطرح نمود.
فرض کنید φ نگاشت خطی معکوس پذیر روی M_n باشد. در این صورت $\varphi(A)$ تکین است هرگاه A تکین باشد اگر و فقط اگر دو ماتریس $M, N \in M_n$ با شرط $\det(MN) \neq ۰$ موجود باشند طوری‌که یکی از شرایط زیر برقرار باشد
(۱) $\varphi(A) = MAN$ به ازای هر $A \in M_n$.
(۲) $\varphi(A) = MA^tN$ به ازای هر $A \in M_n$.
پوچ توانی، خود توانی و تصویر مفاهیم خیلی مهمی در جبر عملگرهاست. ازاین سو نگهدار این خواص مورد مطالعه قرار گرفته است. [۱ ، ۱۷-۱۵]
در سال های اخیر ریاضیدانان مسئله نگهدار را در مورد ضرب عملگرها بررسی‌کرده اند و اغلب نگاشت های خطی یا غیر خطی حافظ جابه جایی، طیف، شعاع طیفی، پوچ توانی یا خود توانی ضرب عملگرها را به طور مفصل مورد مطالعه قرار داده اند. [۵-۳ ، ۱۲-۸ ، ۱۴]
هدف اصلی این پایان نامه بررسی نگاشت پوشای φ روی فضای عملگرهای کراندار $\mathcal{B}(H)$ روی فضای هیلبرت مختلط H است‌که از دو طرف حافظ تصویر ضرب ناصفر می باشد. به عبارتی به ازای $A, B \in \mathcal{B}(H)$،

AB تصویر ناصفر است $\Longleftrightarrow$ $\varphi(A)\varphi(B)$تصویر ناصفر است.

پایان نامه پیش رو در سه فصل به شرح زیر تدوین شده است.

در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز می پردازیم.

در فصل دوم فرض می‌کنیم φ نگاشتی پوشا و از دو طرف حافظ تصویر ضرب ناصفر باشد و برای اثبات قضیه اصلی این فصل به بیان لم ها و گزاره ها و نتیجه های آنها می پردازیم.

قضیه اصلی فصل دوم)

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت مختلط با $\dim H \geq ۲$ وφ یک نگاشت پوشا روی $\mathcal{B}(H)$ باشد. در این صورت φ از دو طرف حافظ تصویر ضرب ناصفر است اگر و فقط اگر یک عملگر یکانی یا پاد یکانی U روی H و یک ثابت λ با شرط $\lambda^{۲} = ۱$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $A \in \mathcal{B}(H)$ داشته باشیم

$$\varphi(A) = \lambda UAU^*$$

در فصل سوم نگاشت پوشای φ که از دو طرف حافظ تصویر ناصفر ضرب سه تایی جردن می باشد را بررسی کرده و مشابه فصل دوم در صدد اثبات قضیه اصلی این فصل بر می آییم.

قضیه اصلی فصل سوم)

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت مختلط با $\dim H \geq ۲$ باشد و φ نگاشتی پوشا روی $\mathcal{B}(H)$ باشد. در این صورت φ از دو طرف حافظ تصویر ضرب سه تایی جردن ناصفر است اگر و فقط اگر یک عملگر یکانی یا پاد یکانی U روی H و یک ثابت α با شرط $\alpha^{۳} = ۱$ وجود داشته باشند به طوری‌که یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $\varphi(A) = \alpha UAU^*$ برای هر $A \in \mathcal{B}(H)$.

(۲) $\varphi(A) = \alpha UA^*U^*$ برای هر $A \in \mathcal{B}(H)$.

لازم به ذکر است که مرجع اصلی این پایان نامه مقاله

Maps preserving operator pairs whose products are projections ، Guoxing Ji ، Yaling Gao

می باشد.

۱
مقدمه

در این پایان نامه فرض می کنیم H فضای هیلبرت روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. فرض می کنیم خواننده با تعریف فضای هیلبرت و نرم حاصل از ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ آشنایی دارد. (فصل اول و دوم [۱۹])
در بخش اول این فصل تعاریف و مقدمات مورد نیاز در مورد H و $\mathcal{B}(H)$ جبر عملگرهای کراندار روی H را بیان می کنیم. در بخش دوم به بیان چند گزاره می پردازیم که در طی کار به آن نیازمندیم و در آخر چند قضیه مهم مورد نیاز را بیان می کنیم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۲]، [۶]، [۱۳]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲۲] و [۲۴] استخراج گردیده است.

۱.۱ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱.۱.۱. به ازای هر $x, y \in H$ گوییم x و y متعامدند و می نویسیم $x \perp y$ اگر $\langle x, y \rangle = 0$ و برای $M \subseteq H$ تعریف می کنیم

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp y, \forall y \in M\}$$

$M^{\perp}$ زیر فضای بسته ای از H می باشد.

قضیه ۲.۱.۱. *(قضیه ۵.۲۴، [۱۹])*
اگر M زیر فضای بسته ای از H باشد آنگاه $H = M \oplus M^{\perp}$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم S زیر مجموعه ای از فضای هیلبرت H باشد. منظور از نماد $[S]$ زیر فضای تولید شده توسط S است و عبارت است از کوچکترین زیرفضای برداری از H که شامل تمام S می باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $e_۱, e_۲ \in H$، تعریف می کنیم

$$H \ominus \{e_۱, e_۲\} = H \cap \{e_۱, e_۲\}^{\perp}$$

تعریف ۵.۱.۱. فضای عملگر های کراندار $T : H \to H$ با نرم

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq ۱} \|Tx\| \qquad (x \in H)$$

را با نماد $\mathcal{B}(H)$ نمایش می دهیم. عملگر همانی $\mathcal{B}(H)$ را با I نمایش خواهیم داد. در حالت $H = \mathbb{C}^n$ از [۱۹] داریم $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$. زیرفضای خطی $T(H)$ از H را برد T نامیم و با $\operatorname{rang} T$ نمایش می دهیم. بعد $\operatorname{rang} T$ را رتبه T نامیده و با $\operatorname{rank} T$ نمایش می دهیم. زیرفضای خطی $\ker(T) = \{x \in H \mid Tx = ۰\}$ را هسته T نامیم.

گزاره ۶.۱.۱. *(گزاره ۲.۱۵.۲، [۲۴])*
فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(H)$ طوری که به ازای هر $x \in H$، $\langle Ax, x\rangle = ۰$. در این صورت $A = ۰$.

قضیه ۷.۱.۱. *(قضیه ۱.۳.۲، [۱۹])*
فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت باشند.
۱) اگر $T \in \mathcal{B}(H_۱, H_۲)$ آنگاه عملگر کراندار منحصر به فرد $T^* \in \mathcal{B}(H_۲, H_۱)$ موجود است طوری که

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad (x, y \in H)$$

۲) $\|T\| = \|T^*\| = \|TT^*\|^{\frac{۱}{۲}}$.

قابل توجه است که $B(H)$ با عمل الحاق فوق یک C^*-جبر می باشد. [۱۹]

گزاره ۸.۱.۱. *(گزاره ۲.۶.۲، [۲۴])*
اگر $A \in \mathcal{B}(H)$ معکوس پذیر باشد آنگاه A^* نیز معکوس پذیر است و $(A^{-۱})^* = (A^*)^{-۱}$.

تعریف ۹.۱.۱. عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ را در نظر می گیریم. مجموعه ای از اسکالرهای $\lambda \in \mathbb{C}$ که $T - \lambda I$ معکوس پذیر نمی باشد را طیف T گوییم و با $\operatorname{sp}(T)$ نشان می دهیم. یادآوری می کنیم که $\operatorname{sp}(T)$ مجموعه ای فشرده و ناتهی می باشد.(لم (۴.۲.۱) و قضیه (۵.۲.۱) از [۱۹]) اگر $T \in M_n(\mathbb{C})$ آنگاه $T - \lambda I$ معکوس پذیر نیست وقتی که $\det(T - \lambda I) = ۰$ بنابراین

$$\operatorname{sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(T - \lambda I) = ۰\}.$$

شعاع طیفی عملگر T را با نماد $r(T)$ نمایش می دهیم و تعریف می کنیم $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{sp}(T)\}$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(H)$ و M زیر فضای خطی بسته از H باشد. گوییم
۱) A تحت M پایاست اگر و فقط اگر به ازای هر $m \in M$ ، $A(m) \in M$.
۲) M زیرفضای تقلیل دهنده برای A است اگر $AM \subseteq M$ و $AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

تعریف ۱۱.۱.۱. عملگر $A \in \mathcal{B}(H)$ را در نظر می گیریم. گوییم A
۱) خود الحاق است اگر و فقط اگر $A = A^*$.
۲) نرمال است اگر و فقط اگر $AA^* = A^*A$.
۳) یکانی است اگر و فقط اگر $AA^* = A^*A = I$.
۴) خودتوان است اگر و فقط اگر $A^۲ = A$.
۵) مثبت است و می نویسیم $A \geq ۰$ اگر خودالحاق بوده و $\mathrm{sp}(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.(به طور معادل به ازای هر $x \in H$، $\langle Ax, x\rangle \geq ۰$)
۶) تصویر است اگر خودالحاق و خودتوان باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. *(قضیه ۲.۱.۱۰، [۱۹])*
فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(H)$ عملگری نرمال باشد. در این صورت $r(A) = \|A\|$.

گزاره ۱۳.۱.۱. *(قضیه ۳۱.۱۰، [۱۳])*
فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(H)$ عملگری خودتوان باشد در این صورت $\mathrm{sp}\, A \subseteq \{۰, ۱\}$. اگر A تصویر ناصفر و غیر همانی باشد آنگاه $\mathrm{sp}(A) = \{۰, ۱\}$.

گزاره ۱۴.۱.۱. *تصویر ناصفر $P \in \mathcal{B}(H)$ را در نظر می‌گیریم در این صورت $\|P\| = ۱$.*

برهان. از تصویر بودن P نتیجه می شود

$$\|P\| = \|P^۲\| = \|PP^*\| = \|P\|^۲$$

بنابراین $\|P\| = ۱$. □

تعریف ۱۵.۱.۱. تصاویر $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ را در نظر می گیریم. گوییم P و Q
(۱) متعامدند و می نویسیم $P \perp Q$ اگر $PQ = QP = ۰$.
(۲) در شرط $P \leq Q$ صدق می کنند اگر $PQ = QP = P$.(به طور معادل $Q - P \geq ۰$)
(۳) در شرط $P < Q$ صدق می کنند اگر $P \leq Q$ و $Q - P$ معکوس پذیر باشد.

قضیه ۱.۱.۱۶. *(قضیه ۲.۳.۲، [۱۹])*
فرض کنیم P و Q تصاویری روی فضای هیلبرت H باشند. در این صورت شرایط زیر معادلند

۱) $P \leq Q$.

۲) $PQ = P$.

۳) $QP = P$.

۴) $P(H) \subseteq Q(H)$.

۵) $\|P(x)\| \leq \|Q(x)\|$، *به ازای هر* $x \in H$.

۶) $Q - P$ *تصویری روی* H *می باشد.*

قضیه ۱.۱.۱۷. *(قضیه ۱۲.۱۴، [۱۳])*
برای هر تصویر $P \in \mathcal{B}(H)$ *شرایط زیر معادلند*

(۱) P *خود الحاق است.*

(۲) P *نرمال است.*

(۳) $\mathrm{rang}(P) = (\ker(P))^{\perp}$.

(۴) برای هر $x \in H$ *داریم* $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^{2}$.

تعریف ۱.۱.۱۸. برای هر جفت بردار x ، y از فضای هیلبرت H نماد $x \otimes y$ نشان دهنده یک عملگر خطی از رتبه ۱ روی H است طوری که برای هر $z \in H$ داریم

$$(x \otimes y)z = \langle z, y\rangle x.$$

برخی از خواص این عملگر را به طور چکیده بیان می کنیم([۱۹])

$$\begin{aligned}
(x \otimes y)(x' \otimes y') &= \langle x', y\rangle (x \otimes y') \qquad (x, y, x', y' \in H)\\
(x \otimes y)^{*} &= y \otimes x\\
U(x \otimes y) &= Ux \otimes y \qquad (U \in \mathcal{B}(H))\\
(x \otimes y)U &= x \otimes U^{*}y\\
\|x \otimes y\| &= \|x\|\|y\|\\
\ker(x \otimes y) &= \{y\}^{\perp}
\end{aligned}$$

برای هر بردار یکه $x \in H$ عملگر $x \otimes x$ یک تصویر از رتبه ۱ است. به ازای $x, y \in H$، اگر $\langle x, y\rangle = ۱$ آنگاه عملگر $x \otimes y$ یک عملگر خودتوان از رتبه ۱ می باشد و اگر $\langle x, y\rangle = ۰$ آنگاه عملگر $x \otimes y$ یک عملگر پوچتوان از رتبه ۱ خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{B}(H)$، منظور از ضرب سه تایی جردن A و B ، ABA می باشد.

تعریف ۱.۱.۲۰. نگاشت $U : H \to H$ را مزدوج خطی گوییم هرگاه جمع پذیر باشد و به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$U(\lambda x) = \overline{\lambda} U(x) \qquad (x \in H)$$

تعریف ۱.۱.۲۱. نگاشت کراندار مزدوج خطی $U : H \to H$ را پاد یکانی گوییم هرگاه

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle y, x \rangle \qquad (x, y \in H)$$

گزاره ۱.۱.۲۲. *فرض کنیم نگاشت کراندار $U : H \to H$ پادیکانی باشد در این صورت $U^*U = I$.*

برهان. با توجه به تعریف قبل به ازی هر بردار $x \in H$ داریم

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$$

بنا به گزاره (۱.۱.۶)، $U^*U = I$. □

فرض کنیم $H_1, ..., H_n$ فضاهای هیلبرت باشند. فضای $H = H_1 \oplus ... \oplus H_n$ عبارت است از

$$H = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in H_i, i = 1, ..., n\}$$

که با عمل جمع و ضرب نقطه وار و نرم حاصل از ضرب داخلی

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i \rangle$$

یک فضای هیلبرت می باشد.(گزاره ۱.۶.۲، [۲۴]) توجه داریم که به ازای هر $x \in H$ بردار های $x_1, ..., x_n$ به ترتیب در $H_1, ..., H_n$ موجودند طوری که $x = x_1 + ... + x_n$. عملگر دلخواه $T \in \mathcal{B}(H)$ و $i, j \in \{1, ..., n\}$ را در نظر می گیریم. به ازای هر $x_i \in H_i$ تعریف می کنیم $T_{ji}(x_i) = T(x_i)_j$ در این صورت $T_{ij} \in \mathcal{B}(H_j, H_i)$. پس می توانیم T را به صورت

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix}$$

نمایش دهیم . در حالت خاص $H = H \oplus H$، به ازای عملگر های $A, B \in \mathcal{B}(H)$، عملگر $A \oplus B \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ را تعریف می کنیم $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم $A \in M_n$ در این صورت اثر ماتریس A را با نماد $\mathrm{tr}(A)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}.$$

گزاره ۲۴.۱.۱. *(گزاره ۳.۷.۳، [۲۴])*

فرض کنیم M زیرفضای خطی بسته از H و عملگرهای $A \in \mathcal{B}(H)$ ، $W \in \mathcal{B}(M)$ ،$Y \in \mathcal{B}(M, M^{\perp})$ ، $X \in \mathcal{B}(M^{\perp}, M)$ و $Z \in \mathcal{B}(M^{\perp})$ را در نظر می‌گیریم به طوری‌که

$$A = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

در این صورت برای هر $P \in \mathcal{B}(H)$ ، (۱) تا (۳) معادلند

(۱) M برای A پایاست.

(۲) $PAP = AP$.

(۳) $Y = ۰$.

و همچنین برای هر $Q \in \mathcal{B}(H)$، (۴) تا (۷) نیز معادلند

(۴) M زیر فضای تقلیل دهنده برای A است.

(۵) $QA = AQ$.

(۶) $X = Y = ۰$.

(۷) M برای A و A^* پایاست.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت باشند. یک یکریختی بین $H_۱$ و $H_۲$ نگاشت خطی پوشای $U : H_۱ \to H_۲$ می باشد که به ازای هر $h, g \in H_۱$،

$$\langle Uh, Ug \rangle = \langle h, g \rangle$$

در این صورت گوییم $H_۱$ و $H_۲$ یکریخت هستند.

تعریف ۲۶.۱.۱. نگاشت $\varphi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ را همریختی گوییم اگر خطی باشد و

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \qquad (A, B \in \mathcal{B}(H))$$

۲.۱ چند گزاره کاربردی

گزاره ۱.۲.۱. *تصاویر $P,Q\in\mathcal{B}(H)$ با شرط تصویر بودن PQ را در نظر می‌گیریم. در این صورت P و Q با یکدیگر جابه جا خواهند شد.*

برهان. با استفاده از خواص تصویر به راحتی مشاهده می شود

$$PQ=(PQ)^*=Q^*P^*=QP.$$

$\square$

گزاره ۲.۲.۱. *اگر Q,P و PQ تصاویری ناصفر روی H باشند طوری‌که $\operatorname{rank}P=۱$، آنگاه $P\leq Q$.*

برهان. چون $PQ(H)\subseteq P(H)$ پس $۰\neq\operatorname{rank}PQ\leq\operatorname{rank}P=۱$ و در نتیجه $\operatorname{rank}PQ=۱$. بنابراین $PQ=P$ و با توجه به قضیه (۱۶.۱.۱)، $P\leq Q$. $\square$

گزاره ۳.۲.۱. *فرض‌کنیم $P,Q\in\mathcal{B}(H)$ تصاویری ناصفر باشند طوری‌که به ازای هر تصویر از رتبه یک $Q_۱\leq Q$ داشته باشیم $Q_۱\leq P$. در این صورت $Q\leq P$.*

برهان. برای اثبات از قضیه (۱۶.۱.۱) استفاده می کنیم و نشان می دهیم $PQ=Q$. فرض کنیم $y\in H$ عنصر دلخواهی باشد، پس $Q(y)\in Q(H)$. حال تصویر متعامد از رتبه یک $Q_۱$ به روی $[Q(y)]$ را در نظر می گیریم. چون $Q(y)\in Q(H)$ بنابراین $Q_۱(H)\subseteq Q(H)$ و بنا به قضیه (۱۶.۱.۱)، $Q_۱\leq Q$. بنابراین

$$Q(y)=Q_۱Q(y)=Q_۱(y)$$

از طرفی بنا به فرض اولیه $Q_۱\leq P$، پس

$$PQ(y)=PQ_۱(y)=Q_۱(y)=Q(y)\qquad(y\in H)$$

بنابراین برهان کامل است. $\square$

گزاره ۴.۲.۱. *فرض‌کنیم $H=\mathbb{C}^۲$ و $E\in\mathcal{B}(H)$ تصویر از رتبه یک باشد و $H=E(H)\oplus E(H)^\perp$. در این صورت هر تصویر از رتبه یک Q غیر متعامد با E به صورت زیر می باشد.*

$$Q=\frac{۱}{۱+|z|^۲}\begin{bmatrix}۱ & z\\ \overline{z} & |z|^۲\end{bmatrix}\qquad(z\in\mathbb{C})$$

برهان. قرار می دهیم

$$Q=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad(a,b,c,d\in\mathbb{C})$$

با توجه به تعریف (۱۱.۱.۱)، Q عملگری خودتوان و خودالحاق می باشد و در نتیجه $a+d=۱$ و $a,d\in\mathbb{R}$ و $c=\overline{b}$. از $\operatorname{rank}Q=۱$ نتیجه می گیریم $\det(Q)=۰$ و بنابراین $ad=|b|^۲$. به ازای $z\in\mathbb{C}$ قرار می دهیم $a=\dfrac{۱}{۱+|z|^۲}$. بنابراین از $a+d=۱$ نتیجه می گیریم $d=\dfrac{|z|^۲}{۱+|z|^۲}$ و از $ad=|b|^۲$ داریم $|b|^۲=\dfrac{|z|^۲}{(۱+|z|^۲)^۲}$. پس $b=\pm\dfrac{z}{۱+|z|^۲}$. اگر $b=\dfrac{z}{۱+|z|^۲}$ آنگاه برهان کامل است و اگر $b=\dfrac{-z}{۱+|z|^۲}$، آنگاه با تغییر متغیر $w=-z$ نتیجه مطلوب حاصل می گردد. $\square$

گزاره ۵.۲.۱. *فرض کنیم $H=\mathbb{C}^۲$. تصویر دلخواه از رتبه یک $P\in\mathcal{B}(H)$ به صورت*

$$P=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad (a,b,c,d\in\mathbb{C})$$

را درنظر می‌گیریم. در این صورت a و d نامنفی می باشند.

برهان. با توجه به اینکه P از رتبه یک است، بنا به گزاره قبل اسکالر ناصفر $\lambda\in\mathbb{C}$ با شرط $c=\lambda a$ و $d=\lambda b$ موجود می باشد. بنا به استدلال گزاره قبل $a,d\in\mathbb{R}$ و $b=\overline{c}$. از عملگر خودتوان بودن P داریم

$$\begin{bmatrix}a^۲+\lambda ab & ab+\lambda b^۲\\ \lambda a^۲+\lambda^۲ ab & \lambda ab+\lambda^۲ b^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ \lambda a & \lambda b\end{bmatrix}.$$

فرض کنیم $a<۰$. اگر $b=۰$ آنگاه از تساوی دو ماتریس فوق نتیجه می شود $a=۱$ که مخالف فرض است. بنابراین $b\neq۰$ و در نتیجه $\lambda=\dfrac{۱-a}{b}$. از طرفی $c=\overline{b}=\lambda a$ بنابراین $|b|^۲=\overline{a-a^۲}<۰$ که ناممکن است. در نتیجه $a\geq۰$. با استدلالی مشابه نتیجه می شود $d\geq۰$. $\square$

گزاره ۶.۲.۱. *فرض کنیم $\dim H=۲$ و $A,B\in\mathcal{B}(H)$ تصاویری از رتبه یک با شرط تصویر از رتبه یک بودن ABA باشند. در این صورت $A=B$.*

برهان. تصاویر از رتبه یک متعامد $E,F\in\mathcal{B}(H)$ را اختیار می کنیم. قرار می دهیم $H=E(H)\oplus F(H)$. از تصویر ناصفر بودن ABA نتیجه می گیریم A و B تصاویری غیر متعامدند. از طرفی $E(H)\cap F(H)=\{۰\}$ بنابراین $A(H)$ و $B(H)$ زیر فضایی از $E(H)$ یا $F(H)$ می باشند. فرض می کنیم $A(H)$ و $B(H)$ زیرفضاهایی از $E(H)$ باشند. با توجه به قضیه (۱۶.۱.۱)، $A\leq E$ و $B\leq E$ و بنا به گزاره (۴.۲.۱)، اسکالرهای $z,z'\in\mathbb{C}$ موجودند طوری که $A=E(z)$ و $B=E(z')$. نشان می دهیم $z=z'$. با ضرب ماتریس های متناظر ABA به شکل زیر می باشد.

$$\frac{۱}{(۱+|z|^۲)^۲(۱+|z'|^۲)}\begin{bmatrix}۱+z\overline{z'}+z'\overline{z}+|z|^۲|z'|^۲ & z(۱+z\overline{z'}+z'\overline{z}+|z|^۲|z'|^۲)\\ \overline{z}(۱+z\overline{z'}+z'\overline{z}+|z|^۲|z'|^۲) & |z|^۲(۱+z\overline{z'}+z'\overline{z}+|z|^۲|z'|^۲)\end{bmatrix}$$

با توجه به تصویر بودن ماتریس داریم

$$1 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z|^2|z'|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2).$$

با قرار دادن $z = a + ib$ و $z' = c + id$ و محاسباتی ساده نتیجه می گیریم $a = c$ و $b = d$ و برهان کامل می شود. □

گزاره ۷.۲.۱. *فرض کنیم P و Q تصاویر ناصفری در $\mathcal{B}(H)$ باشند طوری که QPQ و PQP نیز تصاویری ناصفر هستند. در این صورت P و Q با یکدیگر جابه جا می شوند.*

برهان. داریم $H = P(H) \oplus P(H)^{\perp}$ در این صورت با توجه به گزاره (۲۲.۱.۱)،

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix}$$

که منظور از I، تحدید P به $P(H)$، عملگر همانی روی $P(H)$ است. از تصویر ناصفر بودن PQP نتیجه می شود Q_{11} تصویر ناصفر است . از طرفی $(QPQ)^2 = QPQ$ بنابراین

$$\begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{11}Q_{12}Q_{12}^*Q_{11} & Q_{11}Q_{12} + Q_{11}Q_{12}Q_{12}^*Q_{12} \\ Q_{12}^*Q_{11} + Q_{12}^*Q_{12}Q_{12}^*Q11 & Q_{12}^*Q_{11}Q_{12} + Q_{12} * Q_{12}Q_{12}^*Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11}Q_{12} \\ Q_{12}^*Q_{11} & Q_{12}^*Q_{12} \end{bmatrix}$$

در نتیجه $Q_{11}Q_{12}(Q_{11}Q_{12})^* = 0$. بنا به قضیه (۷.۱.۱)، $Q_{11}Q_{12} = 0$. به راحتی مشاهده می شود که

$$(PQP)(QPQ) = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = PQP$$

بنابراین $PQP \leq QPQ$. با جابه جایی P و Q با استدلالی مشابه استدلال فوق داریم $QPQ \leq PQP$. پس $PQP = QPQ$.

از طرفی $PQP \leq P$ بنابراین $P - QPQ = P - PQP \geq 0$. همچنین $Q(P - QPQ)Q = 0$ پس بنا بر گزاره (۲۳.۱.۱) $(P - QPQ)Q = Q(P - QPQ)Q = 0$ و در نتیجه $PQ = QPQ$.

از طرف دیگر $QPQ \leq Q$ پس $Q - PQP = Q - QPQ \geq 0$. همچنین $P(Q - PQP)P = 0$ و مشابه قبل $(Q - PQP)P = 0$ و در نتیجه $QP = PQP$. بنابراین $PQ = QPQ = PQP = QP$. □

گزاره ۸.۲.۱. *فرض کنیم $\dim \geq 3$ در این صورت تصاویر ناصفر $P, E, Q \in \mathcal{B}(H)$ با شرط $H = P(H) \oplus E(H) \oplus Q(H)$ موجود می باشند.*

برهان. بردار های متعامد یکه $e_1, ..., e_\alpha, x_1, ..., x_\beta \in H$ را اختیار می کنیم. P تصویر متعامد به روی $[x_1, ..., x_\beta]$ و E تصویر متعامد به روی $[e_1, ..., e_\alpha]$ را در نظر می گیریم. تصویر Q را تعریف می کنیم $I - (P + E)$ در این صورت برهان کامل می شود. □

گزاره ۹.۲.۱. *فرض کنیم ۳ $\dim H \geq$ و تصاویر ناصفر $P, E, Q \in \mathcal{B}(H)$ با شرط $H = P(H) \oplus E(H) \oplus Q(H)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت به ازای هر تصویر ناصفر $P_\circ \in \mathcal{B}(H)$ با شرط $P_o \leq P$، تصویر $A \in \mathcal{B}(P(H))$ با شرط $A \leq P$ موجود است طوری که*

$$P_\circ = \begin{bmatrix} A & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

برهان. طبق فرض $H = P(H) \oplus E(H) \oplus Q(H)$، قرار می دهیم

$$P_\circ = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & R & F \\ G & J & K \end{bmatrix}$$

که درایه ها عملگر هایی کراندار بین فضای هیلبرت فوق هستند به قسمی که ضرب $P_\circ$ در بردار های سه تایی خوش تعریف باشد. از طرفی $P_\circ \perp E$ بنابراین $B = R = J = \circ$. از طرف دیگر $P_\circ \perp Q$ پس $C = F = K = \circ$. داریم

$$P_\circ = \begin{bmatrix} A & \circ & \circ \\ D & \circ & \circ \\ G & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

از تصویر بودن $P_\circ$ خودالحاق بودن ماتریس فوق نتیجه می شود و در نتیجه $D = G = \circ$ و $A = A^*$. از تصویر بودن $P_\circ$ خودتوان بودن ماتریس فوق نتیجه می شود پس $A^۲ = A$. از $PP_\circ = P_\circ$ نتیجه می گیریم $PA = A$، با توجه به قضیه (۱۶.۱.۱) برهان کامل است. □

۳.۱ چند قضیه مهم

قضیه ۱.۳.۱. *(قضیه الهورن ، [۲۰])* [۱]

فرض کنید ۳ $\dim H \geq$ و φ یک نگاشت دو سویی روی $\mathcal{P}_۱(H)$ مجموعه ی همه ی تصاویر از رتبه ۱ باشد. در این صورت اگر φ تعامد را از دو طرف حفظ کند یعنی

$$\varphi(E) \perp \varphi(F) \Longleftrightarrow E \perp F \qquad (E, F \in \mathcal{P}_۱(H))$$

آنگاه یک عملگر یکانی یا پاد یکانی U روی H وجود دارد طوری که برای هر تصویر $E \in \mathcal{P}_۱(H)$ ،

$$\varphi(E) = UEU^*.$$

[۱] Uhlhorn's Theorem