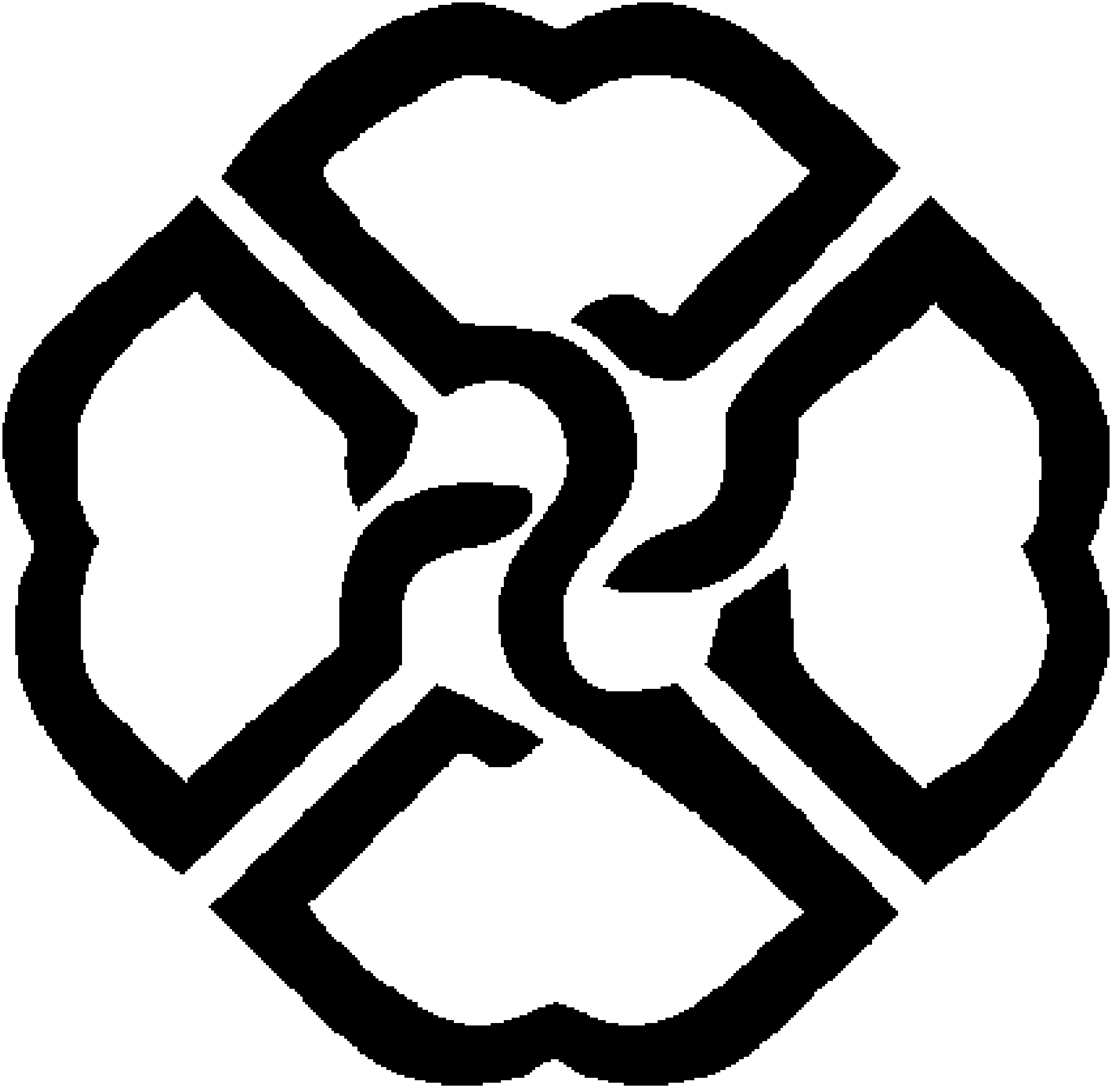

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان:

(α, β)−مشتق‌های ضربی و مشتق‌های جردن جبر ماتریس‌های کامل

پژوهشگر:

مرتضی محمدمرادیان

استاد راهنما:

دکتر محمد نادر قصیری

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

تیرماه ۱۳۹۰

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه‌ی ایثار و

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش‌وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است‌و

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید و

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می‌کنم.

تشکر و قدردانی

در آغاز برخود لازم می‌دانم از زحمات پدر، مادر و همسر گرامی‌ام و کلیه‌ی کسانیکه در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده‌اند کمال تشکر را بنمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه کردستان و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدنادر قصیری که با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی شرکت پذیر و α و β دو خودسانی از حلقه‌ی R باشند. ما در این پایان نامه نخست به معرفی مشتق، مشتق جردن و (α, β)−مشتق ضربی روی R خواهیم پرداخت و سپس شرایطی را روی حلقه‌ی R قرار می‌دهیم که هر (α, β)−مشتق ضربی روی R، جمعی باشد. همچنین نشان می‌دهیم اگر $\mathcal{A}$ یک حلقه‌ی شرکت پذیر یکدار و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$−دو مدول ۲−بی تاب باشد، آنگاه هر مشتق جردن از $M_n(\mathcal{A})$ به $M_n(\mathcal{M})$، یک مشتق است.

واژگان کلیدی: حلقه، مشتق، مشتق جردن، (α, β)−مشتق، جبر ماتریسی کامل، تجزیه‌ی پیرس.

فهرست مندرجات

تاریخچه

این سوال که چه موقع یک نگاشت ضربی، جمعی است اولین بار توسط مارتین دال (Martindale) [۱۷]، مورد توجه قرار گرفت. مارتین دال و دیف (Daif) در [۱۷] و [٦] این سوال را در مورد یکریختی‌های ضربی و مشتق ضربی، جواب داده اند. اخیراً این مسئله برای مشتق‌های جردن روی جبرهای شرکت پذیر، همچون جبر مثلثی و جبر عملگرهای استاندارد در [۱۲و۲۲] مطرح شد. در این پایان نامه ما این سوال را برای (α,β)−مشتق‌های ضربی روی یک حلقه بررسی می‌کنیم.

در چند دهه‌ی اخیر علاقه‌ی زیادی به مطالعه‌ی مشتق‌های جردن روی جبر ماتریس‌ها و نیز روی جبر عملگرها به وجود آمده است. در بیشتر موارد تلاش بر این بوده است که نشان دهند چه موقع یک مشتق جردن، مشتق است. هراشتاین (Herstein) [۷]، نشان داد که هر مشتق جردن از یک حلقه ی اول ۲−بی‌تاب به روی خودش یک مشتق است. برسار Brešar [۴]، ثابت کرد که نتیجه‌ی هراشتاین برای حلقه‌های نیم‌اول ۲−بی تاب نیز صادق است. همچنین سینکلر (Sinclair) [۱۹]، ثابت کرد که هر مشتق جردن خطی پیوسته روی جبرهای باناخ نیم‌ساده یک مشتق داخلی است.

بنکویچ (Benkovič) [۳]، نشان داد که هر مشتق جردن از جبر ماتریس‌های بالا مثلثی به روی هر دو−مدول، می‌تواند به صورت مجموعی از یک مشتق و یک ضد مشتق نوشته شود. ژانگ و یو (Yu) [۲۲]، نشان دادند که هر مشتق جردن از جبرمثلثی، یک مشتق است.

بنابر نتیجه‌ی کلاسیکی از جکوبسون(Jacobson) وریکارت (Rickart) [۹]، هرحلقه‌ی ماتریسی کامل روی یک حلقه‌ی یکدار ۲−بی تاب دارای مشتق جردن محض نیست. این نتیجه با توجه به دو قضیه‌ای که در ادامه بیان می شود حاصل می‌گردد.

فرض کنید A یک حلقه‌ی یکدار ۲−بی تاب و $M_n(A)$ حلقه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ روی A باشد. آنگاه

[۹ ، قضیه‌ی ۷] هر همریختی جردن از $M_n(A)$ را می توان به صورت مجموعی از یک همریختی و یک پادهمریختی نوشت.

[۹ ، قضیه‌ی ۲۲] اگر هر همریختی جردن از A به صورت مجموعی از یک همریختی و یک پادهمریختی باشد، آنگاه هر مشتق جردن از A به روی خودش، یک مشتق است.

حال به معرفی این پایان نامه می‌پردازیم. این پایان نامه شامل سه فصل است. فصل اول به تعاریف ویادآوری برخی از قضیه‌های اولیه در مورد حلقه‌ها، جبر، مدول و مشتق‌ها اختصاص دارد. در فصل دوم نشان می‌دهیم که اگر یک حلقه دارای عضو خودتوانی باشد که در شرایط خاصی که در پایان نامه ذکر شده است صدق کند، آنگاه هر (α, β)−مشتق ضربی روی آن، جمعی است. همچنین نشان می‌دهیم که هر (α, β)−مشتق خطی روی $M_n(\mathbb{C})$، داخلی است. در فصل سوم ابتدا فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک حلقه‌ی شرکت پذیر یکدار و $\mathcal{M}$ نیز یک دو مدول ۲−بی تاب باشد، آنگاه با استفاده از یک روش ساختاری بررسی خواهیم کرد که هر مشتق جردن از حلقه‌ی $M_n(\mathcal{A})$ به $M_n(\mathcal{M})$، مشتق است.

فصل ۱

قراردادها، تعاریف و قضایای اوّلیه

۱.۱ حلقه

قرارداد ۱.۱.۱. در سراسر این پایان نامه، حلقه‌ها را شرکت پذیر در نظر می‌گیریم. یعنی، به ازای هر $a, b, c \in R$، داریم $a.(b.c) = (a.b).c$. بعلاوه، فرض می‌کنیم حلقه‌ها یکدار باشند، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید R و R' دو حلقه و ϕ تابعی از R به توی R' باشد. در این صورت ϕ را یک **همریختی** از R به R' می‌نامند هرگاه به ازای هر $a, b \in R$،

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b), \qquad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

همریختی ϕ را

(i) **تکریختی** نامند هرگاه ϕ یک به یک باشد ،

(ii) **بروریختی** نامند هرگاه ϕ پوشا باشد ،

(iii) **یکریختی** نامند هرگاه ϕ یک به یک و پوشا باشد،

(iv) **درونریختی** نامند هرگاه $R = R'$.

در سراسر این پایان نامه فرض می‌کنیم که اگر حلقه‌ها یکدار باشند، همریختی‌ها یک را حفظ کنند (یعنی، $\phi(1) = 1$) مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

قضیه ۳.۱.۱. اگر ϕ یک یکریختی از حلقه‌ی R به روی حلقه‌ی R' باشد، آنگاه ϕ^{-1} نیز یک یکریختی از R' به روی R است (ϕ^{-1} را وارون ϕ می‌نامند).

تعریف ۴.۱.۱. هرگاه ϕ یک یکریختی از R به روی خودش باشد، ϕ را یک **خودسانی** از حلقه‌ی R می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R و R' دو حلقه و ϕ تابعی از R به توی R' باشد. در این صورت، ϕ را یک **پادهمریختی** از R به R' می‌نامند هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ ،

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b), \qquad \phi(ab) = \phi(b)\phi(a).$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $M_n(R)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی R باشد. در این صورت، $M_n(R)$ با جمع و ضرب معمولی ماتریس ها تشکیل یک حلقه می‌دهد که آن را **حلقه‌ی کامل ماتریس‌های** $n \times n$ روی R گوییم.

تذکر ۷.۱.۱. برای $n \geq 1$ حلقه‌ی $M_n(R)$ تعویض پذیر نیست مگر آنکه R حلقه‌ی بدیهی باشد، زیرا مثلا،

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

اما

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۸.۱.۱. ماتریس $E_{ij} \in M_n(R)$ ، $1 \leq i, j \leq n$ که درایه‌ی (i, j) آن یک و سایر جاها صفر است را یک **ماتریس یکانی** می‌نامیم.

تذکر ۹.۱.۱. به آسانی می‌توان نشان داد برای هر ماتریس $M = (m_{ij})$ داریم

$$E_{ij}ME_{rs} = m_{jr}E_{is}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $T_n(R)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R باشد. در این صورت $T_n(R)$ باجمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهد که آن را **حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی** روی R گوییم . $T_n(R)$ یک زیر حلقه‌ی $M_n(R)$ می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. حلقه‌ی R را **تقلیل یافته** گوییم هرگاه عنصر پوچ توان غیر صفر نداشته باشد، یعنی $a^n = ۰$ نتیجه دهد $a = ۰$.

به سادگی می‌توان نشان داد که حلقه‌ی R تقلیل یافته است اگر وتنها اگر به ازای هر a در R، $a^۲ = ۰$ ایجاب کند $a = ۰$.

تذکر ۱۲.۱.۱. زیرحلقه‌های یک حلقه‌ی تقلیل یافته، تقلیل یافته است.

تذکر ۱۳.۱.۱. اگر $\phi : R \longrightarrow R'$ یک تکریختی حلقه‌ای و R' تقلیل یافته باشد، آنگاه R نیز تقلیل یافته است.

برهان. فرض کنید $r^۲ = ۰$ $(r \in R)$. در این صورت، $(\phi(r))^۲ = ۰$ و از این رو $\phi(r) = ۰$، و چون ϕ یک به یک است $r = ۰$. ■

مثال ۱۴.۱.۱. حلقه‌های $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_۶$ تقلیل یافته هستند.

تذکر ۱۵.۱.۱. به ازای هر دو حلقه‌ی R و S، حلقه‌ی $R \times S$ تقلیل یافته است اگر و تنها اگر R و S هر دو تقلیل یافته باشند. این نتیجه در مورد حاصل ضرب هر تعداد حلقه باز درست است.

تذکر ۱۶.۱.۱. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ تقلیل یافته است اگر وتنها اگر n خالی از مربع باشد (یعنی n به حاصلضرب اعداد اول متمایز تجزیه شود).

برهان. فرض کنید $n=P_1^{r_1}\cdots P_k^{r_k}$ که در آن P_iها اعداد اول متمایزاند و $r_i\geq 1$. ابتدا فرض کنید به ازای iای، $r_i\geq 2$. در این صورت، عنصر غیر صفر $\frac{n}{P_i}$ در $\mathbb{Z}_n$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(\frac{n}{P_i})^2=P_1^{2r_1}\cdots(P_i^{r_i-1})^2\cdots P_k^{2r_k}=0$$

زیرا که توان p_i برابر است با $r_i\geq 2r_i-2$.

برعکس، فرض کنید n خالی از مربع باشد، یعنی، به ازای هر i، $r_i=1$. در این صورت، رابطه‌ی $a^2=0$ در Z_n ایجاب می‌کند که $n|a^2$، و از این رو، به ازای هر i، $P_i|a$ (اگر یک عدد اول حاصلضرب دو عدد را عاد کند، دست کم یکی از آنها را عاد می‌کند.) بنابراین، $n|a$، یعنی $a=0$. ■

تذکر ۱.۱.۱۷. هر میدان و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های روی یک میدان، تقلیل یافته هستند. بطور کلی اگر حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد به سادگی مشاهده می‌شود که حلقه‌ی $R[x]$ نیز تقلیل یافته است.

مثال ۱.۱.۱۸. $M_2(\mathbb{Z})$ تقلیل یافته نیست، زیرا $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=0$.

تعریف ۱.۱.۱۹. ایده‌آل سره‌ی P از حلقه‌ی R را **اول** گوییم اگر به ازای هر دو ایده‌آل A,B از R ، چنانچه داشته باشیم $AB\subseteq P$، آنگاه $A\subseteq P$ یا $B\subseteq P$. یادآوری می‌کنیم که اگر R تعویض پذیر باشد، ایده‌آل سره‌ی P را اول می‌نامیم اگر به ازای هر a و b در R، اگر $ab\in R$، آنگاه $a\in P$ یا $b\in P$.

قضیه ۱.۱.۲۰. برای هر ایده‌آل P در حلقه R عبارات زیر معادلند.

(۱) P اول است.

(۲) برای هر $a,b\in R$ ، $(a)(b)\subseteq P$ نتیجه می‌دهد $a\in P$ یا $b\in P$.

(۳) برای هر $a,b\in R$، $aRb\subseteq P$ نتیجه می‌دهد $a\in P$ یا $b\in P$.

(۴) برای هر دو ایده‌آل چپ A و B در R ، $AB\subseteq P$ نتیجه می‌دهد $A\subseteq P$ یا $B\subseteq P$.

(′۴) برای هر دو ایده‌آل راست A و B در R ، $AB\subseteq P$ نتیجه می‌دهد $A\subseteq P$ یا $B\subseteq P$.

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۲.۱۰ در[۱۳]. ■

تعریف ۲۱.۱.۱. ایده‌آل سره‌ای مانند M از حلقه‌ی دلخواه R را یک **ایده‌آل ماکسیمال** گوییم اگر به ازای هر ایده‌آل I از R به قسمی که $M \subseteq I \subseteq R$ داشته باشیم $I = M$ یا $I = R$.

قضیه ۲۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی (یکدار) و M ایده‌آل سره‌ی از R باشد. در این صورت M ماکسیمال است اگر وتنها اگر حلقه‌ی خارج قسمتی R/M یک میدان باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱. هر ایده‌آل ماکسیمال در حلقه‌ی یکدار R ، یک ایده‌آل اول است.

برهان. فرض کنید M ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد و A, B دو ایده‌آل از R باشند بطوریکه $AB \subseteq M$ و $A \nsubseteq M$ و $B \nsubseteq M$. ماکسیمال بودن M نتیجه می‌دهد که $A + M = R = B + M$ لذا داریم

$$R = R^{2} = (A+M)(B+M) = AB + AM + MB + M^{2} \subseteq M \subseteq R.$$

در نتیجه، داریم $M = R$، که یک تناقض است. ■

نکته : اثبات قضیه‌ی بالا روشن می‌سازد که حتی اگر حلقه‌ی R یکدار نباشد و صرفاً در رابطه‌ی $R^{2} = R$ صدق کند، آنگاه باز هر ایده‌آل ماکسیمال اول است.

تذکر ۲۴.۱.۱. عکس قضیه ی بالا لزوماً درست نیست، مثلاً در حلقه‌ی $\mathbb{Z}$، (0) یک ایده‌آل اول می‌باشد که به وضوح ماکسیمال نیست.

تعریف ۲۵.۱.۱. ایده‌آل C از حلقه‌ی R را **نیمه‌اول** گویند اگر به ازای هر ایده‌آل A از R، $A^{2} \subseteq C$ ایجاب کند که $A \subseteq C$.

قضیه ۲۶.۱.۱. برای هر ایده‌آل C از R، شرایط زیر معادل‌اند:

(i) C ایده‌آلی نیمه‌اول است.

(ii) برای هر $a \in R$، $(a)^{2} \subseteq C$ ایجاب کند که $a \in C$.

(iii) برای هر $a \in R$، $aRa \subseteq C$ ایجاب کند که $a \in C$.

(iv) برای هر ایده‌آل چپ (راست) A در R، $A^۲ \subseteq C$ ایجاب کند که $A \subseteq C$.

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۹ از [۱۳] مراجعه کنید. ■

تعریف ۲۷.۱.۱. حلقه‌ی R **اول** است اگر ایده‌آل (۰) اول باشد. یعنی به ازای هر $a,b \in R$ چنانچه داشته باشیم $aRb = ۰$ ، آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

تعریف ۲۸.۱.۱. حلقه‌ی R را **نیمه‌اول** نامند هرگاه (۰) ایده‌آلی نیمه اول درR باشد. یعنی به ازای هر $a \in R$ چنانچه داشته باشیم $aRa = ۰$، آنگاه $a = ۰$.

مثال ۲۹.۱.۱. هر دامنه، اول است زیرا $aRb = ۰$ نتیجه می‌دهد $ab = ۰$ ، بنابراین $a = ۰$ یا $b = ۰$.

مثال ۳۰.۱.۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، عدد اول باشد، آنگاه حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ اول و در واقع یک میدان است.

مثال ۳۱.۱.۱. هر حلقه‌ی ساده (حلقه‌ای که ایده‌آل غیر بدیهی ندارد) اول است. زیرا فرض کنیم $AB = ۰$. اگر $A = R$ آنگاه $RB = ۰$ نتیجه می‌دهد $B = ۰$.

مثال ۳۲.۱.۱. هرحلقه‌ی تقلیل یافته، نیمه اول است. زیرا $(a)^۲ = ۰$ نتیجه می‌دهد $a^۲ = ۰$. بنابراین $a = ۰$.

قضیه ۳۳.۱.۱. (۱) ایده‌آل A در حلقه‌ی R اول (نیمه اول) است اگر وتنهااگر حلقه‌ی خارج قسمتی R/A اول (نیمه اول) باشد.

(۲) در رسته‌ی حلقه‌های تعویض پذیر، حلقه‌های اول، حوزه‌های صحیح و حلقه‌های نیمه اول، حلقه‌های تقلیل یافته هستند.

برهان. با توجه به تعریف واضح است. ■

مثال ۳۴.۱.۱. ایده‌آل $(٦) = \{۰, ٦\}$ در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{۱۲}$ نیمه‌اول است (زیرا $\mathbb{Z}_{۱۲}/(٦) \cong \mathbb{Z}_٦$ تقلیل یافته و لذا نیمه اول است). اما اوّل نیست (زیرا $\mathbb{Z}_{۱۲}/(٦) \cong \mathbb{Z}_٦$ و در $\mathbb{Z}_٦$ داریم $۰ = ۳ \times ۲$).

قضیه ۳۵.۱.۱. هرگاه M ایده‌آلی در حلقه‌ی $M_n(R)$ باشد ، آنگاه ایده‌آل منحصر بفرد A در R چنان وجود دارد که $M = M_n(A)$.

برهان. فرض کنیم $A = \{a \in R | a = a_{۱۱},\ M$ در (a_{ij}) به ازای ماتریسی چون $\}$. چون $(۰) \in M$ لذا $۰ \in A$. بنابراین $A \neq \emptyset$. واضح است که اگر $a, b \in A$، آنگاه $a - b \in A$. فرض کنید r در R و a در A باشند. چون M یک ایده‌آل $M_n(R)$ است و ماتریس های $(rI)(a_{ij})$ و $(a_{ij})(rI)$ که در آن ماتریس rI ماتریس قطری با درایه‌های قطری r است ، در M قرار دارند و درایه ی $(۱, ۱)$ این ماتریس‌ها به ترتیب، عبارتند از $ra_{۱۱}$ و $a_{۱۱}r$ بنابراین، ra و ar در A هستند. لذا A ایده‌آلی از R است. حال نشان می‌دهیم $M = M_n(A)$. فرض کنید $(a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} \in M$ و نیز فرض کنید $۱ \leq k, l \leq n$. چون M یک ایده‌آل $M_n(R)$ است، داریم :

$$a_{kl}E_{۱۱} = E_{۱k}(a_{ij})E_{l۱} \in M.$$

در نتیجه، به ازای هر $۱ \leq k, l \leq n$، $a_{kl} \in A$ و ازینرو، $(a_{ij}) \in M_n(A)$. در نتیجه، $M \subseteq M_n(A)$.

به عکس، فرض کنید $(a_{ij}) \in M_n(A)$. در این صورت به ازای هر i, j و a_{ij} درایه‌ای $(۱, ۱)$ ماتریسی چون M_{ij} در M است. اما $E_{ii}(M_{ij})E_{jj} = a_{ij}E_{ij}$ ماتریسی در M است (زیرا که M یک ایده‌آل $M_n(R)$ است). پس $M_n(A) \subseteq M$. بنابراین $M = M_n(A)$. بالاخره، A منحصربفرد است زیرا اگر B نیز ایده‌آلی از R باشد، آنگاه به وضوح $A = B \Longleftrightarrow M_n(A) = M_n(B)$. ■

قضیه ۳٦.۱.۱. حلقه‌ی R اول است اگر وتنهااگر $M_n(R)$ اول باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $R \neq ۰$ اول نباشد. آنگاه دو ایده‌آل $A, B \neq ۰$ در R وجود دارند که $AB = ۰$، اما آنگاه $M_n(A)M_n(B) = ۰$. بنابراین، $M_n(R)$ اول نیست .

به‌عکس: اگر $M_n(R) \neq ۰$ اول نباشد، آنگاه $U = M_n(A)$ و $V = M_n(B)$ وجود دارند که A و B ایده‌ال‌های از R هستند و $UV = ۰$ که این ایجاب می‌کند $AB = ۰$. بنابراین، R اول نیست. ■

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و a عضوی از R باشد. a **راخود توان** گوییم هرگاه $a^{2} = a$.

تعریف ۳۸.۱.۱. هرگاه R یک حلقه باشد، آنگاه R^{op} که به صورت زیر تعریف می‌شود، نیز یک حلقه است. مجموعه زمینه‌ی R^{op} همان R بوده و جمع در R^{op} همان جمع در R است. ضرب در R^{op} که با $\circ$ نموده می‌شود با $a \circ b = ba$ تعریف می‌شود که در آن ba حاصلضرب a و b در R است. R^{op} **حلقه‌ی متقابل** R نام دارد.

گزاره ۳۹.۱.۱. R یکدار است اگر و تنها اگر R^{op} نیز یکدار باشد.

گزاره ۴۰.۱.۱. R حلقه‌ی بخشی است اگروتنهااگر R^{op} نیز حلقه‌ی بخشی باشد.

گزاره ۴۱.۱.۱. $R = (R^{op})^{op}$.

گزاره ۴۲.۱.۱. هرگاه R, S حلقه باشند، $R \cong S$ اگروتنها اگر $R^{op} \cong S^{op}$.

تعریف ۴۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. می‌گوییم R، $n-$**بی‌تاب** است هرگاه، به ازای هر $a \in R$، اگر $na = 0$، آنگاه $a = 0$. چنانچه تنها عنصر تابی R، صفر باشد، می‌گوییم R، **بی تاب** است. اگر همه‌ی عناصر R تابی باشند، می‌گوییم حلقه‌ی R **تابی** است.

مثال ۴۴.۱.۱. حلقه‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ به ازای هر عدد صحیح n، $n-$بی تاب هستند.

گزاره ۴۵.۱.۱. $\mathbb{Z}_n$، $r-$بی‌تاب است اگروتنهااگر $(n, r) = 1$.

گزاره ۴۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. حلقه‌ی $M_n(R)$، $n-$بی تاب است اگروتنهااگر R، $n-$بی‌تاب باشد.

تعریف ۴۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر a در R را **فون نیومن منظم، یا منظم** گوییم، هرگاه $a \in aRa$.

تعریف ۴۸.۱.۱. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی **فون نیومن منظم، یا منظم** گوییم هرگاه هر عضو R، **منظم** باشد.

تذکر ۴۹.۱.۱. به سادگی دیده می‌شود که هر حلقه‌ی خارج قسمتی از یک حلقه‌ی منظم، منظم است.

برهان. چنانچه R منظم، I یک ایده‌آل R، و عنصر $a+I$ در R/I باشد، آنگاه به ازای rی در R، $a=ara$، لذا $a+I=ara+I=(a+I)(r+I)(a+I)$. از این رو، $a+I\in(a+I)R/I(a+I)$ ■

تعریف ۵۰.۱.۱. حلقه‌ی R را **بولی** گوییم هرگاه به ازای هر عضو a در R، $a^{۲}=a$.

تذکر ۵۱.۱.۱. به سادگی می‌توان دید که هر حلقه‌ی بول تعویض پذیر است: ابتدا توجه می‌کنیم که به ازای هر a در R، $a=a^{۲}=(-a)^{۲}=-a$ ، از این رو به ازای هر a و b در R داریم

$$a+b=(a+b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+ab+ba=a+b=ab+ba$$

از این رو $ab+ba=۰$، لذا $ab=-ba=ba$.

مثال ۵۲.۱.۱. به ازای هر مجموعه‌ی اندیس گذار متناهی I، $\bigoplus_I \mathbb{Z}_{۲}$ یک حلقه‌ی بولی با $۲^{|I|}$ عضو است، و برعکس. یعنی هر حلقه‌ی بولی متناهی، با تقریب یکسانی، به ازای Iای متناهی با $\bigoplus_I \mathbb{Z}_{۲}$ یکسان است.

مثال ۵۳.۱.۱. هر حلقه‌ی بولی، منظم است.

برهان. فرض R یک حلقه‌ی بولی باشد و $a\in R$. در نتیجه، $a=a^{۲}=aa=aa^{۲}=aaa\subseteq aRa$.

نکته. مثال فوق را می‌توان به آسانی به هر حلقه‌ی R به قسمی که به ازای هر عضو چون a در آن، عدد $n(a)\geq ۲$ چنان موجود باشد که $a=a^{n(a)}$، تعمیم داد: قراردهید $n=n(a)$. در این صورت،

$$a=a^n=(a^n)^n=a(a^n)^{n-۲}.a\in aRa.$$

قضیه ۵۴.۱.۱. فرض کنید S یک حلقه و $M=M_S$ یک مدول نیم ساده باشد. همچنین $R=End(M_S)$ را در نظر بگیرید. آنگاه R منظم است.

برهان. رجوع کنید به [۱۳]. ■

تعریف ۵۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. **حلقه‌ی چند جمله‌ایها** روی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R[x]=\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i|\quad a_i\in R,\quad n\in\mathbb{N},\quad ax=xa\quad \forall a\in R\}.$$

نکته . چون در بعضی حلقه‌های چند جمله‌ای، عناصر حلقه ممکن است با متغیر x تعویض پذیر نباشند، عبارت $ax=xa$ در تعریف بالا را برای تأکید بیشتر بر ساختمان حلقه‌ی $R[x]$ آورده‌ایم.

تعریف ۵۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. **حلقه‌ی سری‌های توانی** روی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R[[x]]=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i|\quad a_i\in R,\quad rx=xr\quad \forall r\in R\}.$$

تعریف ۵۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد و e عضو خودتوانی در R باشد. **تجزیه‌ی پیرس** حلقه‌ی R نسبت به خودتوان e، به صورت جمع مستقیم eRe، $eR(1-e)$، $(1-e)Re$ و $(1-e)R(1-e)$ نوشته می‌شود.

همچنین تجزیه‌ی پیرس چپ حلقه‌ی R نسبت به خودتوان e به صورت $R=eR\oplus(1-e)R$ و تجزیه‌ی پیرس راست حلقه‌ی R، $R=Re\oplus R(1-e)$ می‌باشد. در حالت کلی، فرض کنید $e_1,\ldots,e_n$ عضوهای خودتوان حلقه‌ی R باشند که جمع آنها برابر ۱ است. در این صورت تجزیه‌ی پیرس حلقه‌ی R به صورت جمع مستقیم $e_iRe_j, 1\leq i,j\leq n$ نوشته می‌شود.

تعریف ۵۸.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{R}$ حلقه‌ی اعداد حقیقی باشد. مجموعه‌ی

$$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

را **حلقه‌ی کوترنیون‌های حقیقی** یا **حلقه‌ی همیلتون** می‌گوییم. عمل جمع در $\mathbb{H}$ به صورت مؤلفه‌ای است، و با این قراردادها که $i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱$ و $ij = k = -ji$ و $jk = i = -kj$ و $ki = j = -ik$ عمل ضرب نیز به صورت طبیعی تعریف می‌شود.

۲.۱ مدول

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. گروه تعویض پذیر $(M,+)$ را یک $R-$مدول چپ یکانی روی R نسبت به نگاشت $R\times M \longrightarrow M$: . نامند هرگاه به ازای هر $r,s \in R$ وهر $m,m' \in M$،

(i) $r.(m+m') = r.m + r.m'$،

(ii) $r.(sm) = (rs).m$،

(iii) $(r+s).m = r.m + s.m$،

(iv) $۱.m = m$.

به طور مشابه می‌توان $R-$مدول راست یکانی را تعریف کرد.

هرگاه R یک میدان باشد، آنگاه هر $R-$مدول (چپ) یکانی را یک **فضای برداری** (چپ) می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R و S دو حلقه باشند. M را یک$(R,S)-$**دو مدول** گوییم هرگاه M یک $S-$مدول راست ویک $R-$مدول چپ باشد وبه ازای هر $m \in M$ و $r,s \in R$ داشته باشیم :

$$r(ms) = (rm)s.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه، M یک $R-$مدول، وN زیر مجموعه‌ای ناتهی از M باشد. N یک **زیر مدول** M است مشروط بر اینکه N یک زیر گروه جمعی M بوده و، به ازای هر $r\in R, b\in N$ ، $rb \in N$.