بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

معرفی برخی زیر ساختارهای جبری و یک متر روی بافتارها

استاد راهنما:

دکتر عباس حسنخانی

مولف:

نجمه بارچی‌پور

مرداد ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

مادر عزیزم

که تقدیم زندگی‌ام تلافی‌گر یک نگاه محبت آمیزش نیست.وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر. او که لبانش بارگاه ترنم نغمه‌های آسمانی دعاست. فرشته مهربانی که وجودش سراسر مهر و قلبش تجلی گاه عشق است.

پدر بزرگوارم

او که حال و آینده‌ام از آن زحمات بی دریغ اوست. چروک دستانش مقدس‌ترین خطوط کتاب آفرینش است. او که توانش را داد تا توانا باشم و سپید موی گشت تا سپید روی بمانم.

تشکر و قدردانی:

سپاس بیکران آموزگار مهربان را.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات و رهنمودهای استاد گرامی جناب آقای دکتر عباس حسن‌خانی که هدایت این پایان نامه را به عهده داشتند و همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر حسین مومنایی و آرشام برومند که منت گذارده و زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند نهایت تشکر و قدردانی را بنمایم.

چکیده:

در فصل اول تعاریف و قضایایی درباره‌ی بافتارها و زیر بافتارها مانند زیر بافتارهای دوری و تعداد زیر بافتارهای یک بافتار و ضرب و جمع مستقیم روی یک بافتار بیان می‌شود. در فصل دوم زیر بافتارهای اول و بیشین معرفی و قضایا و نتایجی ارائه می گردد. در فصل سوم یک متر روی بافتار تعریف و قضایایی در مورد آن اثبات می گردد.

فهرست مطالب :

مقدمه:

سازه‌های فضایی شامل شکل‌های ساختاری مانند شبکه‌های تک و دو لایه‌ای، قبه‌های لوله‌ای، بدنه و ساختار کشتی در اشکال مختلف می‌باشند. شروع به کار تحقیقات در زمینه‌ی سازه‌های فضایی مربوط به برهه‌ای از زمان همراه با پیشرفتهای سریع ابتدایی در کامپیوترهای دیجیتالی بود.

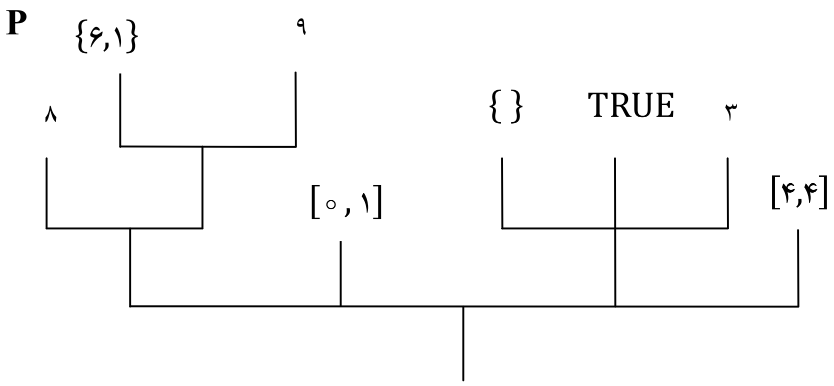
یکی از نتایج این پیشرفتها، آغاز یک انقلاب و دگرگونی در روشهای ماتریسی ، کامپییوتری و تحلیل ساختاری می‌باشد.فعالیت در این زمینه، در نهایت منجر به پیدایش شاخه‌ای از جبر تحت عنوان جبر فرمکسی گردید. مفاهیم جبر فرمکسی کلی می‌باشند و می‌توانند در زمینه‌های متعددی به کار آیند. به ویژه، این ایده‌ها ممکن است برای تولید اطلاعات هندسی درباره‌ی نمودهای مختلف سیستم‌های سازه‌ای مانند اتصال اعضا، مختصات گره‌ها و موقعیتهای بار و تکیه‌گاه به کار رود. اطلاعات تولید شده، ممکن است برای بیان هدفهای مختلف مانند دید گرافیکی و یا داده‌های ورودی برای تحلیل ساختاری به کار رود. استفاده کاربردی از جبر فرمکسی از طریق یک زبان برنامه نویسی تحت عنوان " formain " صورت می‌گیرد، منشا کلمه formain به اواخر قرن هفدهم میلادی برمی‌گردد. جبر فرمکسی قابلیت ارایه ابزاری ساده و بهینه شده را جهت تولید و فرایندسازی اطلاعات هندسی دارد. پیشرفت قابل توجه دیگری نیز وجود دارد که می‌تواند کمک شایانی در فرایند سازی سیستماتیک انواع مختلف اطلاعات ارایه دهد. برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توان مراجع [۱۳,..,۷,۹] را مشاهده کرد. که این توسعه و پیشرفت شامل استفاده از شئ ریاضی تحت عنوان پله‌نیکس می‌باشد.

یک پله‌نیکس یک شئ ریاضی است که شامل ترتیب منظمی از اشیاء ریاضی می‌باشد. پله‌نیکس شبیه ساختار یک درخت می‌باشد که در آن، هر شاخه خود یک شئ ریاضی می‌باشد. به عنوان مثال، شکل ۱ نمایشی از یک پله‌نیکس P می‌باشد. همان‌گونه که در شکل مشخص شده است، یک پله‌نیکس شامل یک دنباله از عناصر است که هر کدام نیز شامل یک دنباله از عناصر است و غیره.

$$\langle\langle ۸, \langle\{۶,۱\}, ۹\rangle\rangle, [۰, ۱], \langle\{\}, \mathrm{TRUE}, ۳\rangle, [۴,۴]\rangle$$

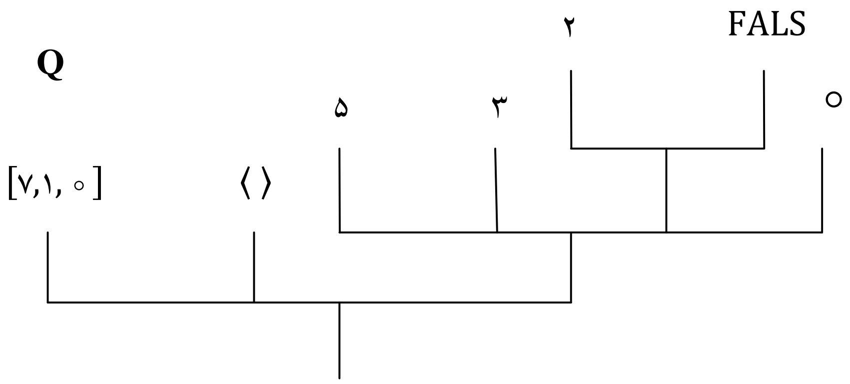
پله نیکس P چهار عنصر اصلی دارد که به هر کدام از آنها قطعه اصلی از پله نیکس P گفته می‌شود. این عناصر عبارتند از:

$[۴,۴]$ $\quad$ $\langle\{\}, \mathrm{TRUE}, ۳\rangle$ $\quad$ $[۰, ۱]$ $\quad$ $\langle ۸, \langle\{۶,۱\}, ۹\rangle\rangle$



شکل۱

در اینجا، اولین و سومین عنصر اصلی از پله نیکس، خودشان پله نیکس می‌باشند. قطعه اصلی از قطعه اصلی پله نیکس، "قطعه فرعی" پله نیکس نام دارد. به عنوان مثال ۸ و ⟨{۶,۱}, ۹⟩ قطعه اصلی از پله نیکس ⟨۸, ⟨{۶,۱}, ۹⟩⟩ و قطعه فرعی از پله نیکس P می‌باشند.
هر قطعه از پله نیکس ممکن است با دنباله‌ای از اعداد مثبت نیز نشان داده شود. به عبارتی این دنباله موقعیت قطعه‌ی پله نیکس را نشان می‌دهد. به این دنباله نشانی از قطعه پله نیکس گوییم. به عنوان مثال، نشانی قطعه‌های پله نیکس Q در جدول آورده شده است.



شکل۲

آدرس (i, j, k) یعنی kامین قطعه اصلی از jامین قطعه اصلی از iامین قطعه اصلی پله نیکس. به عنوان مثال نشانی صفر برابر است با (۳,۴)، که اشاره دارد به اینکه صفر چهارمین قطعه اصلی از سومین قطعه اصلی از پله نیکس Q می‌باشد.

به مجموعه‌ی تمام نشانی‌های قطعه‌های پله نیکس "مجموعه نشانی" گوییم. در پله نیکس Q مجموعه نشانی به صورت زیر است:

$$\{(۱), (۲), (۳), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۳), (۳,۴), (۳,۳,۱), (۳,۳,۲)\}$$

نشانی	قطعه
(۱)	[۷,۱, ۰]
(۲)	⟨ ⟩
(۳)	⟨۵,۳, ⟨۲, FALSE⟩, ۰ ⟩
(۳,۱)	۵
(۳,۲)	۳
(۳,۳)	⟨۲, FALSE⟩
(۳,۴)	۰
(۳,۳,۱)	۲
(۳,۳,۲)	FALSE

برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توان مراجع [۸, ۶,۵, ۴] را مشاهده کرد.

بلوریان در مقاله [۲] و همچنین دررساله دکتری خود [۳] مفهوم بافتار را تعریف نموده و خواص اساسی آن را بررسی کرده است.

فصل اول :

ساختار یک بافتار

۱.۱- ساختار یک بافتار

در اینجا $\aleph \cup \{\circ\}$ با $\aleph^*$ نشان داده می‌شود، که $\aleph$ مجموعه اعداد طبیعی است.

تعریف ۱.۱.۱: یک نشانی، دنباله‌ای از $\aleph^*$ است به طوری که $a_k=\circ$ نتیجه دهد $a_i=\circ$ برای هر $i\geq k$.
دنباله صفر نشانی تهی نامیده می‌شود و با ( ) نشان داده می‌شود.
هر نشانی نا تهی به شکل $(a_۱, a_۲,...,a_n,\circ,\circ,....)$ که a_i و n متعلق به $\aleph$ می‌باشندرا می‌توان به صورت $(a_۱, a_۲,....,a_n)$ نشان داد.

یک بافتار N مجموعه‌ای ناتهی از نشانی‌ها با دو خاصیت زیر می‌باشد:

$$(a_۱, a_۲, \dots , a_n) \in N \to (a_۱, a_۲, \dots , a_{n-۱}, t) \in N \ , \ \ \forall \circ \leq t < a_n$$
$$\{a_i\}_{i=۱}^{\infty} \in N, a_i \in \aleph \to (a_۱, a_۲, \dots , a_n) \in N \quad , \qquad \forall n \in \aleph$$

تبصره ۲.۱.۱: شرط ۱ درتعریف نتیجه می‌دهد که

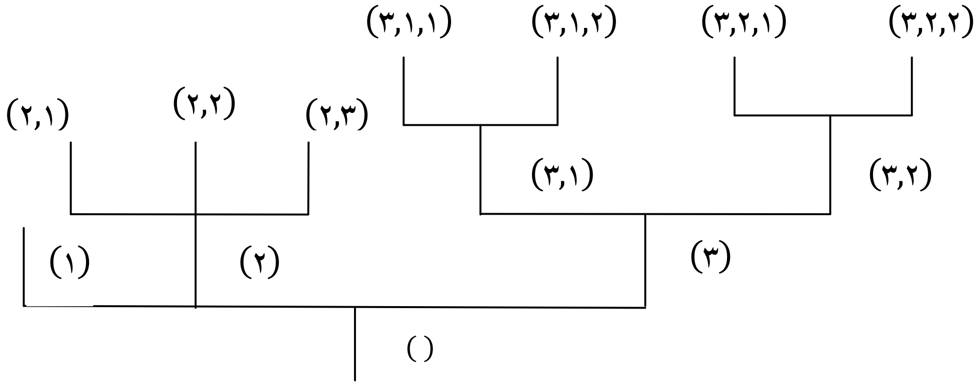
$$(a_۱, a_۲, \dots , a_n) \in N \to (a_۱, a_۲, \dots , a_{n-۱}) \in N \quad \forall n \geq ۲$$

مثال: مجموعه $\{(\,), (۱), (۲), (۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۲,۲), (۲,۳)\}$ یک بافتا ر شامل تعداد متناهی از نشانی ها است، که به آن بافتار متناهی گفته می‌شود.
همچنین یک مجموعه تهی، بافتاریست که شامل هیچ نشانی‌ای نمی‌باشد و به صورت $\{(\,)\}$ نشان داده می‌شود و بافتار تهی نامیده می‌شود.
می‌توان یک بافتار را با استفاده از یک نمودارشبه درخت که داروان نامیده می‌شود نشان داد یک داروان تعدادی از شاخه‌ها است که عناصر N را نشان می‌دهد، در حقیقت یک تناظر یک به یک بین عناصر N وشاخه‌های داروان N وجود دارد.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$N = \left\{ \begin{matrix} (\,), (۱), (۲), (۳), (۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۳,۱) \\ (۳,۲), (۳,۱,۱), (۳,۱,۲), (۳,۲,۱), (۳,۲,۲) \end{matrix} \right\}$$

داروان بافتار در شکل ۱.۱.۱ نشان داده شده است و عناصر متناظر با هر شاخه کنار آن نوشته شده است.



شکل ۱.۱.۱

مثال: بافتارهای $M = \{(\,),(۱)\}$ و $T = \{(\,),(۱),(۱,۱)\}$ مفروض هستند. داروان‌های M و T در شکل ۲.۱.۱ نشان داده شده‌اند.

شکل ۲.۱.۱

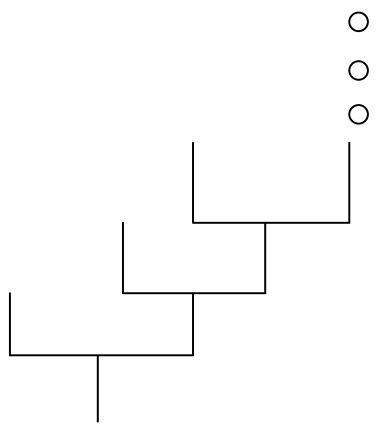
مثال: مجموعه‌های

$A_{۱}$={(۲,۱),(۲,۲)}
$A_{۲}$={(۲,۲,۱),(۲,۲,۲)}
.
.
.
A_{n}={(۲,۲,۲,...,۲,۱),(۲,۲,۲,...,۲)}
.
.
.

اجتماع مجموعه‌های بالا یک بافتار نامتناهی است.

N=$\bigcup_{n=۰}^{\infty} A_n$

داروان N در شکل ۳.۱.۱ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱.۱

تعریف ۳.۱.۱ : اگر N یک بافتار و w یک نشانی از آن باشد تراز w به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱) اگر $w=(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ برای $a_n \in \aleph$ آنگاه، گوییم تراز w برابر n می‌باشد.

۲) اگر w دنباله‌ای نامتناهی از $\aleph$ باشد آنگاه تراز w نامتناهی است.

۳) اگر ( )=w آنگاه تراز w برابر صفر است.

تراز w با L(w) نشان داده می‌شود.

مجموعه تمام نشانی‌های از N که ترازشان k است با N^{k} نشان داده می‌شود

$$N^k = \{a \in N | L(a) = k\}$$

به ویژه $N^\circ = \{(\,)\}$.

فرض کنید M زیر مجموعه‌ای از بافتار N باشد، بالاترین تراز از عناصر M در صورت وجود، سرشاخه M نامیده می‌شود و با rise(M) نشان داده می‌شود.

اگر M شامل عضوی از تراز نا متناهی باشد، آنگاه سرشاخه M نیز نامتناهی است. به ویژه بالاترین تراز از عناصر N، سرشاخه بافتار N و با rise(N) نشان داده می‌شود.

یک رابطه جزئا" مرتب در مجموعه P همراه با $\leq$ ، یک رابطه روی P است هرگاه خواص زیر را داشته باشد:

۱)	(انعکاسی)	$a \leq a$	$\forall\ a$
۲)	(پاد تقارن)	$a \leq b \quad \& \quad b \leq a \Rightarrow a = b$	
۳)	(تعدی)	$a \leq b \quad \& \quad b \leq c \Rightarrow a = b$	

مجموعه ناتهی‌ای که برای آن رابطه‌ی جزئا" مرتب تعریف شود، مجموعه‌ی جزئا" مرتب نامیده می-شود.

عناصر a و b از یک مجموعه‌ی جزئا" مرتب مقایسه پذیرند، اگر یکی از آنها کوچکتر یا مساوی نسبت به عضو دیگر باشد.

عبارت جزئا" در اصطلاح جزئا" مرتب، تأکید بر این دارد، که ممکن است جفت عناصری باشند که مقایسه پذیر نباشند. مجموعه‌ای که هر دو عضو آن مقایسه‌پذیر باشند مجموعه کلا" مرتب یا زنجیر نامیده می‌شود.

مجموعه‌ی جزئا" مرتبی که هر جفت از عناصر آن کوچکترین کران بالا (سوپریمم) و بزرگترین کران پایین (اینفیمم) را داشته باشد مشبکه نامیده می‌شود. و اگر هر جفت از عناصر،کوچکترین کران بالا یا بزرگترین کران پایین داشته باشد نیم مشبکه بالایی یا پایینی نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ : اگر $a = \{a_i\}_{i\in\aleph}$ و $b = \{b_i\}_{i\in\aleph}$ نشانی باشند، آنگاه $a \leq b$ می‌باشد:

۱) اگر $L(a) = ۰$ یعنی $a = (\,)$.

۲) اگر $L(a) = ۱$ که $a = (a_۱)$، آنگاه b نشانی ناتهی‌ای است که $a_۱ \leq b_۱$.

۳) اگر $۱ < L(a) < \infty$ و $L(a) \leq L(b)$ ، $a_i = b_i$ برای هر $۱ \leq i < L(a)$ و $a_{L(a)} \leq b_{L(a)}$.

۴) اگر $L(a) = \infty$ آنگاه a فقط می‌تواند برابر b باشد یعنی مؤلفه‌ها نظیر به نظیر مساویند.

به عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ و $b = (b_۱, b_۲, \ldots, b_m)$ شرایط لازم برای اینکه $a \leq b$ باشد این است که $L(a) \leq L(b)$ ،بنابراین اگر $n \leq m$ آنگاه شرط لازم برقرار است. در مرحله بعد باید شرط کافی برای $a \leq b$ چک شود، یعنی باید $n - ۱$ جمله اول در

a برابر $n-۱$ جمله اول از b باشد وآخرین جمله a که a_n می‌باشد باید کوچکتر مساوی جمله‌ی nام b باشد، به عبارت دیگر، $a_i = b_i$ برای $i = ۱,۲,\dots,n-۱$ و $a_n \leq b_n$

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$N = \left\{ \begin{matrix} (\,), (۱), (۲), (۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۲,۱), (۱,۳,۱) \\ (۱,۳,۲), (۱,۳,۱,۱), (۱,۳,۲,۱), (۱,۳,۲,۲) \end{matrix} \right\}$$

داروان N در شکل ۴.۱.۱ نشان داده شده است. $a = (۱,۳,۱)$ و $b = (۱,۳,۲,۲)$ نشانی‌هایی از بافتار N می‌باشند، چون $L(a) \leq L(b)$ بنابراین شرط لازم برای اینکه $a \leq b$ برقرار است حال چون دو جمله‌ی اول از a برابر دو جمله‌ی اول b می‌باشد و آخرین جمله‌ی a کوچکتر از جمله‌ی سوم b می‌باشد، بنابراین، شرط کافی نیز برقرار است در نتیجه $a \leq b$. اگر $a = (۱,۳,۱,۱)$ و $b = (۱,۳,۲,۱)$ باشد چون $L(a) = L(b)$ شرط لازم برای $a \leq b$ و $b \leq a$ برقرار است، اما سه جمله‌ی اول a و b برابر نمی‌باشد، بنابراین، a و b غیر قابل مقایسه‌اند.

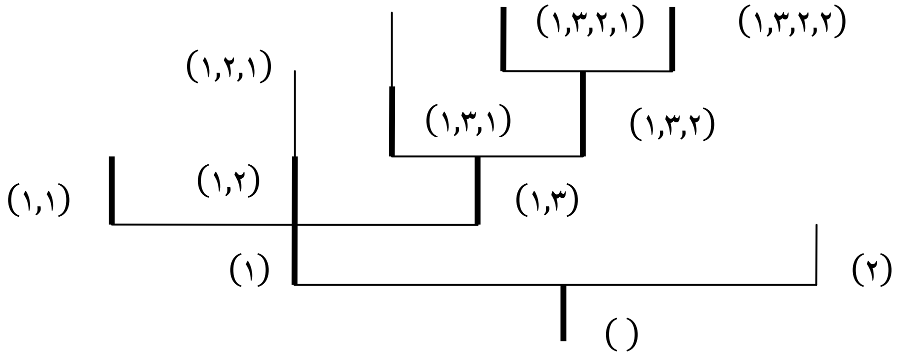
لیست تمام نشانی‌های کوچکتر مساوی $(۱,۳,۲,۲)$ در زیر نشان داده شده است

$$(\,) < (۱) < (۱,۱) < (۱,۲) < (۱,۳) < (۱,۳,۱)$$
$$< (۱,۳,۲) < (۱,۳,۲,۱) < (۱,۳,۲,۲).$$

داروان لیست بالا در شکل ۴.۱.۱ با خطوط ضخیم نشان داده شده‌است.

از تعریف ۴.۱.۱ در هر بافتار N نشانی ( ) نسبت به نشانی‌های دیگر کوچکتر است، یعنی

$(\,) \leq a \quad \forall a \in N$



شکل ۴.۱.۱

قضیه ۵.۱.۱ [۱] **:** اگر N بافتار باشد، آنگاه $(N, \leq)$ مجموعه جزئا" مرتب می‌باشد.

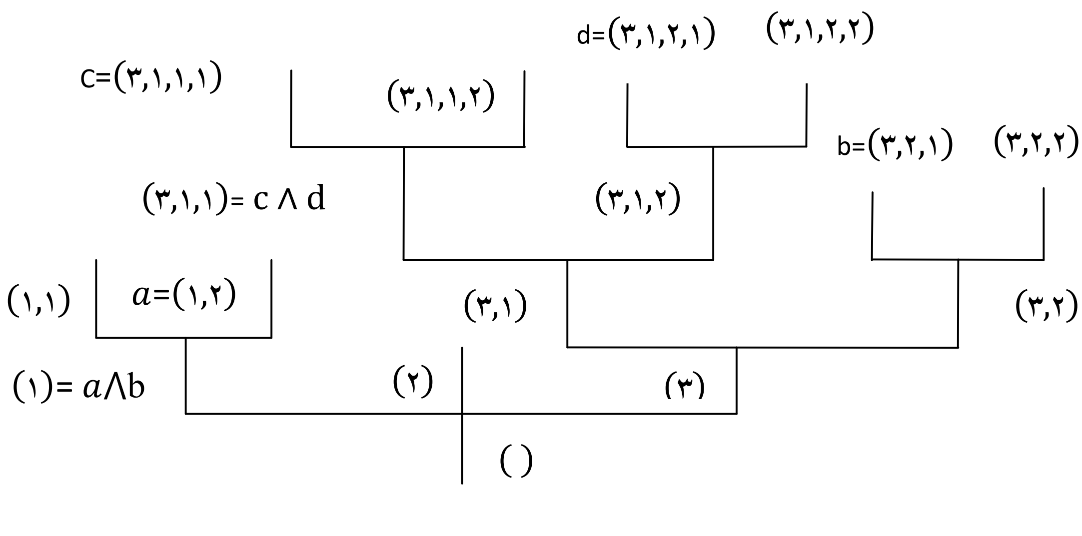
قضیه ۶.۱.۱ [۱] **:** اگر N بافتار باشد، آنگاه $(N, \leq)$ یک نیم مشبکه‌ی پایینی می‌باشد.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$N = \left\{ \begin{matrix} (\,), (۱), (۲), (۳), (۱,۱), (۱,۲), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۱,۱), (۳,۱,۲), \\ (۳,۲,۱)\,, (۳,۲,۲), (۳,۱,۱,۱), (۳,۱,۱,۲), (۳,۱,۲,۱), (۳,۱,۲,۲) \end{matrix} \right\}$$

اینفیمم دو نشانی $a = (۱,۲)$ و $b = (۳,۲,۱)$ از بافتار N ، چون اولین جمله a و b برابر نیستند، و همچنین از اثبات قضیه ۶.۱.۱ داریم $(۱) = (۱\wedge۳) = \inf\{a, b\}$.

حال فرض کنیم $c = (۳,۱,۱,۱)$ و $d = (۳,۱,۲,۱)$ ، چون اولین و دومین جمله از c و d برابر است بنابراین $(۳,۱,۱) = (۳,۱,۱ \wedge ۲) = \inf\{c, d\}$. داروان N در شکل ۵.۱.۱ نشان داده شده است. هر نشانی کوچکتر از $(۳,۱,۱)$ ، به عنوان مثال $(۳,۱), (۳), (۲), (۱)$ و $(\,)$ کران پایین از $(۳,۱,۱,۱)$ و $(۳,۱,۲,۱)$ می‌باشند، و $(۳,۱,۱)$ بزرگترین کران پایین این دو است.



شکل ۵.۱.۱

در مثال زیر نشان داده می‌شود که، در حالت کلی لازم نیست هر دو نشانی از بافتار، کوچکترین کران بالا داشته باشد.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$N = \{(\,), (۱), (۲), (۱,۱), (۱,۲)\}$

کوچکترین کران بالای دو نشانی $(۱,۱)$ و (۲) یعنی $sup\{(۱,۱), (۲)\}$ وجود ندارد.

قضیه ۷.۱.۱: فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از تمام نشانی‌های متناهی باشد، آنگاه S یک بافتار است اگر و تنها اگر، $a \in S$ و $b \leq a$ نتیجه دهد که $b \in S$.

اثبات: فرض کنیم S یک بافتار است، باید نشان دهیم اگر $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \in S$ و $b \leq a$ که $b \in N$ آنگاه $b \in S$. چون $b \leq a$ بنابراین b به صورت $b = (a_۱, a_۲, \ldots, a_k, t)$ می‌باشد که $k < n$ و $t \leq a_{k+۱}$. از تعریف بافتار $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \in S$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم $b = (a_۱, a_۲, \ldots, a_k, t)$ متعلق به S است. برعکس، اگر $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, a_n) \in S$ باید نشان دهیم $(a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, t)$ که $۰ \leq t \leq a_n$ متعلق به S می‌باشد، از تعریف ۴.۱.۱،

$$(a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, t) \leq (a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, a_n) \qquad \forall\ ۰ \leq t \leq a_n$$

بنابراین، از فرض نتیجه می‌شود

$$(a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, t) \in S \qquad \forall\ ۰ \leq t \leq a_n$$

تعریف ۸.۱.۱:

۱) هر نشانی از بافتار N که تنها یک جمله دارد نشانی اصلی از بافتار N نامیده می‌شود، به عبارت دیگر یک نشانی اصلی، به شکل (a) که a یک عدد مثبت است، می‌باشد.

۲) اگر $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ یک نشانی از N باشد، آنگاه نشانی‌های به شکل $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n, t)$ که $t \in \aleph$ می‌باشد، نشانی‌های اصلی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ نامیده می‌شود.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$N = \{(\,), (۱), (۲), (۱,۱), (۱,۲)\}$

نشانی‌های (۱) و (۲) نشانی‌های اصلی N و $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ نشانی‌های اصلی (۱)، می‌باشند.

تعریف ۹.۱.۱ : تعداد نشانی‌های اصلی از بافتار N مرتبه بافتار نامیده می‌شود و با $\mathrm{ord}(\mathrm{N})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱ : هرگاه N یک بافتار و $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_\mathrm{n})$ یک نشانی از N باشد، به اولین جمله‌ی a یعنی $a_۱$ ساقه a گفته می‌شود و می‌نویسیم $\mathrm{stem}(a)=a_۱$. مجموعه‌ی تمام نشانی‌های N که ساقه‌شان k است با $\mathrm{N_k}$ نشان داده می‌شود یعنی

$$\mathrm{N_k} = \{a \in \mathrm{N} | \mathrm{stem}(a) = \mathrm{k}\}$$

به ویژه داریم، $\mathrm{N}_\circ = \{(\,)\}$

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$\mathrm{M} = \{(\,), (۱), (۲), (۳), (۱,۱), (۱,۲), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۲,۱)\}$$

تعداد عناصر اصلی بافتارM، سه است. ساقه‌ی نشانی ( ) ، صفر و ساقه‌ی نشانی (۱) ,(۱,۱) و (۱,۲) ، ۱ می‌باشد. همچنین ساقه‌ی نشانی (۲)،برابر ۲ و ساقه‌ی (۳) ,(۳,۱) ,(۳,۲) و (۳,۲,۱) برابر ۳ است.

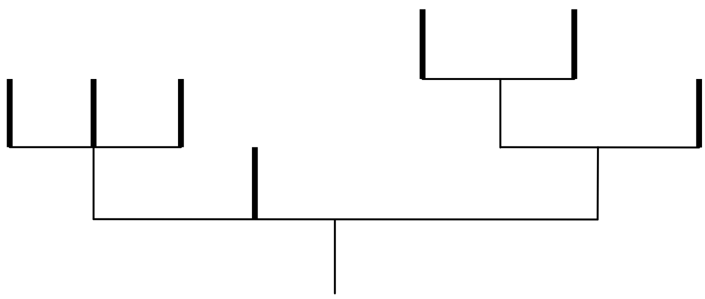
تعریف ۱۱.۱.۱ : نشانی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_\mathrm{n})$ از بافتار N نشانی ابتدایی نامیده می‌شود، به شرطی که $(a_۱, a_۲, \ldots, a_\mathrm{n}, a_{\mathrm{n}+۱})$ متعلق به بافتار N نباشد. مجموعه‌ی تمام نشانی‌های ابتدایی از بافتار N با P(N) نمایش داده می‌شود.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$\mathrm{N} = \{(\,), (۱), (۲), (۳), (۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۱,۱), (۳,۱,۲)\}$$

نشانی‌های (۱,۱) ,(۱,۲) ,(۱,۳) ,(۲) ,(۳,۲) ,(۳,۱,۱) و (۳,۱,۲) نشانی‌های ابتدایی از N می‌باشند.

داروان N در شکل ۶.۱.۱ نشان داده شده است، خطوط ضخیم متناظر با نشانی‌های ابتدایی است.



شکل ۶.۱.۱

تعریف ۱۲.۱.۱ : هرگاه N یک بافتار و $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_{\mathrm{k}})$ یک نشانی از N باشد مجموعه‌ی

$$\{(a_۱, a_۲, \ldots, a_k, a_{k+۱}, \ldots, a_n) \in N | a_{k+i} \in \aleph \quad \forall\, i = ۱,۲, \ldots, n-k\}$$

یک قطعه از a و با q_a نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر اگر $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_{\mathrm{k}})$ ، آنگاه هر نشانی b از N یک نشانی متعلق به q_a است، به شرط اینکه k جمله‌ی اول از b برابر جملات a باشد. قطعه‌ی a، شامل a نمی‌باشد. همچنین $\mathrm{q}_{()}$ شامل تمام نشانی‌های N جز تهی است.

تعریف ۱۳.۱.۱ : هرگاه N یک بافتار و a یک نشانی از N باشد، مجموعه‌ی $\{\mathrm{b} \in \mathrm{N} | a \leq \mathrm{b}\}$ شبه قطعه a و با Q_a نشان داده می‌شود. شبه قطعه a، شامل a است. مجموعه‌ی $\mathrm{Q}_a - \{a\}$ را با نماد Q_a^- نشان می‌دهیم.

مثال: بافتار زیر مفروض است

$$\{(\,), (۱), (۲), (۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۲,۱), (۲,۲,۲), (۲,۳,۱), (۲,۳,۲)\}$$

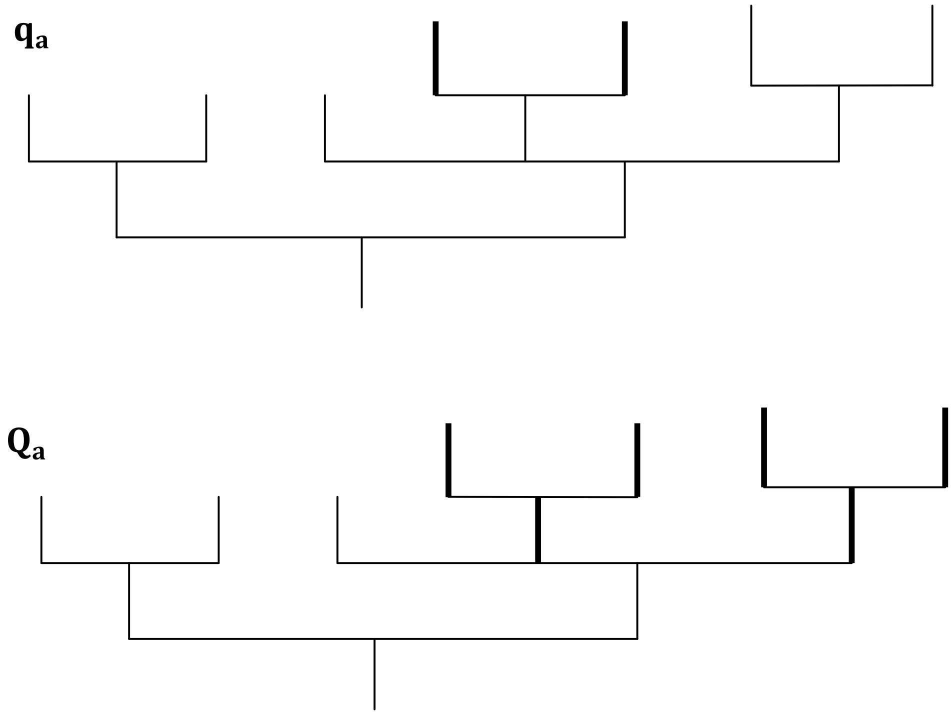
$$\mathrm{q}_{(۲,۲)} = \{(۲,۲,۱), (۲,۲,۲)\}$$
$$\mathrm{Q}_{(۲,۲)} = \{(۲,۲), (۲,۳), (۲,۲,۱), (۲,۲,۲), (۲,۳,۱), (۲,۳,۲)\}$$

به ترتیب قطعه و شبه قطعه a، می‌باشند که در شکل ۷.۱.۱ نشان داده شده‌اند.

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از بافتار N باشد، آنگاه $\mathrm{q}_{\mathrm{S}} = \bigcup_{a \in \mathrm{S}} \mathrm{q}_a$ و $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}} = \bigcup_{a \in \mathrm{S}} \mathrm{Q}_a$.

قابل ذکر است که، تمام نشانی‌های متعلق به q_a نسبت به a بزرگتر می‌باشند، اما عکس این عبارت درست نیست، به عنوان مثال نشانی‌های (۲,۳,۲) ,(۲,۳,۱) و (۲,۳) نسبت به (۲,۲) بزرگترند، اما هیچکدام از آنها متعلق به $\mathrm{q}_{(۲,۲)}$ نمی‌باشد. اما عکس این عبارت برای Q_a برقرار است. به عبارت دیگر تمام نشانی‌هایی از بافتار N که بزرگتر مساوی a می‌باشند، متعلق به Q_a اند، بنابراین،

$$\mathrm{b} \in \mathrm{Q}_a \Leftrightarrow a \leq \mathrm{b} \qquad \forall \mathrm{b} \in \mathrm{N}$$



شکل ۷.۱.۱

دو شرط لازم و کافی برای نشانی‌های متعلق به q_a در لم زیر شرح داده شده است:

لم ۱۵.۱.۱ : هرگاه N یک بافتار و $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ نشانی در N باشد، آنگاه:

۱) $b \in q_a \Leftrightarrow \exists\ c \in q_a \qquad a < b \leq c$

۲) $b \in q_a \Leftrightarrow \exists\ c \in q_a \qquad a < c \leq b$

۳) $b \in q_a \Longrightarrow Q_b \subseteq q_a$

اثبات: ۱) فرض کنیم $b \in q_a$، اگر در نظر بگیریم $b = c$، آنگاه داریم $a < b \leq c$.

بر عکس، فرض کنیم $b \in N$ و همچنین وجود داشته باشد $c \in q_a$ به طوریکه $a < b \leq c$ حال چون $a < b$، بنابراین b به یکی از این دوشکل می‌باشد.