

چکیده

هدف از این پایان نامه بررسی در هم تنیدگی کوانتومی در ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی است. برای این منظور ابتدا روشی تحلیلی، برای به دست آوردن در هم تنیدگی بین سکه و مکان ارائه کرده ایم که بوسیله آن می توان تاثیر حالات اولیه در هم تنیده، حالات غیر موضعی، حالات اولیه با در هم تنیدگی مکانی و حالات اولیه توزیع شده را بر ولگشتهای کوانتومی بطور دقیق بررسی کرد. با معرفی سه خانواده از حالات اولیه و انجام محاسبات پیچیده اولیه، بررسی طیف نسبتا کاملی از حالات اولیه به سادگی امکان پذیر گشته است. بعلاوه نشان داده ایم که ماتریس چگالی کاهش یافته در ولگشت های کوانتومی با حالت اولیه موضعی و با فضای سکه m بعدی، با ماتریس ثابتی با ابعاد $m^2 \times m^2$ بطور کامل توصیف می شود. این ماتریس مشخصه برای ولگشت های کوانتومی ۱ بعدی با عملگر سکه کلی $SU(2)$ و برای ولگشت های ۲ بعدی با عملگرهای $H \otimes H$ و G به دست آمده است. همچنین با تغییر عملگر انتقال در ولگشت های کوانتومی، نوع جدیدی از ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی را معرفی کرده ایم که با استفاده از تداخل کوانتومی جهت های حرکتی، در کنار تداخل مکانی ولگرد کوانتومی، مقدار در هم تنیدگی فضای سکه بعد از اندازه گیری مکان را بطرز چشمگیری افزایش می دهد.

علاوه بر روشها و روابطی که برای بررسی در هم تنیدگی کوانتومی معرفی گردیده، روابطی تحلیلی برای به دست آوردن واریانس در ولگشتهای کوانتومی واهمدوس^۱ به دست آورده ایم که برای تمام انواع نوفه های محیطی قابل کاربرد است. با استفاده از این روابط ثابت کرده ایم که نوفه مکانی در ولگشت های کوانتومی به صورت پدیده تونل زنی غیر همدوس^۲، بر خلاف نوفه های اعمال شده بر فضای سکه، حداقل ۲ خاصیت مهم در ولگشتهای کوانتومی، یعنی واریانس و در هم تنیدگی بین سکه و مکان ولگرد، را به صورت کوانتومی حفظ می کند. بویژه نشان داده ایم که نوفه ای که روی فضای سکه اعمال می شود به سرعت در هم تنیدگی بین سکه و مکان ولگرد را از بین می برد در حالیکه این در هم تنیدگی در حضور نوفه مکانی هیچگاه کمتر از ۰.۷ نخواهد شد. همچنین رابطه بسته ای برای تابع توزیع احتمال ولگشت های کوانتومی واهمدوس بر حسب ولگشت کوانتومی همدوس^۳ به دست آورده ایم که نشان می دهد چگونه نوفه مکانی می تواند تابع توزیع احتمال را هموار کرده و در سایر فرایندهای رایانش و اطلاعات کوانتومی مفید واقع شود.

کلمات کلیدی: ولگشت های کوانتومی، ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی، در هم تنیدگی، در هم تنیدگی بین

^۱Decoherent

^۲Incoherent

^۳coherent

سکه و مکان، واهمدوسی، ولگشت های کوانتومی واهمدوس، واریانس

فهرست مطالب

الف	فهرست مطالب
ج	لیست تصاویر
ه	لیست جداول
۱	۰ پیش گفتار
۷	۱ ولگشت های کوانتومی گسسته
۹	۱.۱ ولگشت کوانتومی روی خط
۱۰	۱.۱.۱ ساختار ولگشت های کوانتومی روی خط
۱۳	۲.۱.۱ حل تحلیلی ولگشت های کوانتومی روی خط
۱۹	۳.۱.۱ ولگشت های کوانتومی روی خط با سکه تعمیم یافته
۲۲	۲.۱ ولگشت های کوانتومی در ابعاد بالاتر
۲۹	۲ در هم تنیدگی کوانتومی
۲۹	۱.۲ در هم تنیدگی کوانتومی چیست؟
۳۱	۱.۱.۲ مثالی از ارتباط غیر موضعی حالات در هم تنیده
۳۵	۲.۲ معیارها و سنجه های در هم تنیدگی
۳۵	۱.۲.۲ جدایی پذیری
۳۷	۲.۲.۲ سنجه های در هم تنیدگی
۴۱	۳.۲.۲ چند مقیاس قابل محاسبه برای در هم تنیدگی
۴۵	۳ در هم تنیدگی کوانتومی در ولگشت های کوانتومی
۴۶	۱.۳ حالات غیرموضعی و در هم تنیدگی در ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی
۵۵	۱.۱.۳ در هم تنیدگی به ازای حالات اولیه جدایی پذیر
۶۱	۲.۱.۳ در هم تنیدگی به ازای حالات اولیه در هم تنیده
۶۶	۳.۱.۳ تاثیر حالات غیر موضعی بر در هم تنیدگی
۷۳	۲.۳ روش ماتریس مشخصه برای در هم تنیدگی در حالات موضعی
۷۷	۱.۲.۳ ماتریس مشخصه برای عملگر $SU(2)$ ، در ولگشت های کوانتومی ۱ بعدی
۸۱	۲.۲.۳ ماتریس مشخصه برای $H \otimes H$ و G در ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی
۸۹	۳.۳ در هم تنیدگی در ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی با محورهای تصادفی

۹۶	۴	اثر نوفه در ولگشت های کوانتومی
۹۷	۱.۴	عملگرهای کراوس و تفسیر تاثیر نوفه بر سامانه
۹۸	۲.۴	واریانس در ولگشت های کوانتومی در حضور نوفه
۱۰۴	۳.۴	مثالهایی از کاربرد روش ابر عملگری
۱۰۴	۱.۳.۴	نوفه جدایی ناپذیر روی کل سامانه
۱۱۴	۲.۳.۴	نوفه روی مکان ولگرد کوانتومی
۱۳۰	۳.۳.۴	نوفه روی سکه ولگرد کوانتومی
۱۳۳	۵	خلاصه و نتیجه گیری
۱۳۶		کتابنامه

لیست تصاویر

۱۳	۱.۱	تابع توزیع احتمال: این نمودارها احتمال یافتن ولگرد کوانتومی در مکانهای مختلف را نشان می دهد. نمودار سمت راست برای $ \psi\rangle_{initial} = 0\rangle \otimes R\rangle$ و نمودار سمت چپ برای $ \psi\rangle_{initial} = 0\rangle \otimes L\rangle$ رسم شده اند. در هر دو نمودار احتمال یافتن ولگرد در مکانهای فرد صفر است به همین دلیل نمودارها فقط به ازای مکانهای زوج رسم شده اند. نمودار خط چین تابع توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی را نشان می دهد. در هر دو نمودار عملگر سکه هادامارد و تعداد گامها ۱۰۰ است.
۲۳	۲.۱	تابع توزیع احتمال ولگشت کوانتومی ۲ بعدی با عملگر سکه $H \otimes H$ بعد از ۱۰۰ گام و به ازای حالت اولیه $ L\rangle \otimes L\rangle$
۲۵	۳.۱	انحراف معیار بر حسب زمان t برای $H, H \otimes H$ و $H \otimes H \otimes H$ به ازای حالات اولیه $ -\rangle^{\otimes d}$
۲۶	۴.۱	انحراف معیار بر حسب زمان t برای D_d به ازای حالات اولیه $ -\rangle^{\otimes d}$
۲۷	۵.۱	تابع توزیع احتمال ولگشت کوانتومی ۲ بعدی با عملگر سکه (چپ) G_2 و (راست) D_2 به ازای حالت اولیه $ L\rangle \otimes L\rangle$ بعد از ۱۰۰ گام.
۲۸	۶.۱	انحراف معیار ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی با عملگرهای سکه D_2, G_2 و $H \otimes H$ به ازای حالات اولیه (a) $ LL\rangle$ و (b) $ \psi^-\rangle$
۴۸	۱.۳	بر اساس تعریف سنتی عملگر انتقال، عمل آن به صورت خط چین مشخص خواهد شد. اگر در دستگاه مختصات به اندازه $\pi/4$ بچرخانیم (x', y') عمل عملگر انتقال به صورت تعریف رابطه ۵۴.۳ خواهد بود که در هر گام فقط در یک جهت ولگرد را جابجا خواهد کرد.
۶۰	۲.۳	(تصویر سمت راست) در هم تنیدگی بین سکه و مکان (CPE) برای حالت اولیه $ \chi^{(I)}\rangle$ در رابطه ۷۵.۴ (تصویر سمت چپ) برشهای عرضی تصویر سمت راست.
۶۱	۳.۳	برش عرضی CPE، $E(\theta_1, \theta_2)$ ، برای حالت اولیه رابطه ۵۹.۳ به ازای $\phi_1 = \phi_2 = 0$
۶۵	۴.۳	(سمت راست) CPE به ازای حالت اولیه، $ \chi^{(II)}\rangle$ ، تعریف شده در رابطه ۶۹.۳ و (سمت چپ) CPE به ازای حالت اولیه، $ \chi^{(III)}\rangle$ ، تعریف شده در رابطه ۷۰.۳.
۶۷	۵.۳	CPE(a)، $E(\theta, \phi)$ ، برای حالات اولیه متعلق به خانواده $ \chi^{(II)}\rangle$ (خط آبی) و حالات متعلق به خانواده $ \chi^{(III)}\rangle$ (خط چین قرمز). (b) مقدار CCE اولیه تعریف شده در رابطه ۷۱.۳ برای حالات اولیه مشابه.
۶۹	۶.۳	CPE به ازای غیر موضعی، $\psi_s(\alpha, \beta)$ ، تعریف شده در رابطه ۷۹.۳. سطوح فوق نشان دهنده CPE به ازای حالات مختلف (a) $ \Psi^+\rangle$ ، (b) $ LR\rangle$ و (c) $ \Psi^-\rangle$ هستند، که در رابطه ۷۲.۳ تعریف شده اند. در هر مورد صفحه افقی نشان دهنده میزان CPE برای حالت مشابه موضعی است.
۷۰	۷.۳	CPE به ازای غیر موضعی، $\psi_e(\alpha, \beta)$ ، تعریف شده در رابطه ۸۰.۳. سطوح فوق نشان دهنده CPE به ازای حالات مختلف (a) $ \Psi^+\rangle$ ، (b) $ LR\rangle$ و (c) $ \Psi^-\rangle$ هستند، که در رابطه ۷۲.۳ تعریف شده اند. در هر مورد صفحه افقی نشان دهنده میزان CPE برای حالت مشابه موضعی.
۷۳	۸.۳	(سمت راست): برش عرضی $E(\theta, \phi)$ به ازای حالت اولیه $\chi^{(II)}(\theta, \phi)$ در رابطه ۶۹.۳ و توزیع مکانی یکنواخت روی صفحه و (سمت چپ): برشهایی از شکل سمت راست به ازای ϕ های ثابت.

- ۹.۳ مقدار CPE برای ولگشت کوانتومی روی خط با عملگر سکه $SU(2)$ به ازای حالت اولیه $|0\rangle$ ،
 (خط چین قرمز) و حالت اولیه متقارن $|\chi_s\rangle$ (خط آبی). ۸۲
- ۱۰.۳ د رهم تنیدگی بین سکه و مکان (CPE) در ولگشت هاداماردی ۲ بعدی به ازای حالت اولیه
 $|\Psi_e\rangle$ ، تعریف شده در رابطه ۱۴۱.۳. ۸۶
- ۱۱.۳ د رهم تنیدگی بین سکه و مکان (CPE) در ولگشت کوانتوی ۲ بعدی با عملگر سکه G به ازای
 حالت اولیه $|\Psi_e\rangle$ ، تعریف شده در رابطه ۱۴۱.۳. ۸۹
- ۱۲.۳ تابع توزیع احتمال ولگشت هاداماردی ۲ بعدی با وجود محورهای تصادفی (تصویر چپ) و
 محورهای ثابت (تصویر راست) به ازای حالت اولیه $|RR\rangle$ بعد از ۲۰ گام. ۹۱
- ۱۳.۳ تابع توزیع احتمال (طرف چپ) و تابع توزیع PME (طرف راست) به ازای حالات اولیه (به ترتیب
 از بالا به پایین) $|R\rangle \otimes |R\rangle$ ، $|R\rangle \otimes |\psi_s\rangle$ و $|\psi_s\rangle \otimes |\psi_s\rangle$ برای ولگشت هاداماردی ۲ بعدی با محورهای
 ثابت بعد از ۲۰ گام. $|\psi_s\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle)$ تابع توزیع متقارنی در ولگشت های ۱ بعدی
 ایجاد می کرد و $|\psi^- \rangle = 1/\sqrt{2}(|RL\rangle - |LR\rangle)$ یکی از حالات در هم تنیده بل است. ۹۲
- ۱۴.۳ تابع توزیع احتمال (طرف چپ) و تابع توزیع PME (طرف راست) به ازای حالات اولیه (به ترتیب
 از بالا به پایین) $|R\rangle \otimes |R\rangle$ ، $|R\rangle \otimes |\psi_s\rangle$ و $|\psi_s\rangle \otimes |\psi_s\rangle$ برای ولگشت هاداماردی ۲ بعدی با محورهای
 تصادفی بعد از ۲۰ گام. $|\psi_s\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle)$ تابع توزیع متقارنی در ولگشت های ۱
 بعدی ایجاد می کرد و $|\psi^- \rangle = 1/\sqrt{2}(|RL\rangle - |LR\rangle)$ یکی از حالات در هم تنیده بل است. ۹۳
- ۱.۴ حالت‌های ممکن برای مکان n وقتی (a) هیچ مسیری از بین نرفته باشد، (b) مسیر سمت چپ از
 بین رفته باشد، (c) مسیر سمت راست از بین رفته باشد و (d) هر دو مسیر از بین رفته باشند.
 جهت پیکانها نمایانگر جهت شار احتمال است که با L و R مشخص می شود. ۱۰۶
- ۲.۴ $K(p)$ بر حسب p ۱۱۳
- ۳.۴ خلوص سامانه بر حسب t به ازای مقادیر مختلف p . دقت کنید به ازای $p = 0$ (تحول همدوس)
 ، خلوص تغییری نمی کند. ۱۱۵
- ۴.۴ واریانس بر حسب t به ازای حالات اولیه مختلف در رابطه ۱۰۵.۴. منحنی های پیوسته نشان
 دهنده نتیجه تحلیلی رابطه ۹۹.۴ و شاخص های گسسته متناظر، نتیجه شبیه سازی عددی
 هستند. ۱۲۳
- ۵.۴ نگاتیویتی سامانه بر حسب p به ازای $t = 50$ ، در حضور نوفه مکانی تعریف شده در رابطه ۷۶.۴
 (منحنی ضخیم) و نوفه سکه تعریف شده در رابطه ۱۰۸.۴ (منحنی نازک). حالت اولیه از رابطه
 ۱۰۵.۴ با $\theta = \pi/4$ ، $\phi = \pi/2$ انتخاب شده است. ۱۲۵
- ۶.۴ نگاتیویتی سامانه بر حسب t ، در حضور نوفه مکانی تعریف شده در رابطه ۷۶.۴. منحنیها از بالا
 به پایین مشخص کننده نگاتیویتی سامانه هستند وقتی که شدت نوفه p از ۰ تا ۱ با گامهای ۰.۱
 تغییر کند. بالاترین منحنی (منحنی ضخیم) نگاتیویتی سامانه در حالت همدوس یا $p = 0$ است.
 تابع توزیع احتمال بر حسب x در حضور نوفه مکانی ۷۶.۴ برای (a) $p = 0.01$ ، (b) $p = 0.1$ و
 (c) $p = 0.9$. خطوط نازک، تابع توزیع احتمال ولگرد همدوس را نشان می دهند که اگر چه در
 نیمی از مکانها صفر است و لی برای تمام مکانها رسم گردیده تا امکان مقایسه آن با حالت اشغال
 تمام مکانها در حضور نوفه مکانی فراهم گردد. ۱۲۸
- ۸.۴ تابع توزیع احتمال برای نوفه های شدید (a) $p = 0.99$ ، (b) $p = 0.995$ و (c) $p = 1$. منحنی
 نازک و هموار در تمام شکلها تابع توزیع احتمال به ازای $p = 0.97$ است که این نقطه تقریباً
 نقطه بحرانی میزان نوفه است که ماهیت هموار بودن تابع توزیع به ازای مقادیر نوفه بیشتر از این
 مقدار کم کم از بین رفته و تابع توزیع احتمال زبر می شود. ۱۲۹

لیست جداول

۱.۱	شیب انحراف معیار به عنوان تابعی از زمان برای خانواده $(\mathbf{H}, \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}, \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}, \dots)$. شیب $\Delta\sigma/\Delta t$ بوسیله روش رگرسیون به ازای $t \geq 10$ به دست آمده است. σ_1 مشخص کننده
۲۵	انحراف معیار ولگشت کوانتومی یک بعدی است.
۲.۱	شیب انحراف معیار به عنوان تابعی از زمان و مقایسه آن با الگویی که برای آن پیشنهاد شده است. شیب $\Delta\sigma/\Delta t$ بوسیله روش رگرسیون به ازای $t \geq 10$ به دست آمده است. σ_1 مشخص کننده
۲۶	انحراف معیار ولگشت کوانتومی یک بعدی است.
۳.۱	شیب تغییرات زمانی انحراف معیار ولگشت های کوانتومی ۲ بعدی $(\Delta\sigma/\Delta t)$ به ازای حالات
۲۷	اولیه و عملگرهای سکه متفاوت.
۱.۳	مقدار چشمداشتی میزان در هم تنیدگی فضای سکه بعد از اندازه گیری مکان برای ولگشت های هاداماردی محور ثابت و ولگشت هاداماردی با محورهای تصادفی. تعداد گام $t = 20$ در نظر
۹۴	گرفته شده است.

♦ فصل

پیش‌گفتار

از اوایل قرن بیستم، مطالعات نظری و شواهد آزمایشگاهی دیدگاه دانشمندان را به سمتی سوق می‌داد که بپذیرند، دنیای فیزیکی از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می‌کند. این نگرش در اوایل دهه ۱۹۸۰ باعث شد که مانین^۱ [۱] و فاینمن^۲ [۲] بطور مستقل این پیشنهاد را مطرح کنند که: "جهان فیزیکی بطور کامل می‌تواند توسط رایانه‌های کوانتومی شبیه‌سازی شود". یک دهه بعد تحقیقات نظری و تلاش برای ساخت رایانه‌های کوانتومی بر پایه قوانین مکانیک کوانتومی نظیر برهم‌نهی^۳ و تداخل کوانتومی^۴ به عنوان یکی از داغترین زمینه‌های تحقیقاتی مطرح شد [۳، ۴]. الگوریتم‌های دویچ^۵ (۱۹۸۵) و دویچ-جوزا^۶ (۱۹۹۲) جزء اولین الگوریتم‌هایی بودند که نشان دادند رایانه‌های کوانتومی می‌توانند در حل برخی از مسائل، بسیار بهتر از همتای کلاسیکی خود عمل کنند. الگوریتم سیمون^۷ (۱۹۹۴) نیز از اولین مثالهایی بود که نشان می‌داد الگوریتم‌های کوانتومی می‌توانند مسئله محاسبه تابع نامعلوم را

^۱Manin

^۲Feynman

^۳Superposition

^۴Quantum interference

^۵Deutsch

^۶Deutsch-Jozsa

^۷simon

با تعداد جستاری^۸ از مرتبه چند جمله‌ای^۹ حل کند در حالی که بهترین الگوریتمهای کلاسیک این کار را با تعداد نمایی^{۱۰} از جستارها حل می‌کنند [۵، ۶]. در سال ۱۹۹۴ شر^{۱۱} الگوریتم کوانتومی پیشنهاد داد که مسئله پیدا کردن عاملهای اول یک عدد دلخواه را به صورت نمایی از همتای کلاسیکی خود سریعتر انجام می‌داد [۷، ۸]. در سال ۱۹۹۶ نیز گراور^{۱۲} الگوریتم کوانتومی طراحی کرد که جستجو در یک بانک اطلاعاتی نامرتب را بصورت نمایی سریعتر از تمام الگوریتمهای کلاسیکی شناخته شده انجام می‌داد [۹].

در میان الگوریتمهای کلاسیکی، تعداد زیادی از آنها بر پایه ولگشت‌های کلاسیکی^{۱۳} هستند. شبیه‌سازی زنجیره مارکف^{۱۴}، که اکنون یکی از ابزارهای قدرتمند در طراحی الگوریتمها است [۱۰]، یکی از این نمونه‌ها است. همانند نقش ولگشت‌های کلاسیکی در الگوریتمهای کلاسیکی، ولگشت‌های کوانتومی^{۱۵} نیز نقش بسیار مهمی در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی ایفا می‌کنند.

ولگشت‌های کوانتومی که امروزه به عنوان تعمیم کوانتومی ولگشت‌های کلاسیکی شناخته می‌شوند، از قوانین مکانیک کوانتومی مثل برهم‌نهی و تداخل استفاده می‌کنند. در ولگشت‌های کلاسیکی، ولگرد با احتمال مشخصی در فضای مکان حرکت می‌کند در حالی که ولگشت‌های کوانتومی، که در آنها برهم‌نهی کوانتومی مجاز است، در یک زمان مسیرهای مختلفی توسط ولگرد پیموده می‌شود و دامنه حالت آن در یک مکان خاص حاصل تداخل کوانتومی تمامی مسیرهای ممکن منتهی به آن مکان است [۱۱، ۱۲].

همانند ولگشت‌های کلاسیکی، که کاربردهای متعددی در تمام شاخه‌های علمی پیدا کرده است [۱۳، ۱۴]، ثابت شده است که ولگشت‌های کوانتومی نیز می‌توانند ابزاری قدرتمند در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و ابزاری برای مطالعه، کنترل و توضیح تحول بسیاری از پدیده‌های فیزیکی باشند. در ادامه بطور مختصر به تاریخچه پیدایش ولگشت‌های کوانتومی خواهیم پرداخت و بصورت اجمالی فرایندی که باعث ورود ولگشت‌های کوانتومی در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و توضیح پدیده‌های فیزیکی شده را از نظر خواهیم گذراند.

^۸Inquiry^۹Polynomial^{۱۰}Exponential^{۱۱}Shor^{۱۲}Grover^{۱۳}Classical Random Walk^{۱۴}Markov chain^{۱۵}Quantum Walk

با وجود اینکه ولگشت‌های کوانتومی برای اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط آهارونف^{۱۶} معرفی شد، اما ایده اصلی پیمایش همزمان مسیرهای مختلف به سالهای گذشته و کارهای ریازونف^{۱۷} (۱۹۵۸) [۱۵] و فاینمن [۱۶] باز می‌گردد. میر^{۱۸} در سال ۱۹۹۶ حرکت ذرات کوانتومی را در شبکه کوانتومی مورد مطالعه قرار داد که در آن حرکت ذرات با توجه به تداخل کوانتومی دامنه‌های چپ و راست در نظر گرفته می‌شد [۱۷، ۱۸]. بر اساس این ایده‌ها مفهوم ولگشت کوانتومی شکل گرفته و امروزه به دو صورت استاندارد "پیوسته"^{۱۹} [۱۹] و "گسسته"^{۲۰} [۲۰] مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نوع خاصی از ولگشت‌های کوانتومی گسسته که به ولگشت‌های هاداماردی مشهور هستند توسط امباینیس^{۲۱} و همکارانش در سال ۲۰۰۱ مورد مطالعه گرفت [۱۱].

هر دو نوع ولگشت کوانتومی کاربرد وسیعی در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی برای حل مسائل مختلف دارند که از آن میان می‌توان الگوریتم‌های مختلف جستجو بر پایه ولگشت‌های کوانتومی را نام برد [۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶]. همچنین ولگشت‌های کوانتومی در بسیاری از مسائل که بر اساس مدل جستاری^{۲۲} طراحی شده هستند قابل کاربرد است [۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲].

تا کنون آزمایش‌های عملی متعددی با روش‌های گوناگون برای ولگشت‌های کوانتومی گزارش شده است که در ادامه به چند نمونه از آنها اشاره خواهیم کرد. انجام ولگشت کوانتومی پیوسته با ۲-کیوبیت^{۲۳} [۳۳] و ولگشت کوانتومی گسسته با ۳-کیوبیت [۳۴] با روش تشدید مغناطیسی هسته^{۲۴}، انجام ولگشت کوانتومی بوسیله سدیم با چگالش بوز-انیشتن^{۲۵} [۳۵] و انتقال فوتون‌ها در شبکه‌ای از موجبرها برای انجام ولگشت‌های گسسته [۳۶] فقط نمونه‌ای از این آزمایش‌های عملی هستند. روش‌های متعدد دیگری نیز توسط محققان برای آزمایش عملی ولگشت‌های کوانتومی پیشنهاد شده است که از آن میان می‌توان روش دام یونی^{۲۶} [۳۷]، اتم‌های خنثی دمای پایین در دام اپتیکی [۳۸، ۳۹]، چگالش

^{۱۶}Aharonov^{۱۷}Riazanov^{۱۸}Meyer^{۱۹}Continues^{۲۰}Discrete^{۲۱}Ambainis^{۲۲}Query model^{۲۳}qbit^{۲۴}Nuclear Magnetic Resonance (NMR)^{۲۵}Bose-Einstein^{۲۶}Ion trap

بوز-انیشن [۴۰]، آرایه ای از نقاط کوانتومی^{۲۷} [۴۱] و کاواک الکتروپنایمیکی [۴۲] را نام برد.

به موازات تمام پیشرفتهایی که در زمینه رایانش کوانتومی و الگوریتمهای کوانتومی از ابتدای تولد مکانیک کوانتومی صورت پذیرفت، بررسی یکی دیگر از خواص مکانیک کوانتومی تحولی دیگر ایجاد کرده بود. این خاصیت مکانیک کوانتومی که به هم تنیدگی^{۲۸} معروف است و در حال حاضر سر منشأ بسیاری از پیشرفتهای کنونی علمی محسوب می شود، چیزی بیش از برهم نهی حالات کوانتومی نیست. در بر هم کنش حالات کوانتومی حالتی بوجود می آید که موجودیتی واحد دارند و نمی توان آنها را بر اساس حالات موضعی توضیح داد. بطور مثال حالت یکتایی^{۲۹} را که از بر هم کنش دو ذره با اسپین ۱/۲ تشکیل می شود به هیچ عنوان نمی توان به صورت حالات ضربی از اسپین های ۱/۲ نوشت. در چنین حالتی یک نوع همبستگی کوانتومی وجود دارد که به آن در هم تنیدگی گفته می شود و به جرأت می توان گفت یکی از عجیب ترین پدیده های طبیعت است و بررسی آن انقلابی در عرصه رایانش و اطلاعات کوانتومی بوجود آورده است.

در هم تنیدگی اولین بار توسط شرودینگر^{۳۰} در اوایل قرن گذشته مورد توجه قرار گرفت، اما پذیرفتن وجود حالات در هم تنیده با نوعی همبستگی کوانتومی برای بسیاری از دانشمندان قابل قبول نبود. گروهی از دانشمندان وجود چنین حالتی را دلیل بر نقض مکانیک کوانتومی می دانستند. انیشن^{۳۱}، پادولسکی^{۳۲} و رزن^{۳۳} (EPR) [۴۳] با فرضهایی بر پایه نسبیت عام و وجود عناصر واقعی^{۳۴} نشان دادند که وجود حالات در هم تنیده به تناقض منجر می شود و بنابراین مکانیک کوانتومی نیاز به اصلاح دارد. بر این اساس آنها نظریه متغیرهای نهان^{۳۵} را برای تکمیل مکانیک کوانتومی پیشنهاد کردند که ۳۰ سال بعد توسط جان بل^{۳۶} رد شد [۴۴].

بررسی و مطالعه خواص در هم تنیدگی به کشف فرایندهای بسیار جالبی منتهی شد که دوربری کوانتومی^{۳۷}، کد

^{۲۷}Quantum dots

^{۲۸}Entanglement

^{۲۹}Singlet

^{۳۰}Schrödinger

^{۳۱}Einstein

^{۳۲}Podolsky

^{۳۳}Rosen

^{۳۴}elements of reality

^{۳۵}Hidden variables

^{۳۶}John Bell

^{۳۷}Quantum Teleportation

بندی ابر فشرده^{۳۸} و رمزنگاری کوانتومی^{۳۹} از آن جمله‌اند. با پیشرفت علم، آزمایش‌های عملی برای اثبات وجود این پدیده در اواخر قرن گذشته میسر شد.

اولین آزمایش عملی دوربری کوانتومی در سال ۱۹۹۷ انجام شد [۴۵] که در آن قطبش یک فوتون به فوتونی که هرگز در مجاورت فوتون اولیه قرار نداشت منتقل شد. بعد از اولین آزمایش دوربری، تحقیقات عملی در هر دو زمینه دانشگاهی و صنعتی بیشتر شد. در سال ۱۹۹۸ گروه‌های متعددی در سراسر دنیا به پیشرفت‌های عملی زیادی در محاسبات کوانتومی و دوربری کوانتومی دست یافتند. در فوریه ۱۹۹۸ گروه دی‌مارتینی [۴۶] گزارشی از انجام اپتیکی روش پوپسکیو ارائه کردند. در ماه می همان سال گروه پن [۴۷] به صورت عملی معاوضه در هم تنیدگی را نشان دادند که در آن در هم تنیدگی بین دو فوتون به فوتون سومی که با آنها هیچ ارتباطی نداشت منتقل می‌شد. چوانگ [۴۸] و همکارانش اولین آزمایش عملی الگوریتم شُر را با استفاده از تکنیک (NMR) انجام دادند. سپس در اکتبر ۱۹۹۸ گروه کیمبل [۴۹] موفق شدند اطلاعات مربوط به دامنه و فاز یک پرتو ورودی را به پرتوی دیگر دوربری کنند. و در نوامبر نیلسن و همکارانش [۵۰] اطلاعات مربوط به هسته اتم کربن را به اتم هیدروژن دوربری کردند.

امروزه در هم تنیدگی به عنوان یک جزء لاینفک نه تنها در حیطه اطلاعات کوانتومی پذیرفته شده است بلکه به عنوان پدیده‌ای منحصر به فرد در رایانش کوانتومی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تحقیق پیش رو سعی کرده ایم مفهوم در هم تنیدگی در ولگشت‌های کوانتومی را مورد بررسی قرار دهیم. از این رو این پایان‌نامه ارتباط بین ولگشت‌های کوانتومی از حیطه رایانش کوانتومی و در هم تنیدگی کوانتومی از حیطه اطلاعات کوانتومی را به عنوان دو عنصر اصلی از تحولات و پیشرفت‌های ۵۰ سال گذشته مورد بررسی قرار می‌دهد.

در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اول به معرفی ولگشت‌های کوانتومی ۱ بعدی و ۲ بعدی پرداخته و خواص آنها را به اجمال معرفی می‌کنیم. در فصل دوم مختصراً به مفهوم در هم تنیدگی پرداخته و در کنار معرفی خواص و ویژگی‌های آن، معیارها و سنجه‌هایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار گرفته‌اند، را معرفی کرده ایم. در فصل سوم با به دست آوردن روابط تحلیلی به بررسی در هم تنیدگی در ولگشت‌های کوانتومی ۱ و ۲ بعدی پرداخته ایم. در این فصل روابط دقیقی برای ولگشت‌های کوانتومی به دست آورده ایم که امکان محاسبه و بررسی تاثیر در هم تنیدگی سکه-سکه و در هم تنیدگی مکان-مکان را بر ولگشت‌های کوانتومی ۲ بعدی را فراهم می‌کند. این روابط و روش ماتریس مشخصه که در این فصل معرفی گردیده گامی در جهت پر کردن خلأ عدم وجود روابط تحلیلی در بررسی در هم تنیدگی در ولگشت‌های کوانتومی خواهد بود. بعلاوه در این فصل نوع جدیدی از ولگشت‌های کوانتومی ۲ بعدی

^{۳۸}Super dense coding

^{۳۹}Quantum cryptography

را معرفی می کنیم که در آنها محورهای حرکت بصورت تصادفی و همدوس انتخاب می شوند. در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه این نوع از ولگشت کوانتومی می تواند مقدار در هم تنیدگی پس از اندازه گیری^{۴۰} را بهینه کند. در فصل پایانی روابط دقیقی برای محاسبه واریانس در ولگشتهای کوانتومی ارائه می کنیم که این روابط برای هر نوع نوفه محیطی قابل کاربرد است. از آنجایی که واریانس در ولگشت های کوانتومی بصورت توانی از همتای کلاسیکی خود بزرگتر است، الگوریتم هایی که بر پایه ولگشت های کوانتومی ساخته می شوند از نوع کلاسیکی خود بسیار سریعترند و به همین دلیل بررسی نوفه در ولگشت های کوانتومی بسیار مهم است. در قسمت پایانی این پایان نامه با به دست آوردن رابطه ای کلی برای واریانس در ولگشت های کوانتومی، ثابت می کنیم که نوفه مکانی بر خلاف نوفه روی سکه در ولگشت های کوانتومی باعث کاهش واریانس نمی شود. بعلاوه نشان می دهیم که چگونه نوفه مکانی باعث هموار شدن و بهینه شدن تابع توزیع احتمال خواهد شد.

^{۴۰}Post measurement

فصل ۱

ولگشت های کوانتومی گسسته

ولگشتهای کوانتومی^۱ را می توان همتای کوانتومی ولگشت های کلاسیکی^۲ در نظر گرفت. از آنجایی که ولگشت های کلاسیکی در حل بسیاری از مسائل و همچنین در توسعه الگوریتم های کلاسیکی بسیار موفق عمل کرده است، انتظار می رود بتوان از ولگشت های کوانتومی در ساخت الگوریتم های کوانتومی بهره جست به طوریکه این الگوریتم ها بتوانند در حل مسائل بسیار سریعتر عمل کنند. ولگشت های کوانتومی یکی از جدیدترین زمینه های تحقیقاتی است که اولین مقاله آن کمتر از ۲۰ سال پیش توسط آهارونوف^۳ ارائه گردید [۵۱].

از آنجایی که نظریه ولگشت های کلاسیکی در توسعه الگوریتم های کلاسیکی بسیار موفق بوده و بسیاری از بهینه ترین الگوریتم های کلاسیکی بر پایه آن ساخته شده اند، گرایش بسیار زیادی به فهم و استخراج خواص ولگشت های کوانتومی در میان محققان ایجاد شده است که دور نمای آن بسط و توسعه مفاهیم کوانتومی به منظور معرفی الگوریتم های کوانتومی بر پایه ولگشت های کوانتومی است. در حال حاضر الگوریتم هایی بر پایه ولگشت های کوانتومی معرفی شده است که بسیار سریعتر از همتای کلاسیکی خود عمل می کنند، اما این تحقیقات هنوز در ابتدای راه بوده و ادامه راه نیازمند تحقیقات گسترده تری است.

تا کنون دو نوع از ولگشت های کوانتومی معرفی شده است. نوع اول ولگشت های کوانتومی گسسته^۴ نامیده می

^۱Quantum Walk

^۲Classical Random Walk

^۳Aharonov

^۴Discrete Time Quantum Walk

شود که شامل ولگرد^۵ و سکه^۶ کوانتومی و همچنین عملگر تحول است که این عملگر به صورت گسسته روی هر دو زیر سامانه^۷ کوانتومی (سکه و ولگرد) عمل می کند. نوع دوم، ولگشت های کوانتومی پیوسته^۸ نامیده می شود که در این مدل، عملگر تحول در هر زمانی روی سامانه می تواند عمل کند و قید گسسته بودن زمان در آن وجود ندارد. مقاله [۵۲] مرور خوبی بر این دو نوع ولگشت کوانتومی دارد.

مهمترین عاملی که باعث بوجود آمدن تفاوت های اساسی بین ولگشت های کلاسیکی و کوانتومی می شود این حقیقت است که در ولگشت های کوانتومی هیچ اندازه گیری روی سامانه^۹ تا آخرین مرحله انجام نمی گیرد. بنابراین سامانه به صورت کوانتومی باقی خواهد ماند و تداخل بین حالات کوانتومی باعث بوجود آمدن تفاوت های قابل توجهی در مقایسه با ولگشت های کلاسیکی می شود. به بیان دیگر اگر در هر گام اندازه گیری روی سامانه انجام گیرد، سامانه به یکی از حالت های خود تصویر خواهد شد و تداخل کوانتومی از بین خواهد رفت، بنابراین اگر در ولگشت های کوانتومی بعد از هر گام اندازه گیری روی سامانه انجام گیرد، در نهایت چیزی جز یک ولگشت کلاسیکی نخواهیم داشت.

اگر چه الگوریتم های کوانتومی بسیار خوبی نظیر "دویچ و جوزا"^{۱۰} [۵۳] و "شر"^{۱۱} [۷] بر پایه تبدیل فوریه کوانتومی^{۱۲} و "گروور"^{۱۳} [۵۴] با استفاده از روش افزایش دامنه^{۱۴} معرفی شده است، اما طراحی الگوریتم های کوانتومی مناسب به دلیل ذات غیر شهودی مکانیک کوانتومی کار ساده ای نیست. از طرفی طراحی الگوریتم هایی که به خوبی الگوریتم های کلاسیک باشند کافی نیست، بلکه باید الگوریتم های کوانتومی از همتای کلاسیک خود بهتر عمل کنند، در غیر این صورت اضافه کردن پیچیده گیهای مکانیک کوانتومی به الگوریتم ها کار بیهوده ای خواهد بود. ولگشت های کوانتومی به عنوان یک ابزار جدید نقش مهمی در زمینه طراحی الگوریتم های کوانتومی دارد که در فصل های آینده به فوائد آن خواهیم پرداخت.

^۵Walker

^۶Coin

^۷Sub system

^۸Continous Time Quantum Walk

^۹System

^{۱۰}Deutsch and Josza

^{۱۱}Shor

^{۱۲}Quantum Fourier transform

^{۱۳}Grover

^{۱۴}Amplitude amplification

در ادامه این فصل به بررسی کامل ولگشت های کوانتومی روی خط با عملگر سکه "هادامارد"^{۱۵} خواهیم پرداخت و کلی ترین حالت ممکن ولگشت های کوانتومی را با عملگر کلی $SU(2)$ بررسی خواهیم کرد.

۱.۱ ولگشت کوانتومی روی خط

ولگشت های کوانتومی روی خط^{۱۶} ساده ترین نوع ولگشت های کوانتومی است که بیشترین مطالعه نیز در مورد این نوع از ولگشت های کوانتومی صورت گرفته است. مطالعه ولگشت های کوانتومی روی خط به دلایل زیر بسیار حائز اهمیت است.

- ولگشت های کوانتومی روی خط می تواند برای ساخت مدل های پیچیده تری مثل ولگشت های کوانتومی روی دایره یا ولگشت های کوانتومی روی گرافها مورد استفاده قرار گیرد.
- مدل ساده و حل پذیر ولگشت های کوانتومی روی خط می تواند در درک بهتر ساختار و خواص ولگشت های کوانتومی بسیار مفید باشد.
- از ولگشت های کوانتومی روی خط می توان به عنوان آزمونی برای بررسی ماهیت کوانتومی^{۱۷} در آزمایشهای عملی رایانش کوانتومی^{۱۸} بهره جست.

در ولگشت های کوانتومی روی خط سامانه شامل ولگرد و سکه است که عملگری بنام عملگر سکه^{۱۹} روی زیر فضای سکه عمل کرده و عملگر دیگری که به عملگر انتقال^{۲۰} معروف است براساس حالت سکه، ولگرد را به چپ یا راست منتقل می کند. واضح است که در ولگشت های کوانتومی روی خط کافی است سکه بتواند دو حالت متمایز داشته باشد تا بر اساس آن ولگرد بتواند به چپ یا راست برود. بنابراین داشتن فضای هیلبرت^{۲۱} حداقل دو بعدی برای

^{۱۵}Hadamard

^{۱۶}Quantum Walk on the Line

^{۱۷}Quantumness

^{۱۸}Quantum Computation

^{۱۹}Coin Operator

^{۲۰}Transformation Operator

^{۲۱}Hilbert Space

سکه کافی است. در ادامه این بخش مروری بر ساختار ریاضی ولگشت های کوانتومی روی خط خواهیم داشت. سپس به بررسی دقیق خواص آن خواهیم پرداخت.

۱.۱.۱ ساختار ولگشت های کوانتومی روی خط

مهمترین اجزای ولگشت های کوانتومی روی خط؛ سکه، ولگرد، عملگرهای تحول روی سکه و ولگرد و مشاهده پذیرها هستند.

سکه و ولگرد: ولگرد، یک سامانه کوانتومی با فضای هیلبرت بینهایت بعدی \mathcal{H}_p است که هر بردار در این فضا بر حالتی از ولگرد دلالت دارد که آن را با "مکان" ولگرد $|\text{Position}\rangle$ نشان می دهیم. دقت کنید که پایه های این فضا $|i\rangle_p$ و هر ترکیب خطی^{۲۲} ای از آنها به شکل $\sum_i \alpha_i |i\rangle_p$ که $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$ ، یک حالت مجاز برای $|\text{Position}\rangle$ هستند.

سکه، یک سامانه کوانتومی با فضای هیلبرت ۲ بعدی^{۲۳} \mathcal{H}_c است. حالت سکه $|\text{Coin}\rangle$ می تواند یکی از پایه های این فضا یعنی $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ ^{۲۴} و یا هر ترکیب خطی از آنها باشد. بنابراین حالت کلی $|\text{Coin}\rangle = a|R\rangle_c + b|L\rangle_c$ با $|a|^2 + |b|^2 = 1$ یک حالت مجاز برای $|\text{Coin}\rangle$ است. حالت کلی ولگرد کوانتومی در فضای هیلبرت کلی $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_p$ تعریف می شود.

تا کنون در بررسی ولگشت های کوانتومی، حالت اولیه به صورت $|\psi\rangle_{\text{initial}} = |\text{position}\rangle_{\text{initial}} \otimes |\text{coin}\rangle_{\text{initial}}$ در نظر گرفته شده است که مبتنی بر این فرض است که هیچ گونه در هم تنیدگی اولیه بین مکان ولگرد و سکه وجود ندارد. ما در فصلهای آینده نشان خواهیم داد که وجود در هم تنیدگی اولیه بین مکان ولگرد و سکه چه تاثیری بر خواص ولگشت های کوانتومی خواهد داشت.

عملگرهای تحول: تحول در ولگشت های کوانتومی شامل دو قسمت است که بسیار شبیه به همتای کلاسیکی خود است. در ولگشت های کلاسیکی، شانس و احتمال نقش کلیدی در تحول ولگشت کلاسیکی دارد. به طور مثال ما سکه ای را می اندازیم و سپس بر اساس "شیر" یا "خط" بودن سکه که کاملاً به صورت تصادفی به وقوع می پیوندد به سمت "راست" یا "چپ" حرکت می کنیم. در ولگشت های کوانتومی نقش انداختن سکه بر عهده عملگر تحول در

^{۲۲}Superposition

^{۲۳}فضای هیلبرت ۲ بعدی برای ولگشت های کوانتومی روی خط کافی است، اما در فصلهای آینده نشان خواهیم داد که برای ولگشت های کوانتومی دوبعدی حداقل به فضای هیلبرت ۴ بعدی برای سکه نیاز خواهیم داشت

^{۲۴}معمولاً برای نمایش این پایه ها از اسپینورها در پایه Z استفاده می کنند. $|L\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $|R\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

فضای سکه است که معمولا با \hat{C} نشان داده می شود و وظیفه آن ایجاد ترکیب خطی از حالت های سکه است. مفهوم احتمال و شانس در اینجا نیز وارد می شود اما با این تفاوت که احتمال اینکه سکه در حالت خاصی باشد بعد از اندازه گیری مشخص می شود و قبل از اندازه گیری عملا سکه در تمام حالات ممکن ترکیب خطی حالت خود وجود دارد. یکی از مشهورترین عملگرهای سکه، عملگر هادامارد (\hat{H}) است که به علت گستردگی کاربرد، ولگشت های کوانتومی با عملگر سکه هادامارد را به نام خاص "ولگشت هادامارد"^{۲۵} می شناسند. عملگر سکه \hat{H} به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|), \quad (۱.۱)$$

که نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (۲.۱)$$

اثر این عملگر روی پایه های فضای سکه، تولید ترکیب خطی از آنهاست

$$\begin{aligned} \hat{H}|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle + |L\rangle) \\ \hat{H}|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle - |L\rangle). \end{aligned} \quad (۳.۱)$$

عملگر دیگری که در ولگشت های کوانتومی وجود دارد و نقش حرکت به چپ و راست در ولگشت های کلاسیک را ایفا می کند، عملگر انتقال^{۲۶} نام دارد که معمولا با S نشان داده می شود. این عملگر یک عملگر یکانی است که با توجه به حالت سکه، ولگرد را یک گام به راست یا یک گام به چپ می برد.

$$S = \sum_x |x+1\rangle\langle x| \otimes |R\rangle\langle R| + |x-1\rangle\langle x| \otimes |L\rangle\langle L|. \quad (۴.۱)$$

بنابر این عملگر کلی که روی فضای هیلبرت کل ولگرد اثر می کند را می توان به صورت

$$U = S.(I_p \otimes H), \quad (۵.۱)$$

نوشت. برای هر گام باید یک بار این عملگر روی سامانه اعمال شود. بنابراین حالت یک ولگرد کوانتومی با حالت اولیه $|\psi\rangle_{\text{initial}}$ ، بعد از t گام به صورت زیر خواهد بود

$$|\psi\rangle_t = U^t |\psi\rangle_{\text{initial}}. \quad (۶.۱)$$

^{۲۵}Hadamard Walk

^{۲۶}Translation operator

مشاهده پذیرها: یکی از تفاوت‌های عمده و البته از مزیت‌های ولگشت های کوانتومی در مقایسه با ولگشت های کلاسیکی، تداخل بین حالات کوانتومی سکه و ولگرد بعد از اعمال مکرر U است. در عین حال ما برای پی بردن به نتیجه این تداخلها نیازمند اندازه گیری خواهیم بود. برای مثال برای به دست آوردن اطلاعات در مورد سکه می توانیم با مشاهده پذیرهایی نظیر

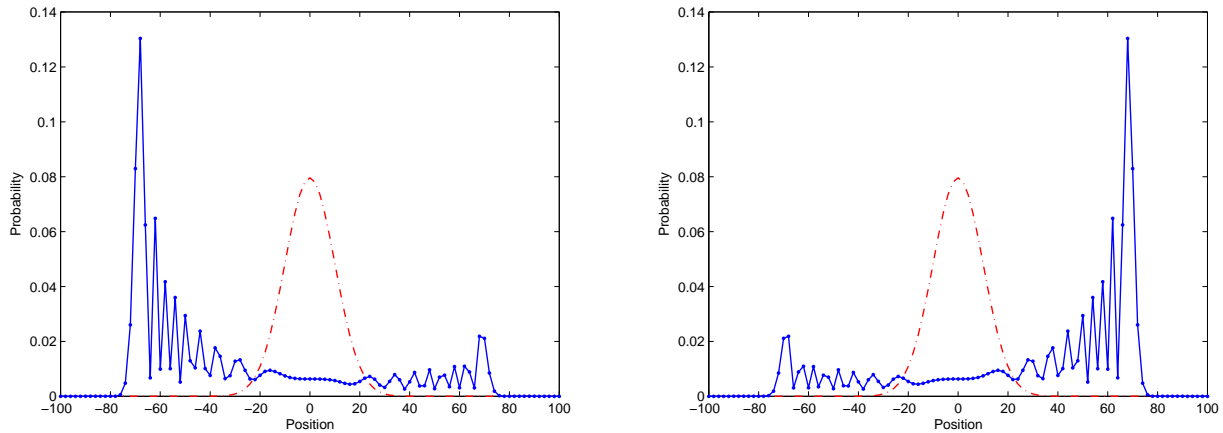
$$\hat{M}_c = \alpha|R\rangle\langle R| + \beta|L\rangle\langle L| \quad (۷.۱)$$

اندازه گیری روی سکه انجام دهیم و یا با مشاهده پذیرهایی نظیر

$$\hat{M}_p = \sum_i a_i |i\rangle\langle i| \quad (۸.۱)$$

اطلاعاتی راجع به مکان به دست آوریم. در شکل ۱.۱ تابع توزیع احتمال بعد از ۱۰۰ گام ترسیم شده است. این توابع، احتمال یافتن ولگرد کوانتومی در یک مکان خاص را مشخص می کنند. اولین اختلاف بارز این توابع توزیع در مقایسه با توابع توزیع احتمال ولگشت های کلاسیکی این است که بر خلاف توابع توزیع احتمال ولگشت های کلاسیکی که به صورت گاوسی^{۲۷} هستند (نمودار خط چین در شکل ۱.۱)، این توابع شکل کاملاً پیچیده و نامتقارنی دارند. این عدم تقارن ارتباط مستقیم با حالت اولیه ولگشت های کوانتومی دارد. به طور مثال اگر $|\psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |R\rangle$ باشد، تقارن سمت راست در شکل ۱.۱ را خواهیم داشت و اگر $|\psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |L\rangle$ باشد، نمودار سمت چپ. تفاوت دیگر، احتمال یافتن ولگرد در مکانهای نزدیک به مبدأ است. بر خلاف انتظار، احتمال یافتن ولگرد در مکانهای نزدیک مبدأ کمتر از سایر نقاط است در حالی که در ولگشت های کلاسیکی احتمال یافتن ولگرد در مبدأ و اطراف آن از همه جا بیشتر است. نکته جالب دیگری که از نمودارها مشهود است این است که، بر خلاف ولگشت های کلاسیک که بعد از t گام می توان ولگرد را در هر مکانی (هرچند با احتمال ناچیز) بین $[-t, t]$ پیدا کرد، ولگردهای کوانتومی را به هیچ وجه نمی توان در مکانهای فرد(زوج) بعد از تعداد گامهای زوج(فرد) پیدا کرد. این تفاوتها و تفاوتهای ارزنده تری که در بخشهای بعدی به آن خواهیم پرداخت، حاصل تداخل حالات کوانتومی هستند که مشابه کلاسیک ندارند.

^{۲۷}Gaussian



شکل ۱.۱: تابع توزیع احتمال: این نمودارها احتمال یافتن ولگرد کوانتومی در مکانهای مختلف را نشان می دهد. نمودار سمت راست برای $|\psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |R\rangle$ و نمودار سمت چپ برای $|\psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |L\rangle$ رسم شده اند. در هر دو نمودار احتمال یافتن ولگرد در مکانهای فرد صفر است به همین دلیل نمودارها فقط به ازای مکانهای زوج رسم شده اند. نمودار خط چین تابع توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی را نشان می دهد. در هر دو نمودار عملگر سکه هادامارد و تعداد گامها ۱۰۰ است.

۲.۱.۱ حل تحلیلی ولگشت های کوانتومی روی خط

دو روش برای حل تحلیلی ولگشت های کوانتومی روی خط وجود دارد. اولین روش بر پایه تبدیل فوریه است که به ”روش تبدیل فوریه“^{۲۸} معروف است و روش دوم ”روش شمارش مسیرها“^{۲۹} نام دارد و بر اساس شمارش تمام مسیرهای ممکن منتهی به یک حالت خاص، روابط بسته ای برای توزیع احتمال به دست می آورد. در این قسمت به تفصیل این دو روش را مورد بررسی قرار می دهیم.

روش تبدیل فوریه: استفاده از تبدیل فوریه گسسته برای حل تحلیلی ولگشت های کوانتومی روی خط اولین بار بوسیله نایاک^{۳۰} [۱۲] معرفی گردید. این روش به عنوان روشی دقیق مخصوصا برای حالت های حدی در بسیاری از مقالات دیگر نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱، ۵۵، ۵۶]. به منظور بررسی دقیقتر تحول در ولگشت های کوانتومی، نگاه خود را معطوف به یک مکان خاص مثل n می کنیم. فرض کنید $|\psi\rangle_t$ حالت ولگرد کوانتومی بعد از t گام باشد، احتمال این که ولگرد را در این مکان بیابیم چقدر است؟ واضح است که این احتمال برابر است با $|\langle n|\psi\rangle_t|^2$. از آنجایی که اندازه گیری روی مکان صورت می گیرد، سامانه بعد از اندازه گیری مولفه هایی در فضای سکه خواهد

^{۲۸}Fourier Transform approach

^{۲۹}Path counting approach

^{۳۰}Nayak