دانشگاه یزد

دانشکده فیزیک

گروه حالت جامد

پایان نامه

برای دریافت درجه دکتری

فیزیک حالت جامد

پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی به‌وسیله زنجیره‌های اسپینی متشکل از اسپین‌های حبس‌شده در نقاط کوانتومی

استاد راهنما: دکتر حسین مختاری

استاد مشاور: دکتر محمدعلی صادق‌زاده

پژوهش و نگارش: مرتضی رفیعی

مهرماه ۱۳۹۱

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/ رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان نامه / رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه / رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به آنان که

کلامشان، صداقت
نگاهشان، محبت
و تبسم‌شان، حیات را برایم به ارمغان آورد؛

تقدیم به

همسر مهربان و فداکارم

قدردانی و سپاس

به نام پروردگار یکتا

سپاس آن بی‌همتایی که چون همیشه با الطاف بی‌پایانش در انجام و به پایان رساندن این رساله مرا یاری نمود. او را سپاس می‌گویم که مرا لایق آموختن گردانید.

رهنمودهای بی‌دریغ و ارزنده اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر حسین مختاری که هدایت این رساله را به‌عهده داشتند مرا بر آن می دارد که با این جملات کوتاه و ناکافی سپاس‌گزاری خود را از این بزرگواران بیان کنم. مراتب امتنان خویش را تقدیم استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد علی صادق‌زاده می‌دارم که با در اختیار گذاشتن دانسته‌های علمی خود مرا قرین لطف خویش فرمودند. بر خود نیز واجب می‌دانم که نهایت قدردانی خود را از پروفسور استفانو مانچینی و دکتر کازمو لوپو در دانشگاه کمرینو ایتالیا که در طول ۶ ماه دوره فرصت مطالعاتی میزبان اینجانب بودند، ابراز نمایم. همچنین از آقایان دکتر مرتضی سلطانی، دکتر حمید محمدی و دکتر شبیر برزنجه در دانشگاه اصفهان که با در اختیار گذاشتن دانسته‌های علمی خود مرا قرین لطف خویش فرمودند، تشکر فراوان دارم.

از خداوند می‌خواهم که توان سپاسگزاری از همسر و مادر عزیز و خانواده‌های خود و همسرم را به من عطا کند که وجودشان در تمام طول زندگی برایم نعمتی بزرگ و مایه دلگرمی‌ام بوده است.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره دکتری	شناسه: ب/د/۳/

جلسه دفاعیه پایان نامــه تحصیلی آقای مرتضی رفیعی دانشجوی دکتری

رشتــه/گرایش: فیزیک حالت جامد

تحت عنوان:

پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی به وسیله زنجیره‌های اسپینی متشکل از اسپین‌های حبس شده در نقاط کوانتومی

و تعداد واحد: ۲۰ درتاریخ ۹۱/۷/۲۶ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۵ به حروف (نوزده ونیم)

و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما :	دکتر حسین مختاری	
استاد مشاور	دکتر محمد علی صادق زاده	
داور خارج از گروه: الف :	دکتر محمود مرادی	
ب:	دکتر سید جواد اختر شناس	
داور داخل گروه: الف :	دکتر محمد کاظم توسلی	
ب:	دکتر قاسم انصاری پور	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: دکتر سعید ابراهیمی

امضاء:

چکیده

در این پژوهش به بررسی نقش برهم‌کنش اسپین - مدار DM بر روی انتقال درهم‌تنیدگی کوانتومی با استفاده از یک زنجیره اسپینی با برهم‌کنش XXZ پرداخته‌ایم. این نوع برهم‌کنش منجر به یک زنجیره XXZ جدید با یک ثابت جفت‌شدگی و عامل فاز جدید می‌شود. نقش این برهم‌کنش اسپین - مدار در تمامی فضای فاز این زنجیره مورد بررسی قرار گرفته است. به‌ازای مقادیر بزرگ قدرت این برهم‌کنش اسپین - مدار، اندازه ثابت جفت‌شدگی جدید بر پارامترهای دیگر غلبه کرده و تمامی فازهای مختلف زنجیره به مثابه یک کانال کوانتومی یکسان عمل می‌کنند. از آنجایی‌که نتایج تحلیلی برای تعداد اسپین بیش از ۴ امکان‌پذیر نبوده است، در مطالعه زنجیره‌های بزرگ‌تر از محاسبات عددی بهره برده‌ایم. همچنین اثر این برهم‌کنش در دمای غیر صفر نیز مورد بررسی واقع شده است. نتایج نشان داده‌اند که این برهم‌کنش میزان انتقال درهم‌تنیدگی در دمای غیر صفر را بهبود می‌بخشد. در ادامه به بررسی شرایط لازم برای داشتن یک درهم‌تنیدگی کوانتومی پایا برای مدلی از شبکه اسپینی با برهم‌کنش XY به همراه برهم‌کنش شبه‌موضعی با محیط پرداخته‌ایم. این نوع برهم‌کش منجر به بوجود آمدن یک درهم‌تنیدگی پایا و یکنواخت در شبکه می‌شود. نشان داده‌ایم که بیشینه درهم‌تنیدگی کوانتومی بین هر جفت کیوبیت اختیاری به اندازه شبکه (تعداد اسپین‌ها) وابسته است. در این راستا یک سامانه متشکل از آرایه‌ای از میکروکاواک ها به‌همراه یک اتم دوترازی در هر کدام که به‌وسیله فیبرنوری با یکدیگر متصل هستند را به‌عنوان تحقق فیزیکی مدل مورد بررسی معرفی نموده‌ایم. در این سامانه یک‌بعدی هر کدام از فیبرهای نوری با محیط بوزونی پیرامون خود برهم‌کنش دارند و با انجام محاسبات جبری بر روی هامیلتونی و شاه‌معادله تحول این سامانه نشان داده‌ایم که این سامانه معادل یک زنجیره اسپینی است که شرایط لازم برای داشتن درهم‌تنیدگی کوانتومی پایا بین هر جفت کیوبیت آن را دارد. در نهایت یک راه کاملا همدوس برای انتقال مستقیم حالت یک اتم در یک شبکه اپتیکی یک‌بعدی را معرفی می‌کنیم. نشان داده‌ایم که هامیلتونی این شبکه یک‌بعدی معادل یک زنجیره اسپینی با برهم‌کنش XY است. در این روش حالت یک اتم (اطلاعات کوانتومی) به‌وسیله انجام متوالی جابجایی فاز بر روی پتانسیل شبکه در حین تحول آزاد سامانه منتقل می‌شود. این روش برای اعمال گیت‌های کوانتومی و ایجاد درهم‌تنیدگی کوانتومی از طریق امکان برهم‌کنش دو اتم در مجاورت یکدیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱: مفاهیم اولیه ۰

۱-۱ نظریه اطلاعات کوانتومی و حالت‌های درهم‌تنیده کوانتومی ۱

۱-۱-۱ اصول موضوع حالت‌های خالص از سامانه کوانتومی منزوی ۱

۱-۱-۲ حالت‌های آمیخته ۳

۱-۱-۳ ابرعملگرها و نگاشت‌های مثبت ۵

۱-۱-۴ دینامیک یک زیر سامانه ۶

۱-۱-۵ کیوبیت: ساده‌ترین سامانه کوانتومی ۸

۱-۱-۶ کره بلاخ ۹

۱-۱-۷ اندازه‌گیری ۱۰

۱-۲ حالت‌های همبسته کوانتومی ۱۲

۱-۲-۱ آنتروپی شانون ۱۳

۱-۲-۲ آنتروپی وان نیومن ۱۴

۱-۲-۳ جداپذیری ۱۵

۱-۲-۴ سنجه درهم‌تنیدگی ۱۶

۱-۲-۵ دوربری کوانتومی ۲۰

۱-۳ تحقق کامپیوترهای کوانتومی ۲۲

فصل ۲: درهم‌تنیدگی در سامانه‌های بس‌ذره‌ای **۲۴**

۲-۱ مقدمه ۲۵

۲-۲ مدل‌های اسپینی ۲۶

۲-۲-۱ مدل‌های اسپین - $\frac{1}{2}$ با برهم‌کنش کوتاه برد ۲۶

۲-۲-۲ درهم‌تنیدگی دوبخشی در زنجیره‌های اسپینی ۲۸
۲-۲-۳ درهم‌تنیدگی دوبخشی و گذار فاز کوانتومی ۲۹
۲-۲-۴ دینامیک درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های اسپینی ۳۱
۲-۲-۵ تابع همبستگی ۳۲
۲-۳ نقاط کوانتومی ۳۵
۲-۳-۱ ساخت و مشخصه‌های یک نقطه کوانتومی با استفاده از چاه کوانتومی . . ۳۵
۲-۳-۲ الکترون در نقطه کوانتومی میکروکاواک ۳۷
۲-۳-۳ اسپین‌ترونیک ۳۷

فصل ۳: انتقال درهم‌تنیدگی با استفاده از زنجیره اسپینی هایزنبرگ XXZو با برهم‌کنش اسپین مدار DM **۳۹**

۳-۱ مقدمه ۴۰
۳-۲ هامیلتونی‌های اسپینی ۴۰
۳-۳ معادل بودن انتقال حالت کوانتومی با مدل‌های دوربری ۴۱
۳-۴ برهم‌کنش‌های اسپین- مدار ۴۴
۳-۵ الگوی فیزیکی و هامیلتونی ۴۵
۳-۶ انتقال درهم‌تنیدگی ۴۶
۳-۶-۱ محاسبات تحلیلی ۴۹
۳-۷ نتایج عددی ۵۳
۳-۷-۱ درهم‌تنیدگی در دمای صفر ۵۳
۳-۷-۲ درهم‌تنیدگی گرمایی ۵۴
۳-۸ سرعت انتقال اطلاعات ۵۷
۳-۹ نتیجه‌گیری ۵۹

فصل ۴: سامانه‌های باز کوانتومی و واهمدوسی **۶۲**

۴-۱ مقدمه ۶۳
۴-۲ سامانه‌های بسته و باز کوانتومی ۶۳
۴-۲-۱ دینامیک سامانه بسته ۶۴
۴-۲-۲ دینامیک سامانه باز ۶۵
۴-۲-۳ فرایندهای مارکوفی ۶۶

۴-۲-۴ تابع واهمدوسی ۷۲
۳-۴ درهم‌تنیدگی یکنواخت و پایا در یک شبکه اسپینی به‌همراه اتلاف شبه‌موضعی ۷۵
۱-۳-۴ مدل شبکه کوانتومی ۷۶
۲-۳-۴ حالت‌های پایای شبکه ۷۸
۳-۳-۴ توزیع درهم‌تنیدگی حالت پایا ۸۱
۴-۳-۴ تحقق فیزیکی ۸۳
۵-۳-۴ نتیجه‌گیری ۸۶

فصل ۵: ایجاد گیت درهم‌تنیده بین دو کیوبیت در فاصله دور ازهم توسط انتقال مستقیم حالت اتم در یک شبکه اپتیکی **۸۷**

۱-۵ مقدمه ۸۸
۲-۵ شبکه‌های اپتیکی ۸۸
۳-۵ مدل بوز- هابارد ۹۰
۴-۵ انتقال مستقیم حالت یک اتم در یک شبکه اپتیکی و ایجاد گیت کوانتومی بین دو کیوبیت در فاصله دور از هم ۹۱
۱-۴-۵ هامیلتونی و مدل ۹۲
۲-۴-۵ ناکاملی‌های تجربی ۹۳
۳-۴-۵ هماندهی گیت ۹۶
۴-۴-۵ ایجاد درهم‌تنیدگی با اعمال دوران ۹۶
۵-۴-۵ نتیجه‌گیری ۹۸

فصل ۶: نتیجه‌گیری **۱۰۰**

۱-۶ نتیجه‌گیری ۱۰۱
۱-۱-۶ پیشنهاداتی برای ادامه پژوهش ۱۰۲
۲-۱-۶ برون‌دادهای این پژوهش ۱۰۳

فصل ۷: ضمیمه **۱۰۴**

۱-۷ حذف بی‌دررو عملگرهای مدهای فیبرهای نوری در آرایه‌ای از میکروکاواک‌ها . ۱۰۵

مراجع **۱۰۹**

پیشگفتار

در ده سال گذشته شواهد زیادی وجود دارند که نشان‌دهنده این است که پدیده‌های کوانتومی نقش اساسی در توسعه نظریه اطلاعات برعهده دارند. در نظریه ارتباطات، توسعه رمزنگاری کوانتومی یکی از مسایل مورد بررسی برای حفاظت بیشتر اطلاعات بوده و به‌طور هم‌زمان بهبود روش‌های محاسباتی بر اساس نظریه اطلاعات کوانتومی از جمله پیشرفت‌های حاصل شده در این حوزه بوده است. الگوریتم‌های کوانتومی مانند الگوریتم شور[1] رمزنگاری و حفاظت اطلاعات کلاسیکی را به چالش کشید و نشان داد که با تحقق کامپیوترهای کوانتومی و محاسبات بر پایه نظریه اطلاعات کوانتومی، رمزنگاری‌های کلاسیکی از حفاظت بالایی برخوردار نیستند. برای انجام محاسبات کوانتومی نیازمند در اختیار داشتن سامانه‌های منفرد کوانتومی مانند اتم‌ها، یون‌ها، الکترون‌ها و ... به‌عنوان حامل‌های اطلاعات کوانتومی هستیم. امروزه امکان ذخیره‌سازی و دست‌کاری حالت‌های منفرد کوانتومی با استفاده از روش‌های اپتیک کوانتومی و حالت جامد فراهم شده است. در نظریه اطلاعات کوانتومی هر واحد اطلاعات یک بیت کوانتومی است که به اختصار کیوبیت نامیده می‌شود. سال‌های زیادی است که درهم‌تنیدگی به‌عنوان جوهره و مشخصه اصلی مکانیک کوانتومی شناخته شده است. از طرف دیگر پدیده‌های کوانتومی به‌عنوان منبع اصلی ارتباطات و محاسبات کوانتومی هستند و امروزه نقش آن‌ها در سامانه‌ها و فرایندهای زیستی مورد توجه زیادی است. درهم‌تنیدگی یک نوع همبستگی کوانتومی است که هیچ مشابه کلاسیکی ندارد. ایجاد، حفظ و انتقال درهم‌تنیدگی کوانتومی در سامانه‌های کوانتومی یکی از مسایل مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی است. در این راه سامانه‌های مختلف اپتیکی، حالت جامد یا تلفیقی از هر دو پیشنهاد شده است. از جمله سامانه‌های مورد بررسی در فیزیک حالت جامد، سامانه‌های اسپینی است که به دلیل امکان ایجاد، دست‌کاری و کنترل پارامترهای مختلف این سامانه‌ها کاندیدای مناسبی برای انجام محاسبات کوانتومی هستند. یکی از مهم‌ترین مزیت‌های زنجیره‌های اسپینی امکان استفاده از آنها به شکل سیم کوانتومی در اتصال بین دو ابزار حالت جامد در فاصله‌های کوتاه و در ابعاد نانو است. در واقع برهم‌کنش قابل تنظیم بین اسپین‌ها در این زنجیره‌ها پژوهشگران نظری و تجربی به‌خصوص در فیزیک حالت جامد را به تحقیق و استفاده از این ابزار کوانتومی تشویق نموده است. معمولا این سامانه‌های اسپینی از زمان واهمدوسی بالایی برخوردار هستند و امکان ساخت گیت‌های کوانتومی نیز وجود دارد. در این راستا ما نیز به بررسی ایجاد و انتقال درهم‌تنیدگی کوانتومی در سامانه‌های اسپینی یک‌بعدی موسوم به زنجیره‌های اسپینی پرداخته‌ایم. اثر پارامترهای مختلف مانند برهم‌کنش اسپین - مدار، دما و برهم‌کنش با محیط پیرامون در این سامانه‌ها بررسی شده است.

---

[1] Shore

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱-۱ نظریه اطلاعات کوانتومی و حالت‌های درهم‌تنیده کوانتومی

۱-۱-۱ اصول موضوع حالت‌های خالص از سامانه کوانتومی منزوی

در دنیای شگفت انگیز مکانیک کوانتومی اتفاق‌هایی که در حین یک فرایند برای یک سامانه کوانتومی اتفاق می‌افتد، اهمیت چندانی ندارد و تنها حالت‌های اولیه و نهایی سامانه از اهمیت برخوردار هستند. در آزمایشگاه مجموعه احتمال‌های گذار از حالت‌های اولیه به نهایی تعیین می‌شود. در ادامه به بیان اصول متعارف حالت‌های خالص یک سامانه کوانتومی منزوی[۱] که هیچ برهم‌کنشی با محیط پیرامون خود ندارد می‌پردازیم [۱].

اصل ۱. حالت خالص[۲] یک سامانه کوانتومی منزوی در حالت خالص توسط بردار حالت آن $|\psi\rangle$ توصیف می‌شود که $|\psi\rangle$ یک بردار بهنجار در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ از سامانه است.

اصل ۲. اندازه‌گیری تصویری، تحول دینامیکی نامعین:

الف) یک اندازه‌گیری تصویری انجام شده برروی سامانه کوانتومی از یک کمیت کوانتومی (به‌عنوان مثال انرژی، تکانه زاویه‌ای و ...) توسط عملگر هرمیتی که می‌تواند وابسته به زمان باشد و برروی بردارهای فضای هیلبرت اثر می‌کند، توصیف می‌شود.

ب) مقادیر اندازه‌گیری شده که از نتیجه اندازه‌گیری برروی مشاهده‌پذیر A به‌دست می‌آیند، ویژه‌مقادیر a_n هستند. با فرض گسسته بودن طیف عملگر برای سادگی در نوشتار داریم:

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \qquad (۱-۱)$$

پ) به‌محض اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A با حالت‌های بهنجار $|\psi\rangle$ حالت نابهنجار $|\psi'_n\rangle$

[۱] isolated quantum system
[۲] pure state

به‌دست می‌آید:

$$|\psi\rangle \to |\psi'_n\rangle = P_n|\psi\rangle \qquad (۲\text{-}۱)$$

به همراه عملگر تصویری

$$P_n = \sum_{i=۱} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| \qquad (۳\text{-}۱)$$

ت) تعداد مقادیر به‌دست آمده a_n از اندازه‌گیری برروی N سامانه یکسان در حالت $|\psi\rangle$ را با $N(a_n)$ نشان می‌دهیم. فرکانس نسبی $\frac{N(a_N)}{N}$ برای همه این آنسامبل‌ها در حد $N \to \infty$ مقدار احتمال $p(a_n)$ را بیان می‌کند.

$$\frac{N(a_n)}{N} \to p(a_n), \qquad N \to \infty \qquad (۴\text{-}۱)$$

احتمال $p(a_n)$ به‌دست‌آمده از اندازه‌گیری مقدار a_n در یک زمان مشخص برابر با مقدار چشم‌داشتی عملگر تصویری P_n است.

$$p(a_n) = \langle\psi|P_n|\psi\rangle = ||\psi'_n||^۲ \qquad (۵\text{-}۱)$$

ازآنجایی‌که A یک عملگر هرمیتی است، $\sum_n P_n = ۱$ و بنابراین

$$\sum_n p(a_n) = \langle\psi|\psi\rangle = ۱ \qquad (۶\text{-}۱)$$

اصل ۳. تحول دینامیکی معین:

الف) برای سامانه‌های منزوی، توزیع احتمال $p(a_n)$ در یک مسیر برگشت‌پذیر و معین بین حالت آماده‌شده اولیه و حالت اندازه‌گیری شده، تحول می‌یابد. این تحول زمانی بین زمان‌های $t_۰$ و t توسط عملگر یکانی $U(t, t_۰)$ انجام می‌شود و بنابراین

$$U^\dagger(t, t_۰) = U^{-۱}(t, t_۰) \qquad (۷\text{-}۱)$$

برای این عملگر خواص زیر را نیز داریم:

$$U(t_\circ, t_\circ) = 1,$$
$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_\circ) = U(t_2, t_\circ) \qquad (8\text{-}1)$$

ب) معادله دینامیکی $U(t, t_\circ)$ عبارت است از

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_\circ) = H(t)U(t, t_\circ) \qquad (9\text{-}1)$$

که در آن $H(t)$ عملگر هامیلتونی و $\hbar$ ثابت پلانک است.

پ) در تصویر شرودینگر تحول زمانی هر حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_\circ)|\psi(\circ)\rangle \qquad (10\text{-}1)$$

۱-۱-۲ حالت‌های آمیخته

در دنیای واقعی، اطلاعات ما از حالت سامانه بعد از اندازه‌گیری کامل نیست و در ضمن هیچ سامانه‌ای به‌طور کامل از محیط پیرامون خود مستقل نیست. در چنین حالتی تنها می‌توانیم بگوییم کسر p_i از اجزای سامانه (به‌عنوان مثال اتم‌ها) در حالت ψ_i قرار دارند و حالت دستگاه به‌جای خالص، آمیخته است. در غیاب هرگونه اطلاعاتی که یک حالت را بر دیگر حالت‌ها ترجیح دهد، می‌توانیم با اطمینان بیان کنیم که توزیع اجزای سامانه برروی حالت‌های مختلف کاملا یکنواخت است. برای یک سامانه آمیخته مقدار میانگین مشاهده‌پذیر A به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۱]:

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i\langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \mathrm{tr}(\rho A) \qquad (11\text{-}1)$$

که در آن ρ عبارت است از

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \qquad (12\text{-}1)$$

و ماتریس چگالی سامانه نامیده می‌شود. بنابراین حالت چنین سامانه‌ای به‌جای یک بردار با یک ماتریس چگالی بیان می‌شود. این ماتریس چگالی دربرگیرنده تمامی اطلاعاتی است که ما می‌توانیم

از سامانه کوانتومی کسب کنیم. به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که ماتریس چگالی دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\rho) &= ۱ \\ \rho^{\dagger} &= \rho \\ \rho &\geq ۰ \end{aligned} \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

یک حالت خالص است اگر و فقط اگر $\mathrm{tr}(\rho^{۲}) = ۱$. برای به‌دست آوردن حالت یک بخش از سامانه چندبخشی باید برروی درجه‌های آزادی بخش‌های دیگر ردگیری نماییم. نتیجه این ردگیری جزیی[۱] ماتریس چگالی کاهش یافته[۲] بخش مورد نظر است [۱].

برای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مجموعه تمام حالت‌های کوانتومی را با $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهند و به آن فضای حالت گفته می‌شود. حال اگر $\rho_{۱}$ و $\rho_{۲}$ دو ماتریس چگالی باشند ($\rho_{۱}, \rho_{۲} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$) ماتریس

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_{۱} + (۱ - \lambda)\rho_{۲}, \qquad ۰ \leq \lambda \leq ۱ \qquad (۱۴\text{-}۱)$$

نیز یک ماتریس چگالی در این فضای حالت است این موضوع نشان می‌دهد که مجموعه ماتریس‌های چگالی در فضای حالت یک مجموعه محدب را تشکیل می‌دهند. حال که با مفهوم ماتریس چگالی آشنا شدیم می‌توان اصول موضوع مربوط به حالت و اندازه‌گیری را بازنویسی نمود.

اصل ۱. حالت: حالت یک سامانه کوانتومی در فضای هیلبرت یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد واحد است که ماتریس چگالی نامیده می‌شود و معمولا با ρ نمایش داده می‌شود.

اصل ۲. اندازه‌گیری تصویری: هر اندازه‌گیری تصویری روی یک سامانه با مجموعه‌ای از عملگرهای تصویری P_n مشخص می‌شود که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} P_n P_m &= \delta_{n,m} P_n \\ \sum_n P_n &= I \end{aligned} \qquad (۱۵\text{-}۱)$$

که در آن I عملگر واحد روی فضای هیلبرت سامانه است. هرگاه حالت اولیه سامانه را با ρ نمایش دهیم حالت بعد از اندازه‌گیری تنها با احتمال مشخص می‌شود، به این معنا که با

[۱] partial trace
[۲] reduced density matrix

احتمال $P(n) = \mathrm{tr}(P_n \rho P_n)$ حالت بعد از اندازه‌گیری عبارت است از

$$\rho'_m = \frac{P_n \rho P_n}{tr(P_n \rho P_n)} \qquad (۱۶-۱)$$

۱-۱-۳ ابرعملگرها و نگاشت‌های مثبت

انجام عملیات‌های مختلف ازقبیل اندازه‌گیری‌های گوناگون ماتریس چگالی سامانه ρ را به ρ' تحول می‌دهند. اگر نگاشتی را که $\rho \in S(\mathcal{H}_1)$ را به $\rho' \in S(\mathcal{H}_2)$ می‌نگارد را با ε نشان دهیم، در این صورت می‌نویسیم

$$\varepsilon : B(\mathcal{H}_1) \to B(\mathcal{H}_2) \qquad (۱۷-۱)$$

که دارای خواص زیر است.

(۱). خطی است.

(۲). ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می‌نگارد.

(۳). ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می‌نگارد.

(۴). رد ماتریس را حفظ می‌کند.

به چنین نگاشتی یک نگاشت مثبت و رد نگه‌دار[۱] می‌گوییم. به این نگاشت ε یک ابرعملگر[۲] نیز گفته می‌شود. این نگاشت‌های مثبت را همواره می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان نمود:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_n A_n \rho A_n^\dagger \qquad (۱۸-۱)$$

که در آن

$$\sum_n A_n^\dagger A_n = I \qquad (۱۹-۱)$$

[۱] trace preserving positive map
[۲] superoperator

بنابراین اثر یک نگاشت مثبت را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که حالت ρ تحت اثر این نگاشت به مخلوطی از حالت‌های چگالی

$$\rho_n = \frac{A_n \rho A_n^\dagger}{\mathrm{tr}(A_n \rho A_n^\dagger)} \qquad (۲۰\text{-}۱)$$

تبدیل می‌شود که هر کدام با احتمال

$$P_n = \mathrm{tr}(A_n \rho A_n^\dagger) \qquad (۲۱\text{-}۱)$$

در مخلوط نهایی وجود دارند. علاوه برآن ترکیب دو نگاشت مثبت نیز یک نگاشت مثبت است، زیرا همه خواص گفته شده برای یک نگاشت مثبت را در خود دارد [۱].

۱-۱-۴ دینامیک یک زیر سامانه

همانطور که در قبل ذکر گردید، حالت یک سامانه کوانتومی که با یک بردار حالت خالص توصیف می‌شود طبق رابطه $|\psi(t)\rangle = U(t,t_\circ)|\psi(\circ)\rangle$ در زمان تحول می‌یابد. ولی وقتی که حالت سامانه خالص نیست و با یک ماتریس چگالی توصیف می‌شود، این ماتریس چگالی بر طبق رابطه زیر در زمان تحول می‌یابد [۲]:

$$\rho(t) = U(t,t_\circ)\rho(\circ)U^\dagger(t,t_\circ) \qquad (۲۲\text{-}۱)$$

این تحول زمانی ماتریس چگالی تنها در یک حالت خاص صحیح است که برهم‌کنش سامانه با محیط صفر و یا خیلی ضعیف است. برای توضیح مناسب‌تر فرض کنیم در لحظه صفر، حالت سامانه که آن را با A نشان می‌دهیم و محیط که با B نشان می‌دهیم به‌صورت زیر است:

$$\rho_{AB}(\circ) = \rho_A \otimes \rho_B \qquad (۲۳\text{-}۱)$$

حال فرض کنیم هامیلتونی سامانه و محیط به شکل زیر است:

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B \qquad (۲۴\text{-}۱)$$

در این‌صورت عملگر تحول سامانه - محیط به‌شکل ساده زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} U_{AB}(t,t_\circ) &= e^{\frac{-i}{\hbar}H_{AB}(t-t_\circ)} = e^{\frac{-i}{\hbar}(H_A\otimes I_B + I_A\otimes H_B)(t-t_\circ)} \\ &= e^{\frac{-i}{\hbar}H_A(t-t_\circ)} \otimes e^{\frac{-i}{\hbar}H_B(t-t_\circ)} = U_A(t,t_\circ)\otimes U_B(t,t_\circ) \end{aligned} \qquad (۲۵\text{-}۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= U_{AB}(t,t_\circ)\rho_{AB}U_{AB}^\dagger(t,t_\circ) \\ &= (U_A(t,t_\circ)\otimes U_B(t,t_\circ))\rho_{AB}(U_A^\dagger(t,t_\circ)\otimes U_B^\dagger(t,t_\circ)) \\ &= U_A(t,t_\circ)\rho_A(t_\circ)U_A^\dagger(t,t_\circ)\otimes U_B(t,t_\circ)\rho_B(t_\circ)U_B^\dagger(t,t_\circ) \end{aligned} \qquad (۲۶\text{-}۱)$$

درنتیجه ماتریس چگالی سامانه در زمان t عبارت خواهد بود از

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = U_A(t,t_\circ)\rho_A(t_\circ)U_A^\dagger(t,t_\circ) \qquad (۲۷\text{-}۱)$$

حالت به‌دست آمده همانی است که در مکانیک آماری با آن مواجه هستیم. در ادامه دینامیک یک سامانه کوانتومی را برای وقتی که برهم‌کنش بین محیط و سامانه کوچک نیست بررسی نماییم. اهمیت این موضوع بدین سبب است که در کامپیوترهای کوانتومی و به‌طور کلی در سامانه‌های کوانتومی‌ای که در سال‌ها و دهه‌های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، برهم‌کنش‌های بین سامانه و محیط به همان اندازه مهم هستند که برهم‌کنش‌های درون سامانه مهم هستند. برای آنکه دینامیک کلی یک سامانه را بررسی نماییم فرض می‌کنیم در لحظه صفر سامانه در یک حالت $\rho_A(\circ)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. تحت این شرایط چگالی سامانه و محیط در لحظه t برابر خواهد بود با

$$\rho_{AB}(t) = U(t)(\rho_A(\circ)\otimes|e\rangle\langle e|)U^\dagger(t)) \qquad (۲۸\text{-}۱)$$

که در آن $U(t)$ عملگر تحول سامانه - محیط است. ماتریس چگالی سامانه با محاسبه رد جزیی بر روی درجه‌های آزادی محیط به‌دست می‌آید. در نتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}) = tr_B(U(t)(\rho_A(\circ)\otimes|e\rangle\langle e|)U^\dagger(t)) \qquad (۲۹\text{-}۱)$$

با کمی محاسبه می‌توان طرف راست را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_A(t) = \sum_n M_n \rho_A(0) M_n^\dagger \qquad (۳۰\text{-}۱)$$

که در آن

$$M_n = \langle n|U(t)|e\rangle \qquad (۳۱\text{-}۱)$$

و $\{|n\rangle\}$ یک پایه متعامد برای محیط است. عملگرهای M_n برروی سامانه اثر می‌کنند و به این ترتیب دینامیک عمومی سامانه کوانتومی به‌دست می‌آید. عملگرهای M_n عملگرهای کراوس [۱] نامیده می‌شوند و تعداد آن‌ها حداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. از تعریف عملگرهای کراس (رابطه ۱-۳۱) به‌راحتی می‌توان نشان داد که دارای خاصیت زیر هستند:

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = I \qquad (۳۲\text{-}۱)$$

این عملگرها لزوما هرمیتی نیستند و در حالت کلی M_n با $M_n^\dagger$ جابجا نمی‌شود. در فصل (۴) دوباره به دینامیک سامانه کوانتومی باز که با محیط خود برهم‌کنش می‌کند، باز خواهیم گشت.

۱-۱-۵ کیوبیت: ساده‌ترین سامانه کوانتومی

همه سامانه‌های کوانتومی که بیشتر از دو ترکیب خطی مستقل ندارند را می‌توان توسط یک بردار در فضای هیلبرت دوبعدی $\mathcal{H}_۲$ توصیف نمود. این سامانه‌ها ساده‌ترین سامانه‌های کوانتومی هستند . حالت‌های کوانتومی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_۲$ را با توجه به کاربردشان در نظریه اطلاع‌رسانی کوانتومی، کیوبیت [۲] می‌نامند. کیوبیت‌ها دارای شکل زیر هستند:

$$|\psi\rangle = c_۰|۰\rangle + c_۱|۱\rangle, \qquad |c_۰|^۲ + |c_۱|^۲ = ۱ \qquad (۳۳\text{-}۱)$$

که پایه‌های متعامد بهنجار $\{|۰\rangle, |۱\rangle\}$ به پایه‌های استاندارد یا محاسباتی موسوم هستند. از مهم‌ترین مثال‌های فیزیکی برای کیوبیت‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

(۱). اتم دوترازی (یا اتم چند ترازی که فقط دو تراز آن نقش اصلی را در یک فرایند ایفا می‌کنند.)،

[۱] Kraus operators
[۲] qubit