دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

رساله

براي دريافت درجه‌ی دکتری

رشته‌ی رياضي محض - آنالیز تابعی

عنوان:

بررسی جوابهای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با استفاده از نظریه نقطه ثابت

استاد راهنمای اول:

دکتر شهرام رضاپور

استاد راهنمای دوم:

دکتر علیرضا غفاری حدیقه

استاد مشاور:

دکتر دومیترو بالانو

پژوهشگر:

حکیمه محمدی

دی/۱۳۹۲

تبریز/ ایران


بسم الله الرحمن الرحيم

فقر

می خواهم بگویم ......
فقر همه جا سر میکشد......
فقر، گرسنگی نیست، عریانی هم نیست ......
فقر، " چیزی را نداشتن است " ، ولی آن چیز پول نیست .... طلا و غذا نیست ......
فقر، همان گرد و خاکی است که بر کتابهای فروش نرفته یک کتابفروشی می نشیند ......
فقر، تیغه های برنده ماشین بازیافت است، که روزنامه های برگشتی را خرد می کند ....
فقر، کتیبه سه هزار ساله ای است که روی آن یادگاری نوشته اند ......
فقر، پوست موزی است که از پنجره یک اتومبیل به خیابان پرتاب می شود ......
فقر، همه جا سر می کشد ......
فقر، شب را "بی غذا " سرکردن نیست ....
فقر، روز را "بی اندیشه" سرکردن است. (دکتر علی شریعتی)

تقدیم به

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم،

و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر،

و به همسرم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم.

سپاس گزاری

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود.

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای پروفسور رضاپور که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره راهنما و راه گشای بنده در تکمیل این پایان نامه بوده است تشکر نمایم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر غفاری سپاسگزارم که با راهنمایی های خود مرا در تکمیل این پایان نامه یاری نمودند.

در پایان از مادر، همسر، برادران و خواهر عزیزم و دوست خوبم مریم آتابای و همه فرشتگانی که بالهای محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم.

زندگی صحنه یکتای هنرمندی ماست......
هر کسی نغمه خود خواند و از صحنه رود .....
صحنه پیوسته به جاست......
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد ......

حکیمه محمدی

دی/۱۳۹۲

تبریز / ایران

فهرست مطالب

چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری کاربردهای بسیاری در فناوری های جدید مانند توصیف چسبندگی یا کشش مواد پلاستیکی نانو، مدل های اقتصادی و نظریه کنترل سیتم های دینامیکی دارند. در معادلات دیفرانسیل اغلب از تکنیک های مشخصی مانند روش تکراری پیکارد برای حل معادله استفاده می کنند حال آن که در حل معادلات دیفرانسیل کسری بهتر است از تکنیک های جدید برای حل این نوع معادلات استفاده نماییم. در این رساله با به کارگیری نظریه نقطه ثابت روی فضاهای متریک و فضاهای متریک مرتب، وجود جواب برخی از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با مشتق کسری ریمن لیوویل و مشتق کسری کاپوتو را بررسی می کنیم.
واژه های کلیدی: انتگرال کسری ریمن لیوویل، مشتق کسری ریمن لیوویل، مشتق کسری کاپوتو، معادله دیفرانسیل کسری، نقطه ثابت.

پیشگفتار

ایده تعمیم مشتق $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ به مراتب غیرصحیح p نخستین بار توسط لایب نیتز در ۱۶۹۵ برای $p = ۱/۲$ مطرح شد و اویلر در سال ۱۷۳۸ این نوع مشتق را برای تابع توانی x^α مطرح کرد. در سال ۱۸۱۲ لاپلاس این ایده را برای توابعی که به صورت $\int T(t)T^{-x}dx$ تعریف می شوند، بیان نمود و در فوریه ۱۸۲۲ ایده تعریف مشتق مرتبه غیرصحیح را به صورت

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{۲})dt$$

بیان کرد. درسال ۱۸۳۲ لیوویل اولین تعریف خود برای توابعی که با سری توانی به صورت

$$f(x) = \Sigma_{k=\circ}^{\infty} c_k e^{a_k x}$$

بیان می شوند را به صورت

$$D^p f(x) = \Sigma_{k=\circ}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x}$$

تعریف کرد و درمقاله ای مشابه فرمول

$$D^{-p} f(x) = \frac{۱}{(-۱)^p \Gamma(p)} \int_{\circ}^{\infty} \varphi(x+t) t^{p-۱} dt$$

را ارایه کرد که بعدها به فرمول لیوویل برای انتگرال کسری با فاکتور $(-۱)^p$ شهرت یافت. در سال ۱۸۴۷ لیوویل و ریمن به عبارت $\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{\circ}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{۱-\alpha}}dt$ دست یافتند که بعدها به فرمول انتگرال کسری معروف شد و هولمگرن [۱] در مقاله خود از این تعریف به عنوان تعریف انتگرال کسری نام برد و جزییات آن را مطرح و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. سپس وی مشتقات جزیی

[۱] Holmgren

و مرتبه کسری را برای توابع دومتغیره تعریف نمود.

گران والد در سال ۱۸۶۷ و لت نیکوف در ۱۸۶۸ رویکرد جدیدی را برای مشتق کسری به صورت $D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}$ بیان نمودند و سپس در سال ۱۸۷۰ سونین [۲] با استفاده از فرمول کوشی برای توابع تحلیلی درصفحه مختلط، ایده جدیدی را برای مشتق کسری p هایی که $Rep < 0$ به صورت

$$f^{(p)}(z) = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_{z_0}^{z} \frac{f(t)}{(z-t)^{1+p}} dt$$

مطرح کرد. دو سال بعد در ۱۸۷۲ لت نیکوف با درنظرگرفتن مسیردایره ای فرمول کوشی-سونین را به صورت

$$f^{(p)}(z) = \frac{\Gamma(1+p)}{2\pi r^{p}} \int_{0}^{2\pi} e^{-ip\theta} f(z+re^{i\theta}) d\Theta$$

بیان کرد. امروزه این فرمول به صورت زیر تنظیم شده و به کارمی رود

$$D_t^{p} f(t) = \Sigma_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau.$$

درسال ۱۸۹۲ ایده مشتق کسری تابع تحلیلی به صورت سری تیلور

$$D^{\alpha} f(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} c_k (z-z_0)^{k-\alpha}, \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

در مقاله هادامارد مطرح شد که آن را به صورت

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} f(z\tau) d\tau$$

تعریف کرد. بعدها این موضوع به ایده ای برای تعریف انتگرال کسری به صورت $\int_{0}^{1} v(t) f(z\tau) d\tau$ تبدیل شد. البته در آن زمان هادامارد نتوانست آن را گسترش دهد و این کار سال ها بعد در ۱۹۶۸ توسط ژرباشیان [۳] انجام شد.

با پیشرفت آنالیز ریاضی و نظریه توابع، در ۱۹۱۷ ریاضیدانی به نام ویل [۴] انتگرال کسری را برای توابع متناوب تعریف کرد و آن را با پیچش $I_{\pm}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t) dt$ تعریف و بعدا به

[۲] Sonine

[۳] Dzherbashyan

[۴] Weyl

صورت

$$I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{۱-\alpha}}, I_{-}^{\alpha}\varphi = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{۱-\alpha}} (۰ < \alpha < ۱)$$

نمایش داد که امروزه به انتگرال های راست و چپ کسری معروف است. وی همچنین ثابت کرد که تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته مرتبه α است هرگاه لیپ شیتس با مرتبه $\lambda > \alpha$ باشد. نظریه مشابه برای توابع غیرمتناوب در ۱۹۱۸ توسط مونتل [۵] بیان شد و در ۱۹۲۲ توسط ریس [۶] قضیه مقدارمیانی برای انتگرال کسری تعریف شد و در ۱۹۲۸ قضایای دیگری توسط هاردی [۷] و لیتل وود [۸] برای حساب کسری اثبات شد. در ۱۹۳۸ انتگرال کسری ناسره برای توابعی که لزوما در بینهایت تعریف نمی شوند توسط لاو [۹] به صورت

$$I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{n}\varphi(x-t)t^{\alpha-۱}dt$$

تعریف شد و در همین سال روش جزبه جز برای انتگرال کسری توسط لاو [۱۰] و یانگ [۱۱] به صورت

$$\int_{a}^{b}(D_{a}^{\alpha}f)(x)g(x)dx = \int_{a}^{b}f(x)(D_{b}^{\alpha}g)(x)dx$$

مطرح شد. در ۱۹۶۷ تعریف جدیدی برای مشتق کسری توسط کاپوتو [۱۲] به صورت

$$^{c}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha-n)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+۱}}$$

Montel[۵]

Riese[۶]

Hardy[۷]

Littlewood[۸]

Love[۹]

Love[۱۰]

Young[۱۱]

Caputo[۱۲]

برای $n - ۱ < \alpha < n$ مطرح شد که امروزه به مشتق کاپوتو شهرت دارد. حساب کسری از سال ۱۹۷۴ که اولین کنفرانس در این زمینه توسط برترام راس [۱۳] در دانشگاه نیوهاون [۱۴] برگزار شد به سرعت گسترش یافت. امروزه دو مجله تخصصی در موضوع حساب کسری مقاله چاپ می کنند که عبارتند از ژورنال حساب کسری [۱۵] و ژورنال حساب کسری و آنالیز کاربردی. [۱۶]
فرضیات فیزیکی در مورد استفاده از مدل هایی بر پایه مشتقات غیرصحیح در ابتدا در سال ۱۹۷۱ توسط کاپوتو و مایناردی [۱۷] مطرح شد. از نقطه نظر کاربرد در فیزیک و شیمی و مهندسی در سال ۱۹۷۴ کتابی توسط اولدهام [۱۸] و اشپینر [۱۹] نوشته شد که نقش مهمی در گسترش حساب کسری ایفا کرد. گرایش معادلات دیفرانسیل کسری به سرعت در حال گسترش بوده و کاربردهای بسیاری در علوم مختلف پیدا کرده است. مقالات متعددی درباره کاربرد حساب کسری در معادلات دیفرانسیل عادی و جزیی وجود دارد که اولین بحث در این مورد به کارهای شاونسی [۲۰] در ۱۹۱۸ و پست [۲۱] در۱۹۱۹ باز می گردد. در دهه اخیر نیز کارهای زیادی انجام شده که در معادلات دیفرانسیل عادی با مرتبه کسری می توان به کارهای هایک [۲۲]، دایتلم [۲۳] و فرید [۲۴]و در معادلات دیفرانسیل جزیی با مرتبه کسری به کارهای روسف [۲۵] اشاره کرد. وجود و منحصربفردی جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با روش های تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه و تبدیل ملین و روش تابع گرین بررسی شده و جواب هایی ارایه شده است که برای مثال وجود جواب مسایل کوشی شامل معادلات دیفرانسیل کسری غیر خطی توسط کیلباس [۲۶] ارائه شده و درسال های اخیر بالانو [۲۷] مقالاتی درباره کاربردهای فراوان حساب کسری در فیزیک و شیمی و علوم مهندسی و نانوتکنولوژی ارائه کرده است. شایان

---

[۱۳] Bertram Ross
[۱۴] Haven New
[۱۵] Journal of Fractional Calculous
[۱۶] Fractional Calculous and Applied Analysis
[۱۷] Mainardi
[۱۸] Oldham
[۱۹] Spainer
[۲۰] Shaughnessy
[۲۱] Post
[۲۲] Hayak
[۲۳] Diethelm
[۲۴] Freed
[۲۵] Rusev
[۲۶] Kilbas
[۲۷] Baleanu

ذکر است که مشتقات کسری ابزار مناسبی برای توصیف حافظه، خواص کشسانی مواد، موضوع چسبندگی و کشش مواد پلاستیکی نانو در فناوری های جدید مانند قطارهای با سرعت بالا، در خواص الکتریکی و مکانیکی مواد، نظریه کنترل سیستم های دینامیکی زمانی که سیستم کنترل شده یا کنترل کننده توسط معادله دیفرانسیل مرتبه کسری مطرح می شود، است. برای مطالب بیشتر درباره حساب کسری به مراجع [۲۰]-[۲۲] و برای مشاهده کاربرد هایی از حساب کسری و معادلات دیفرانسیل کسری به مراجع [۲۳]-[۴۹] مراجعه نمایید.

در معادلات دیفرانسیل اغلب با تکنیک های از پیش معلوم مانند روش تکراری پیکارد معمولا معادلاتی مورد بررسی قرار می گیرند که بتوان با استفاده از آن تکنیک ها، آن ها را حل نمود. اما این موضوع در معادلات دیفرانسیل کسری متفاوت بوده و بهتر است با استفاده از تکنیک های جدید این نوع معادلات را حل کنیم. در این رساله با به کارگیری نظریه نقطه ثابت روی فضاهای متریک و فضاهای متریک مرتب، وجود جواب برخی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بررسی شده است. شایان ذکر است مقالاتی که از این رساله حاصل شده اند عبارتند از [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶].

فصل ۱

قضایا وتعاریف مقدماتی

در بخش اول این فصل تعریف مشتقات مرتبه کسری موردنیاز و روابط بین آنها مطرح شده است. بخش دوم به بیان تاریخچه ای از نظریه نقطه ثابت و کارهای انجام یافته در این شاخه اختصاص یافته است و در بخش سوم اشاره ای به دو روش تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری شده است.

۱.۱ مشتقات مراتب کسری و روابط آنها

ازجمله توابع مهمی که درحساب کسری نقش مهمی دارند می توان به توابع گاما [۱] و بتا[۲] و تابع میتاگ لفلر[۳] اشاره کرد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید z یک متغیر مختلط باشد. در این صورت تابع گاما که بانماد $\Gamma(z)$ نمایش داده می شود به صورت

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt$$

تعریف می شود. یکی از مهمترین خواص تابع گاما این است که $\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید z, w دو متغیرمختلط باشند. در این صورت تابع بتا که با نماد $\beta(z,w)$

[۱] Gamma

[۲] Beta

[۳] Mittag-Leffler

نمایش داده می شود به صورت

$$\beta(z,w)=\int_{0}^{1}\tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau,(Rez>0,Rew>0)$$

تعریف می شود. رابطه بین دو تابع گاما و بتا به صورت زیر است

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

تعریف ۳.۱. فرض کنید z متغیر مختلط باشد. تابع میتاگ لفلر تک پارامتری که با نماد E_α نمایش داده می شود به صورت

$$E_\alpha(z)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

تعریف می شود. این تابع در حالت دو پارامتری با نماد $E_{\alpha,\beta}$ نمایش داده می شود و به صورت

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},(\alpha>0,\beta>0)$$

تعریف می شود. برای مثال اگر $\alpha<2$ ، $\frac{\pi\alpha}{2}<\mu<\min(\pi,\pi\alpha)$ ، $\beta\in\mathbb{R}$ و c_3 عددی حقیقی باشد، آن گاه

$$\mid E_{\alpha,\beta}(z)\mid\leq\frac{c_3}{1+\mid z\mid},$$

که در آن $0\geq|z|$ و $\pi\geq|argz|\geq\mu$.

برای مشتق کسری چندین تعریف وجود دارد. تعاریفی که بیشتر به کار گرفته می شوند، عبارتند از مشتق کسری گران والد-لت نیکوف [4]، مشتق کسری ریمن لیوویل [5] و مشتق کسری کاپوتو [6] .

تعریف ۴.۱. فرض کنید تابع حقیقی f روی بازه $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد که مشتقات مرتبه kام آن برای $k=1,2,...,m+1$ موجود و روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشند. در این صورت مشتق کسری گران والد-لت نیکوف مرتبه α برای $m<\alpha<m+1$ به صورت

$${}_aD_t^\alpha f(t)=\Sigma_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(1-\alpha+k)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(\tau)d\tau$$

---

[4] Grunwald-Letnikov

[5] Riemann-Liouville

[6] Caputo

تعریف می شود، که در آن داریم: $f^{(0)}(t) = f(t)$.

تعریف ۱.۵. فرض کنیم $\alpha > 0$ عددی حقیقی باشد. مشتق کسری ریمن لیوویل مرتبه α برای تابع $f : (0, \infty) \to R$ به صورت

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^{n} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds$$

تعریف می شود، که در آن $n = [\alpha] + 1$.

تعریف ۱.۶. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد و $\alpha \in R$. مشتق کسری کاپوتو مرتبه α برای تابع f به صورت

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\, ds.$$

تعریف می شود، که در آن $n = [\alpha] + 1$.

تعریف ۱.۷. فرض کنید $\alpha > 0$ و $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مفروض باشد. انتگرال کسری ریمن لیوویل از مرتبه α تابع f به صورت

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

تعریف می شود.

مثال ۱.۸. *تابع ثابت ۱ را در نظر بگیرید. مشتق های کسری مختلف مرتبه $\alpha = \frac{1}{2}$ این تابع متفاوت هستند.*
مشتق ریمن لیوویل :

$$D_{a^{+}}^{(\frac{1}{2})} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} D^{(1)} (\int_{a}^{x} (x-t)^{(1-\frac{3}{2})} 1\, dt) = \frac{(x-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

مشتق کاپوتو :

$$_{t}^{c}D_{a^{+}}^{(\frac{1}{2})} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_{a}^{x} (x-t)^{1-\frac{3}{2}} D^{(1)} 1\, dt = 0.$$

برای مشتق گران والد-لت نیکوف چون $p = \frac{1}{2}$ لذا $m = 0$. در نتیجه:

$$_{a}D_{t}^{\frac{1}{2}} 1 = \Sigma_{k=0}^{0} \frac{1 (t-a)^{\frac{-1}{2}+k}}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+k)} + \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\frac{-1}{2}}\, 0\, d\tau = \frac{(t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

لم ۹.۱. *فرض کنید α عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد. مشتق مرتبه کسری ریمن لیوویل ${}_aD_t^\alpha$ و مرتبه صحیح $\frac{d^n}{dt^n}$ جابجا می شوند، یعنی*

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^\alpha f(t)) ={}_a D_t^\alpha(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) ={}_a D_t^{\alpha+n} f(t)$$

هرگاه برای هر عدد طبیعی $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ در $t = a$ داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$.

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۰.۱. *فرض کنید α عددی حقیقی، $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ و $n-1 < \alpha < n$. در این صورت مشتق کسری کاپوتو ${}_a^cD_t^\alpha$ ومشتق مرتبه صحیح $\frac{d^m}{dt^m}$ جابجا می شوند، یعنی*

$${}_a^cD_t^\alpha({}_a^cD_t^m f(t)) ={}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t).$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۱.۱. *فرض کنید $0 \leq m < \alpha < m+1$ ، $0 \leq n < \beta < n+1$ و تابع f چنان باشد که برای هر $k = 0, 1, 2, ..., r-1$ داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$ ، که در آن $r = \max\{n, m\}$. در این صورت*

$${}_aD_t^\beta({}_aD_t^\alpha f(t)) ={}_a D_t^\alpha({}_aD_t^\beta f(t)) ={}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۲.۱. *فرض کنید α و β اعداد حقیقی دلخواهی باشند. اگر تابع $f(t)$ روی بازه $[a, \infty)$ پیوسته باشد، آن گاه*

$${}_aI_t^\alpha({}_aI_t^\beta f(t)) ={}_a I_t^\beta({}_aI_t^\alpha f(t)) ={}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۳.۱. *فرض کنید $\alpha > 0$ و $t > a$. در این صورت مشتق ریمن لیوویل معکوس چپ انتگرال ریمن لیوویل است، یعنی*

$${}_aD_t^\alpha({}_aI_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۴.۱. *فرض کنید $\circ \leq \beta < \alpha$، $\circ \leq k-1 \leq \beta < k$ و ${}_aD_t^{\beta}f(t)$ انتگرال پذیر باشد. در این صورت*

$${}_aI_t^{\alpha}({}_aD_t^{\beta}f(t)) = {}_aD_t^{\beta-\alpha}f(t) - \Sigma_{j=1}^{k}[{}_aD_t^{\beta-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(1+\alpha-j)}.$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۵.۱. *فرض کنید تابع $f(t)$، تابعی $(n-1)$ بار مشتق پذیر روی بازه $[a,T]$ باشد و تابع $f^{(n)}$ روی بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر باشد. در این صورت برای هر α که $\circ < \alpha < n$، مشتق کسری ریمن لیوویل موجود و با مشتق کسری گران والد-لت نیکوف برابر است.*
حالت خاص این رابطه حالتی است که $f(t)$ پیوسته و $\frac{df}{dt}$ در بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر باشد در این صورت برای هر α که $\circ < \alpha < 1$، مشتق کسری ریمن لیوویل و مشتق کسری گران والد-لت نیکوف موجود و برابرند، یعنی

$${}_aD_t^{\alpha}f(t) = {}_aD_t^{\alpha}f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}f'(\tau)d\tau.$$

توجه کنید که وجود مشتق مرتبه $\alpha > \circ$، وجود مشتق مرتبه β برای $\circ < \beta < \alpha$ را ایجاب می نماید.

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۶.۱. *فرض کنید تابع f تابعی $m-1$ بار مشتق پذیر و مشتق مرتبه m ام آن روی بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر باشد و $m-1 \leq \alpha < m$. در این صورت $[{}_aD_t^{\alpha}f(t)]_{t=a} = \circ$ اگر و فقط اگر برای هر $j = \circ, 1, 2, .., m-1$ داشته باشیم $f^{(j)}(a) = \circ$.*

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

لم ۱۷.۱. *فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ عددی حقیقی باشد. در این صورت در $a = -\infty$ دو مشتق کسری کاپوتو و ریمن لیوویل همرفتارند، یعنی*

$${}_{-\infty}D_t^{\alpha}f(t) = {}_{-\infty}^{c}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}.$$

برهان. به فصل دوم مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

یکی از ابزارهای کاربردی در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، تبدیل لاپلاس است. تبدیل لاپلاس برای هریک از مشتقات کسری به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید s یک متغیر مختلط باشد. تبدیل لاپلاس تابع f به صورت

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

تعریف می شود و داریم

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s).$$

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید $n - 1 < \alpha$ و D_t^{α} مشتق کسری ریمن لیوویل باشد. تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر تعریف می شود :

$$L\{{}_{0}D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \Sigma_{k=0}^{n-1} s^{k} [{}_{0}D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}$$

تعریف ۱.۲۰. فرض کنید $n - 1 < \alpha \leq n$ و ${}^{c}D_t^{\alpha}$ مشتق کسری کاپوتو باشد. تبدیل لاپلاس آن به صورت

$$L\{{}_{0}^{c}D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \Sigma_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

تعریف می شود.

تعریف ۱.۲۱. فرض کنید $n \leq \alpha < n + 1$ و D_t^{α} مشتق کسری گران والد-لت نیکوف باشد. تبدیل لاپلاس آن به صورت

$$L\{{}_{0}D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s)$$

تعریف می شود.

با توجه به اینکه تابع میتاگ لفلر از توابع مهم در نظریه حساب کسری است، تبدیل لاپلاس آن از اهمیت خاصی برخوردار است.

تعریف ۱.۲۲. فرض کنید $E_{\alpha,\beta}(z)$ تابع میتاگ لفلر دو پارامتری باشد. تبدیل لاپلاس حالت های خاص این تابع $(E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y))$ که $t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha})$ باشد به صورت

$$\int_{0}^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{k! p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha} \mp a)^{k+1}}$$

تعریف می شود. در حالت خاص برای $\alpha = \beta = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-۱}{۲}} E^{(k)}_{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}}(\pm a\sqrt{t})dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp a)^{k+۱}}.$$

از دیگر ابزارهای حل معادلات دیفرانسیل، تبدیل فوریه است. تبدیل فوریه برای مشتقات کسری به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید h تابعی پیوسته و روی بازه $(-\infty, \infty)$ انتگرال پذیر باشد. تبدیل فوریه آن را با نماد F_e نمایش داده و به صورت

$$F_e\{h(t); w\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} h(t)dt$$

تعریف می کنیم. توجه کنید

$$F_e\{h(t) * g(t); w\} = H_e(w)G_e(w)$$

که در آن $H_e(w)$ و $G_e(w)$ به ترتیب تبدیل فوریه توابع h و g هستند.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید D^α مشتق کسری مرتبه α باشد. تبدیل فوریه برای هر سه نوع مشتق کسری ریمن لیوویل و کاپوتو و گران والد-لت نیکوف در $a = -\infty$ به صورت

$$F_e\{{}_{-\infty}D^\alpha_t g(t); w\} = (-iw)^{\alpha-n} G(w)$$

تعریف می شود که در آن $G(w)$ تبدیل فوریه تابع g است.

۲.۱ نظریه نقطه ثابت

نظریه نقطه ثابت یکی از ابزارهای قدرتمند آنالیز غیر خطی است. نظریه نقطه ثابت ترکیب زیبایی از آنالیز، توپولوژی و هندسه است که در شاخه های مهندسی، فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، نظریه بازی و ... کاربرد دارد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و f تابعی از X به توی X باشد. عضو $x_۰ \in X$ را که در شرط $f(x_۰) = x_۰$ صدق کند نقطه ثابت f نامند. به عنوان مثال، اگر fروی اعداد حقیقی