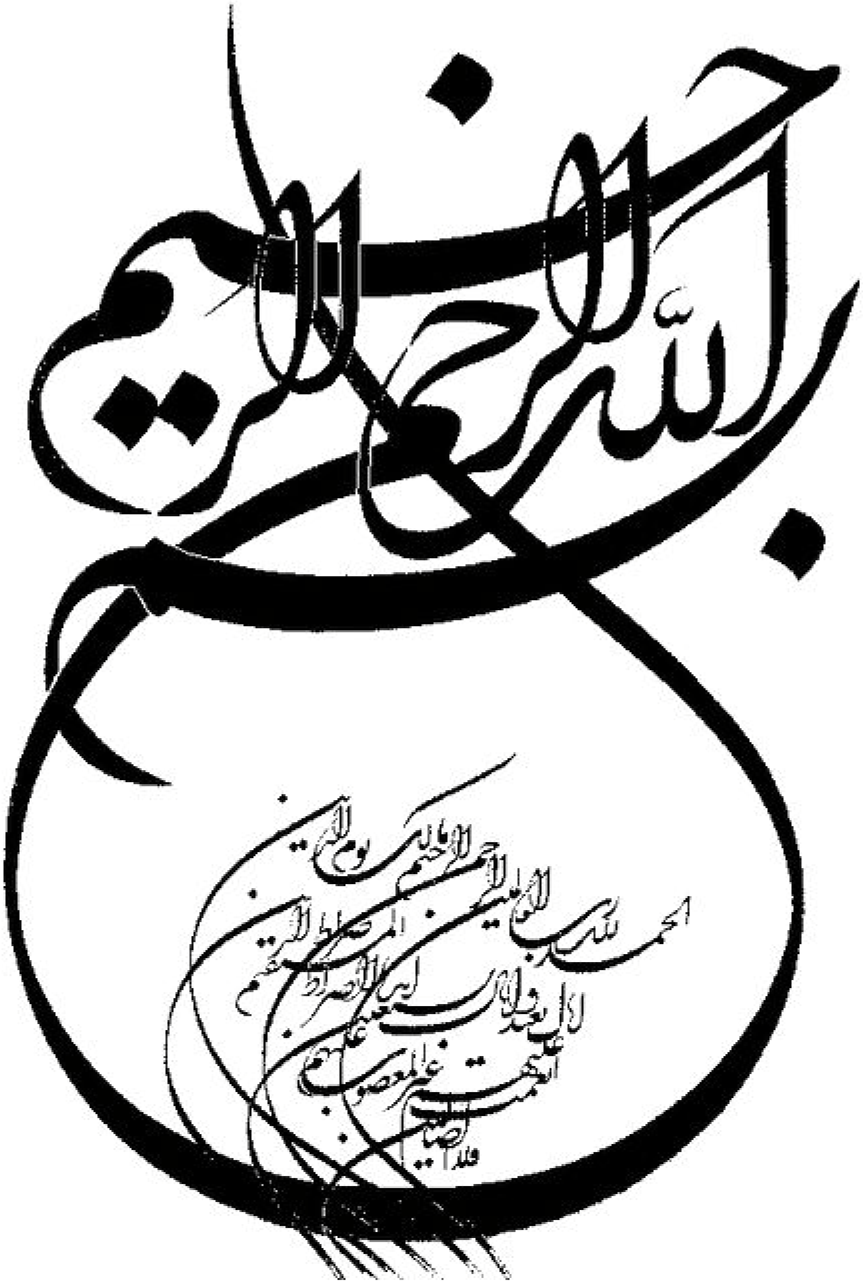
بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم آناهیتا نظری‌زاده‌زانیانی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۰۵ تحت عنوان: «**نگاشت‌های ضربی- مرزی و نرم- ضربی نامتقارن**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر حکیمه ماهیار	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب: **آناهیتا نظری زاده زانیانی** دانشجوی **رشته ریاضی(محض)**ورودی سال تحصیلی**۱۳۸۸** مقطع :**کارشناسی ارشد**دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:**آناهیتانظری زاده زانیانی**

تاریخ: ۱۳۹۰/۹/۱۶

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته**ریاضی (محض)** است که در سال**۱۳۹۰/۹/۶**در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم دکتر **فرشته سعدی** از آن دفاع شده است.

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب**آناهیتا نظری زاده زانیانی** دانشجوی رشته **ریاضی (محض)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی:**آناهیتا نظری زاده زانیانی**

تاریخ و امضا:**۱۳۹۰/۹/۱۶**

۳۳

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

نگاشت های ضربی—مرزی ونرم—ضربی نامتقارن

توسط

آناهیتا نظری زاده زانیانی

استاد راهنما

دکتر فرشته سعدی

آذر ۹۰

قدردانی

سپاس و ستایش مر خدایی را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و در های علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

سپاسگزارم از استاد گرانقدرم سرکار خانم دکتر فرشته سعدی که با صبر و شکیبایی مرا در اتمام این پایان نامه یاری نمودند و همانند یک دوست با من همراه بودند و تشکر قلبی خود را از جناب آقای دکتر سید مسعود امینی ابراز می نمایم که داوری این پایان نامه را قبول کردند و من افتخار شاگردی ایشان را نیز داشتم.

از جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی و سرکار خانم دکتر حکیمه ماهیار که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی و داور خارجی در جلسه دفاع حضور داشتند کمال تشکر را دارم.

از زحمات بی دریغ پدر و مادرم بسیار سپاسگزارم و از برادر و خواهرم که همیشه مشوق من بودند تشکر می کنم. در پایان از دوستان عزیزم و هم دوره ای هایم صادقانه قدر دانی می کنم.

آناهیتا نظری زاده زانیانی

آذر ۱۳۹۰

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این پایان نامه را به پدر و مادرم تقدیم می کنم.

چکیده

فرض کنیم ϕ و φ دو نگاشت پوشا بین جبرهای عملگری استاندارد $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ روی فضاهای باناخ X و Y باشند که در شرط $\sigma_\pi(\phi(f)\varphi(g)) = \sigma_\pi(fg)$ برای هر $f, g \in \mathcal{A}$ صدق می کنند(در اینجا $\sigma_\pi(.)$ نمایانگر طیف مرزی است). نشان داده می شود که ϕ و φ یا به صورت $\phi(T) = A_1 T A_2^{-1}$ و $\varphi(T) = A_2 T A_1^{-1}$، $T \in \mathcal{A}$، هستند که در آن A_1 و A_2 عملگرهای خطی کراندار دوسویی از X به Y هستند یا به صورت $\phi(T) = B_1 T^* B_2^{-1}$ و $\varphi(T) = B_2 T^* B_1^{-1}$ $T \in \mathcal{A}$، هستند که در آن B_1 و B_2 عملگرهای خطی کراندار دوسویی از X^* به روی Y هستند.

در بخش دیگر فرض می کنیم که A و B جبرهای یکنواختی روی فضاهای هاسدورف فشرده X و Y باشند. فرض می کنیم $\alpha \neq 0$، $A_1 \subseteq A$ و $\rho, \tau : A_1 \longrightarrow A$ و $S, T : A_1 \longrightarrow B$ نگاشت هایی دلخواه هستند همچنین فرض می کنیم برای هر $f, g \in A_1$

$$||S(f)T(g) - \alpha||_Y = ||\rho(f)\tau(g) - \alpha||_X$$

نشان داده می شود که یک یکریختی جبری حقیقی مانند $\widetilde{S} : A \longrightarrow B$ وجود دارد چنان که $\widetilde{S}(\rho(f)) = S(e_1)^{-1} S(f)$ برای هر $f \in A$. سرانجام به بررسی نگاشتهای پوشا بین جبرهای باناخ جابه جایی، یکدار و نیم ساده می پردازیم که در شرطی مرتبط با شعاع طیفی صدق می کنند.

این پایان نامه براساس مرجع های اصلی [۷]، [۱۵] و [۳۰] تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی : جبر باناخ، جبر عملگری استاندارد، جبر یکنواخت، شعاع طیفی، طیف مرزی، مرز شوکه، مرز شیلوف، نگاشت به طور ضربی حافظ طیف

فهرست مندرجات

مقدمه

نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ بین دو جبر باناخ A و B را به طور ضربی حافظ طیف گوییم اگر در شرط $\sigma(\phi(x)\phi(y)) = \sigma(xy)$ برای هر $x, y \in A$ صدق کند. مطالعه نگاشتهای پوشای حافظ طیف بین جبرهای باناخ تاریخچه ای طولانی دارد، اما مفهوم نگاشت های به طور ضربی حافظ طیف ابتدا توسط مولنار [۲۵] معرفی شد. براساس قضیه گلیسون، کاهان، زلاسکو [۳۳، ۱۷، ٦] هر نگاشت خطی $T : A \to B$، بین جبرهای باناخ جابه جایی، یکدار و نیم سادهB, A، که حافظ طیف باشد ضربی است. کووالاسکی و اسلودکوسکی در[۱۸] قضیه گلیسون، کاهان، زلاسکو را بدون فرض خطی بودن تعمیم دادند. در [۳] نیز ثابت شده است که اگر ϕ یک نگاشت جمعی پوشا بین جبر های عملگری استاندارد باشد که حافظ یک قسمت از طیف است آنگاه ϕ یا یک یکریختی‌است یا یک پاد یکریختی است.
طیف مرزی عضو x از جبر باناخ A که با $\sigma_\pi(x)$ نمایش داده می‌شود مجموعه‌ی زیر است

$$\sigma_\pi(x) = \{\lambda \in \sigma(x) : |\lambda| = \max_{z \in \sigma(x)} |z|\}$$

بررسی نگاشتهایی که در شرایطی مرتبط با طیف مرزی صدق می کنند توسط لاتمن و تونو در [۲۲] بنیان گذاشته شد.آنها نشان دادند که اگر یک نگاشت پوشای ϕ بین دو جبر یکنواخت، در شرط $\sigma_\pi(\phi(f)\phi(g)) = \sigma_\pi(fg)$ صدق کنندآنگاه ϕ یک طولپای یکریختی جبری است. برای جبرهای یکنواخت A و B ، هاتوری و میوراو تاکاجی در [۱۱] و لاتمن و لامبرت در [۲۱] بطور جداگانه نشان دادند که اگر $T : A \longrightarrow B$ نگاشتی پوشا و نرم ضربی–نامتقارن باشد یعنی $||T(f)T(g) - \alpha||_Y = ||fg - \alpha||_X$ برای هر $f, g \in A$، آنگاه $T(1)^{-1}T$ یک یکریختی جبری حقیقی است، در اینجا $||.||_X$ و $||.||_Y$ نمایانگر نرم سوپریمم روی X و Y هستند. نتایج مشابهی نیز در[۲۰] ثابت شده است. از طرف دیگر هونما در [۱۳] صورت کلی یک نگاشت پوشامانند $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ را که در آن X و Y فضاهای هاسدورف فشرده‌ای هستند و $T(\lambda) = \lambda$ برای

$\lambda=\pm ۱,\pm i$ و به ازای اسکالر ناصفر α و

$$||T(f)\overline{T(g)}-\alpha||_Y=||f\overline{g}-\alpha||_X \qquad (f,g\in C(X))$$

شناسایی کرد. در [۲۴] نیز میورا، هونما و شیندو نشان دادند که اگر T یک نگاشت پوشا بین زیرگروه های $expA$ و $expB$ یا $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ از A و B باشد که در شرط

$$||T(f)T(g)^{-۱}-\alpha||_Y=||fg^{-۱}-\alpha||_X$$

برای اسکالر $\alpha\neq ۰$ صدق کند، آنگاه $T(۱)^{-۱}T$ به یکریختی جبری حقیقی گسترش می یابد. سپس شیندو در [۲۹] این نتیجه را تعمیم داد و صورت کلی یک نگاشت پوشا بین زیر گروه هایی از $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ را که به ترتیب شامل $expA$ و $expB$ بوده و در شرط

$$||T(f)^mT(g)^n-\alpha||_Y=||f^mg^n-\alpha||_X$$

برای اعداد صحیح n,m صدق کند، شناسایی کرد.

در این پایان نامه که مرجع های اصلی آن [۱۵]، [۳۰] و [۷] هستند به مطالعه نگاشتهای ضربی مرزی روی جبرهای عملگری استاندارد و نرم ضربی نامتقارن روی جبرهای یکنواخت و حافظ شعاع طیفی به طور جمعی بین جبرهای باناخ جابه جایی، نیم ساده ویکدار می پردازیم.

در فصل یک به بیان پیش نیازها و مقدمات پرداخته می شود.

در فصل دوم که مرجع اصلی آن [۱۵] است به بررسی صورت کلی نگاشت های پوشای به طور ضربی حافظ طیف مرزی بین جبر های عملگری استاندارد می پردازیم. فرض می کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبر های عملگری استاندارد به ترتیب روی فضاهای باناخ X و Y باشد و $\phi,\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ نگاشت های پوشایی باشد که برای هر $S,T\in\mathcal{A}$، $\sigma_\pi(\phi(S)\varphi(T))=\sigma_\pi(ST)$. نشان می دهیم چنین نگاشت هایی به صورت

$$\phi(T)=A_۱TA_۲^{-۱} \qquad (T\in A) \quad , \quad \varphi(T)=A_۲TA_۱^{-۱} \qquad (T\in A)$$

هستند که درآن $A_۱$ و $A_۲$ عملگر های خطی کراندار دوسویی از X به Y هستند، یا به صورت

$$\phi(T)=B_۱T^*B_۲^{-۱} \qquad (T\in A) \quad , \quad \varphi(T)=B_۲T^*B_۱^{-۱} \qquad (T\in A)$$

هستند که درآن $B_۱$ و $B_۲$ عملگر های خطی کراندار دوسویی از X^* به Y هستند.

در فصل سوم که مرجع آن [۳۰] است به بررسی صورت کلی نگاشت هایی می‌پردازیم که بین جبرهای یکنواخت A و B تعریف شده اند و در شرایطی مرتبط با نرم صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم $\alpha \neq 0$، $A_1 \subseteq A$ و $\rho, \tau : A_1 \longrightarrow A$ و $S, T : A_1 \longrightarrow B$ نگاشت هایی دلخواه باشند که $\rho(A_1), \tau(A_1)$ و $S(A_1), T(A_1)$ تحت ضرب بسته وبه ترتیب شامل $expB, expA$ باشند. اگر برای هر $f, g \in A_1$

$$||S(f)T(g) - \alpha||_Y = ||\rho(f)\tau(g) - \alpha||_X$$

و عضوی مانند $e_1 \in A_1$ وجود داشته که $\varphi(e_1) = 1$ و $S(e_1)^{-1} \in S(A_1)$ و $S(e_1) \in T(A_1)$ آنگاه نشان داده می شود که یک یکریختی جبری حقیقی مانند $\widetilde{S} : A \longrightarrow B$ وجود دارد که $\widetilde{S}(\rho(f)) = S(e_1)^{-1}S(f)$ برای هر $f \in A$.

در فصل چهارم که مرجع اصلی آن [۷] می باشد به بررسی صورت کلی نگاشت $T : A \longrightarrow B$ می پردازیم که بین جبرهای باناخ جابه جایی، یکدار و نیم ساده A و B تعریف شده است و در شرایط زیر مرتبط با شعاع طیفی صدق می کند:

$$r(T(a) + T(b)) = r(a + b)$$

نشان داده می شود که چنین نگاشتی یک همسانریختی مانند $\varphi : M_B \longrightarrow M_A$ بین فضاهای ایده آل ماکسیمال A و B القاء می کند و زیرمجموعه باز و بسته K از M_B وجود دارد که

$$\widehat{T(a)}(y) = \begin{cases} \widehat{T(e)}(y)\widehat{a}(\varphi(y)) & y \in K \\ \widehat{T(e)}(y)\overline{\widehat{a}(\varphi(y))} & y \in M_B \setminus K \end{cases}$$

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ آنالیز تابعی

این بخش شامل مطالب مقدماتی از جبرهای باناخ است که در فصل های بعد از آنها استفاده می شود. متذکر می شویم همواره فضاهای برداری و جبرهای مورد نظر روی میدان $\mathbb{C}$ هستند.

تعریف. ۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار نامیم هرگاه

$$||T|| := sup_{||x||\leq 1}||Tx|| < \infty$$

می دانیم کرانداری یک نگاشت خطی بین دو فضای نرمدار هم ارز پیوستگی آن است. مجموعه همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y راکه خود با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری است با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. در حالت کلی $B(X,Y)$ با نرم $||T||$ تعریف شده در بالا یک فضای نرمدار است و ثابت می شود که هرگاه Y فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ با نرم عملگری خطی کراندار باناخ است. برای فضای نرم دار X، فضای باناخ $B(X,\mathbb{C})$ را دوگان X نامیم و با X^* نشان می دهیم. گاهی اثر عضو $f \in X^*$ روی $x \in X$ را با نماد $\prec x, f \succ$ نشان دهیم.

برای هر عملگر $T \in B(X,Y)$ که در آن X و Y فضاهای نرم دار هستند بنا به [۲۸] عملگر خطی

کرانداری مانند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ نظیر می‌شود که $||T^*|| = ||T||$ و برای هر $y^* \in Y^*$ و $x \in X$، $\prec Tx, y^* \succ = \prec x, T^*y^* \succ$. عملگر T^* عملگر الحاقی وابسته به T نامیده می‌شود.

قضیه . ۱.۱.۱ (هان—باناخ)[۲۸] اگر X یک فضای نرمدار باشد و $x_\circ \in X$، آنگاه تابعک خطی $F \in X^*$ وجود دارد که $F(x_\circ) = ||x_\circ||$ و برای هر $x \in X$، $|F(x)| \leq ||x||$.

قضیه . ۲.۱.۱ [لم ۹.۳ ;۲۸] فرض کنیم X یک فضای برداری است و $f, f_۱, ..., f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعکهای خطی باشد که $ker f \subseteq \bigcap_{i=۱}^{n} ker f_i$ آنگاه اسکالرهای α_i وجود دارد که $f = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i$.

برای فضای نرمدار X توپولوژی ضعیف القا شده توسط X^* روی X توپولوژی ضعیف روی X نامیده می شود که از توپولوژی حاصل از نرم ضعیف تر است. می دانیم X همراه با توپولوژی ضعیف یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب است که دوگان آن همان X^* است. در فضای نرمدار X، زیرمجموعه E از X به طور ضعیف کراندار است هرگاه برای هر همسایگی ضعیف صفر مانند V، $t > \circ$ موجود باشد که $E \subseteq tV$. توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* که در آن X یک فضای نرمدار است توپولوژی ضعیف القا شده توسط X روی X^* است. یعنی ضعیف ترین توپولوژی که تحت آن برای $x \in X$، نگاشت $\widehat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ که با ضابطه $\widehat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$، $\Lambda \in X^*$، تعریف می شود پیوسته باشد.

قضیه . ۳.۱.۱ [قضیه ۱۸.۳ ;۲۸] اگر X یک فضای نرمدار باشد برای $E \subseteq X$، E کراندار است اگر وتنها اگر E به طور ضعیف کراندار باشد.

قضیه . ۴.۱.۱ (باناخ آلاغلو)[قضیه ۱۵.۳ ;۲۸] اگر X یک فضای نرمدار باشد آنگاه گوی واحد بسته X^* نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

به آسانی دیده می شود هرگاه $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی کراندار بین دو فضای نرمدار X و Y باشد، نگاشت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره—ضعیف ستاره پیوسته است.

تعریف. ۲.۱.۱ عملگر خطی کراندار $T : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای نرمدار X و Y را فشرده نامیم هرگاه تصویر گوی واحد باز X تحت T دارای بستار فشرده باشد.

به سادگی دیده می شود هر عملگر خطی $T: X \longrightarrow Y$ با رتبه متناهی عملگری فشرده است. بنا به [قضیه ۱۸.۴ ;۲۸]، مجموعه عملگرهای فشرده از $X \longrightarrow Y$ یک ایده آل بسته $B(X,Y)$ است.

قضیه . ۵.۱.۱ (مازور—اولام [۲۳]) فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند و $T: X \longrightarrow Y$ نگاشتی پوشا باشد که برای هر $x,y \in X$، $||Tx - Ty|| = ||x - y||$، اگر $T(\circ) = \circ$ آنگاه T خطی—حقیقی است.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف. ۱.۲.۱ جبر مختلط A را یک جبر باناخ نامیم هرگاه A همراه با نرمی مانند $||.||$ یک فضای باناخ باشد که نامساوی $||xy|| \leq ||x|| ||y||$ برای هر $x,y \in A$ برقرار باشد. اگر A شامل عنصری مانند e باشد که برای هر $x \in A$، $xe = ex = x$، A را یک جبر یکدار گوییم.

در جبر باناخ A با یکه‌ی e با جایگزینی نرمی هم ارز می توان فرض کرد $||e|| = ۱$. اگر به ازای هر $x,y \in A$، $xy = yx$ آنگاه A یک جبر باناخ جابه‌جایی نامیده می شود.

تعریف. ۲.۲.۱ نگاشت $\varphi : A \longrightarrow B$ بین جبرهای باناخ A و B را ضربی نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ و آن را پادضربی نامیم هرگاه $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ به ازای هر $x,y \in A$.

تعریف. ۳.۲.۱ فرض کنید A و B جبرهای باناخ باشند، نگاشت $\varphi : A \longrightarrow B$ را یک همریختی (جبری) نامیم هرگاه φ یک نگاشت خطی باشد و به ازای هر $x,y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ و نگاشت خطی φ را یک پادهمریختی نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$

همریختی های جبری دوسویی و پاد همریختی های جبری دوسویی به ترتیب یکریختی و پاد یکریختی جبری نامیده می‌شوند.

تعریف. ۴.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $x \in A$. طیف x در A که با $\sigma_A(x)$ نشان داده می شود عبارتست از مجموعه همه‌ی عددهای مختلطی مانند λ که $x - \lambda e$ در A وارون پذیر نباشد.

لازم به ذکر است در حالت کلی طیف یک عضو در یک جبر باناخ یکدار با طیف آن در یک زیر جبر بسته (یکدار) آن متفاوت است. اگر $B \subseteq A$ یک زیر جبر بسته‌ی جبر باناخ A شامل یکه‌ی A باشد آنگاه به ازای هر $x \in B$، $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.
در جبر باناخ یکدار A مجموعه عضوهای وارون پذیر A را با A^{-1} نمایش می دهیم. از این پس هرگاه ابهامی پیش نیاید برای طیف عضو x از جبر باناخ A به جای $\sigma_A(x)$ نماد $\sigma(x)$ را به کار می‌بریم.
برای جبر باناخ نه لزوماً یکدار A، یکدار شده‌ی آن که با نماد A_1 نمایش داده می‌شود عبارتست از $A_1 = \{(x, \lambda) : x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ که همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی و ضرب

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu) \qquad (x, y \in A\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

یک جبر است و همراه با نرم $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$ به ازای هر $x \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، یک جبر باناخ است. بعلاوه A_1 جبر باناخ A را به عنوان یک ایده‌آل بسته در بردارد.
در حالتی که A یک جبر باناخ غیر یکدار است برای $x \in A$، طیف x در A به عنوان همان طیف x در یکدار شده‌ی A یعنی A_1 تعریف می‌شود.
اگر B, A جبرهای باناخ یکدار و $\varphi : A \longrightarrow B$ یک همریختی جبری پوشا باشد آنگاه به سادگی دیده می شود φ حافظ یک است و همچنین تصویر هر عضو وارون پذیر A، عضو وارون پذیری در B است. بنابراین به خصوص اگر φ یکریختی جبری باشد آنگاه φ حافظ طیف است یعنی برای هر $x \in A$، $\sigma_B(\varphi(x)) = \sigma_A(\varphi(x))$.

قضیه . ۱.۲.۱ [قضیه ۱۳.۱۰ ;۲۸] فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$ آنگاه $\sigma(x)$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و فشرده از عددهای مختلط است.

تعریف. ۵.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$. شعاع طیفی x در A که با $r(x)$ نشان داده می شود عبارتست از

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

قضیه زیر رابطه دیگری برای شعاع طیفی بر حسب نرم جبر باناخ ارائه می دهد.

قضیه . ۲.۲.۱ [قضیه ۱۳.۱۰ ;۲۸] اگر A یک جبر باناخ باشد، به ازای هر $x \in A$،

$$r(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

می دانیم برای فضای هاسدورف فشرده‌ی K، جبر $C(K)$ متشکل از همه توابع مختلط مقدار پیوسته روی K با نرم سوپریمم یک جبر باناخ جابه‌جایی یکدار است. همچنین برای فضای باناخ X نیز جبر $B(X)$ متشکل از عملگرهای خطی کراندار روی X(همراه با عمل ترکیب به عنوان ضرب) با نرم یک عملگر خطی کراندار یک جبر باناخ (در حالت کلی غیر جابه جایی) یکدار است وجبر $B(X)^{-1}$ متشکل از عملگرهای خطی کراندار وارون پذیر روی X می باشد. لذا با توجه به تعریف طیف یک عضو در یک جبر باناخ، برای عملگر $T \in B(X)$، $\sigma(T)$ متشکل از اسکالرهایی مانند $\lambda \in \mathbb{C}$ است که $\lambda I - T$ در $B(X)$ وارون پذیر نیست. ولی با توجه به این که طبق قضیه نگاشت باز برای عملگر دوسویی $S \in B(X)$، S^{-1} نیز در $B(X)$ قرار دارد لذا

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{یک به یک نیست } \lambda I - T\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{پوشا نیست } \lambda I - T\}$$

قضیه . ۳.۲.۱ [قضیه ۲۵.۴ ;۲۸] فرض کنید X یک فضای باناخ، عملگر $T \in B(X)$ فشرده باشد و $\lambda \neq 0$. در این صورت

الف) اگر $\lambda \in \sigma(T)$ آنگاه λ یک مقدار ویژه‌ی T و T^* است.

ب) $\sigma(T)$ حداکثر شماراست.

قضیه . ۴.۲.۱ [قضیه ۷.۱۷ ;۳۳] اگر A یک جبر باناخ دلخواه باشد و $x, y \in A$، آنگاه

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$$

تبصره . ۱.۲.۱ هرگاه $T,S \in B(X)$ که در آن X یک فضای باناخ است و TS عملگری با رتبه متناهی باشد، آنگاه مقادیر ویژه مخالف صفر TS با مقادیر ویژه مخالف صفر ST برابر است زیرا از آنجایی که TS عملگری با رتبه متناهی است پس فشرده است و لذا بنا به قضیه ۱.۲.۳ اگر $\lambda \neq 0$، $\lambda \in \sigma(TS)$ آنگاه λ یک مقدار ویژه TS است و بنا به قضیه ۴.۲.۱ $\sigma(TS) \setminus \{0\} = \sigma(ST) \setminus \{0\}$ پس λ مقدار ویژه ST نیز هست لذا مقادیر ویژه مخالف صفر TS با مقادیر ویژه مخالف صفر ST برابر است.

زیرمجموعه بسیار مهمی از طیف که در این پایان نامه به آن نیاز داریم به نام طیف مرزی است که چنین تعریف می شود:

تعریف. ۶.۲.۱ در جبر باناخ A طیف مرزی عضو $x \in A$ که با $\sigma_\pi(x)$ نمایش داده می‌شود عبارتست از مجموعه‌ی

$$\sigma_\pi(x) = \{\lambda \in \sigma(x) : |\lambda| = \max_{z \in \sigma(x)} |z|\}$$

توجه داریم که برای هر $x \in A$، $\sigma_\pi(x) \subseteq \sigma(x)$ و چون $\sigma(x)$ فشرده است، ماکسیمم به کار رفته در تعریف بالا در برخی از نقاط اخذ می شود. با توجه به تعریف شعاع طیفی، طیف مرزی را می توان به صورت $\sigma_\pi(x) = \{\lambda \in \sigma(x), |\lambda| = r(x)\}$ نیز بیان کرد.
بدیهی است هر زیر جبر بسته از $C(K)$، برای فضای هاسدورف فشرده‌ی K، خود یک جبر باناخ است. به عنوان مثال برای زیر مجموعه‌ی فشرده K از صفحه مختلط، جبر $A(K)$ متشکل از همه‌ی توابع پیوسته روی K که روی درون K تحلیلی هستند زیر جبر بسته‌ای از $C(K)$ است. در حالتی که $K = D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$، $A(K)$ جبر قرصی نامیده می‌شود.

قضیه . ۵.۲.۱ [قضیه ۳.۱.۳ ;۱] فرض کنیم A جبر باناخ یکدار باشد مجموعه های زیر با هم برابر ست :

۱) اشتراک ایده آل های چپ ماکسیمال A

۲) اشتراک ایده آل های راست ماکسیمال A

۳) $\{x \in A : 1 - zx \in A^{-1}, z \in A\}$

۴) $\{x \in A : ۱ - xz \in A^{-۱}, z \in A\}$

تعریف. ۷.۲.۱ ایده آل دو طرفه تعریف شده از قضیه بالا رادیکال (ژاکوبسن) A نامیده می‌شود و با $RadA$ نشان داده می‌شود. جبر باناخ یکدار A نیم ساده نامیده می‌شود هرگاه $RadA = \{۰\}$.

تعریف. ۸.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی باشد. مجموعه همه‌ی همریختی های مختلط ناصفر روی A را با M_A نشان می دهیم. ایده‌آل I از A را یک ایده‌آل مدولار نامیم هرگاه عضوی مانند $u \in A$ موجود باشد که برای هر $x \in A$، $xu - x \in I$.

آشکارا هسته هر همریختی مختلط ناصفر روی جبر باناخ جابه‌جایی A یک ایده‌آل ماکسیمال مدولار است. بالعکس هر ایده‌آل ماکسیمال مدولار A نیز هسته یک همریختی مختلط ناصفر روی A است. بنابراین به ویژه در حالتی که A یکدار باشد تناظر دوسویی بین ایده‌آلهای ماکسیمال A و اعضای M_A وجود دارد.

قضیه . ۶.۲.۱ [قضیه ۷.۱۰ ;۲۸] فرض کنیم A یک جبر باناخ دلخواه باشد آنگاه هر همریختی مختلط ناصفر روی A مانند φ پیوسته است و $\|\varphi\| \leq ۱$ و در حالت خاصی که A یکدار است $\|\varphi\| = \varphi(e) = ۱$.

با توجه به قضیه‌ی بالا M_A مشمول در گوی واحد بسته‌ی A^* است. توپولوژی ضعیف ستاره‌ی نسبی القایی از A^* به M_A، توپولوژی گلفاند روی M_A نامیده می‌شود. در حالتی که جبر باناخ A جابه جایی و یکدار است، M_A فضای ایده‌آل ماکسیمال A نیز نامیده می‌شود.

قضیه . ۷.۲.۱ [قضیه ۶.۷ ;۳۳] اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی یکدار باشد آنگاه فضای ایده‌آل ماکسیمال A ناتهی است، یعنی $M_A \neq \emptyset$.

قضیه . ۸.۲.۱ [قضیه ۶.۷ ;۳۳] اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد آنگاه M_A یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده است. بعلاوه اگر A یکدار نیز باشد M_A فشرده است.