به نام خداوند بخشنده مهربان

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

عنوان:

فشردگی در رسته فضاهای $\mathcal{C}$–تولید شده

استاد راهنما:

دکتر قاسم میرحسین خانی

استاد مشاور:

دکتر محبوبه محمدحسنی

نگارش:

محدثه شعبانی

دی ماه ۱۳۸۹

چکیده

مفهوم فضاهای فشرده یکی از مفاهیم کلیدی و اساسی فضاهای توپولوژیک است که در مطالعه ساختارهای هندسی، آنالیز، توپولوژی جبری و هندسه جبری حائز اهمیت است. طبق تعریف توپولوژی می‌دانیم که اشتراک تعداد متناهی از مجموعه های باز، باز است. بررسی شرایطی که چگونه می شود شرط متناهی بودن را با فشرده بودن جایگزین کرد، ما را به سوی بدست آوردن شرایط معادل برای فشردگی در رسته فضاهای توپولوژیک هدایت می‌کند، با این شرایط معادل، سعی کرده‌ایم تعمیم‌هایی از فشردگی و بعضی معادل‌های آن را در رسته فضاهای $\mathcal{C}$–تولید شده بیان کنیم.

کلمات کلیدی فارسی: فشردگی، فشردگی نسبی، فضاهای $\mathcal{C}$–تولید شده، رسته، $\mathcal{C}$–فشردگی و $\mathcal{C}$–فشردگی نسبی.

تشکر و قدر دانی

یکی از راه های کمال و تقرب به ذات اقدس الهی، علم و دانش است. علمی که به تعبیر استاد شهید مطهری – زیبایی عقل است، علمی که انسان خداجو در آن نشانه‌های معبود را می‌جوید و می‌یابد.

با سپاس فراوان به درگاه خداوند یکتا که توفیق نگارش این پایان نامه را عنایت فرمود.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر قاسم میرحسین‌خانی به واسطه راهنمایی های ارزنده و حمایت های دلسوزانه‌اشان در طول انجام این پرژه، تشکر ویژه داشته باشم.

از ریاست محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای ظهیری نیا برای همکاری و تلاش‌هایشان سپاسگزارم.

از استاد گرامی سرکار خانم دکتر محبوبه محمد حسنی که به عنوان مشاور مساعدت ایشان نقش مهمی در بهبود کیفیت این پایان نامه ایفا نمود، کمال تشکر را دارم.

از جناب دکتر محمد رضا فرهنگ دوست و دکتر مسعود هاوشکی به واسطه صرف وقت و عهده‌داری داوری این پایان نامه صمیمانه تشکر می‌نمایم.

و در پایان بر خود لازم می‌دانم، از پدر و مادرم و همسرم که این پایان نامه را، چون تمام زندگی مرهون شکیبایی آنان می‌دانم صمیمانه سپاسگزاری و قدر دانی نمایم.

فهرستِ مطالب

مقدمه

در این پایان نامه فرض بر آشنایی با مفاهیم اولیه توپولوژی نظیر مجموعه های باز و بسته، نگاشت پیوسته، درون مجموعه و ... گرفته شده است.

در فصل یک به بررسی فضاهای فشرده در رسته فضاهای توپولوژیک و ارائه برخی قضایای مربوط به فشردگی خواهیم پرداخت. هدف از این فصل آشنایی مقدماتی با مفهوم فشردگی است.

در فصل دو خانواده با اندیس پیوسته را معرفی کرده و با کمک آن تعاریف معادلی برای فشردگی در رسته فضاهای توپولوژیک بدست خواهیم آورد. در ادامه فصل این تعاریف را تعمیم داده و بعضی قضیه های گفته شده در فصل یک را به کمک تعاریف جدید اثبات می‌کنیم. در انتهای فصل مفهوم فشردگی نسبی را که تعمیمی از مفهوم فشردگی است معرفی می‌کنیم. مفهوم فشردگی نسبی نقش مهمی در مطالعه فضاهای هسته فشرده و فضاهای تولید شده بازی می‌کند.

در سه بخش ابتدای فصل سه که در واقع مقدمه‌ای بر بخش چهار هستند، به طور خلاصه به بررسی فضاهای نمایی پذیر، فضاهای $\mathcal{C}$–تولید شده و ضرب ها و فضاهای تابعی می‌پردازیم. و به ارائه تعاریف و صورت قضایا بسنده می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در مورد مفاهیم یاد شده به [۱۰] رجوع شود.

در بخش چهار به بررسی مفهوم فشردگی در رسته فضاهای $\mathcal{C}$–تولید شده می‌پردازیم، و مفاهیمی مانند $\mathcal{C}$–فشردگی و $\mathcal{C}$–فشردگی نسبی که تعمیمی از مفهوم فشردگی نسبی و $\mathcal{C}$–فشردگی است معرفی می‌کنیم. در ادامه بخش به بررسی قضایایی در مورد $\mathcal{C}$–فشردگی پرداخته و شرط لازم و کافی برای $\mathcal{C}$–فشردگی نسبی را بیان می‌کنیم.

فصلِ ۱

فشردگی در رسته فضاهای توپولوژیک

۱-۱ فضاهای فشرده

فضاهای فشرده در شاخه های مختلف ریاضیات کاربرد زیادی پیدا کرده اند. طبق معمول برای تعریف فشردگی نیز از فضای اعداد حقیقی الهام می گیریم. مجموعه های بسته و کراندار از اعداد حقیقی به عنوان مدلی که بتوان مفهموم فشردگی را در یک فضای توپولوژی تعمیم داد مورد توجه قرار می گیرند. اما چون مفهوم کرانداری در فضای توپولوژی دلخواه همواره قابل حصول نیست باید به دنبال خصوصیاتی از این مجموعه ها باشیم که در آن کرانداری استفاده نشده باشد. بعضی نتایج کلاسیک از این دست عبارتند از:

الف) هر زیر مجموعه نامتناهی از بازه $[a, b]$ دارای یک نقطه حدی است. (قضیه بولزانو— وایرشتراس)

ب) هر خانواده از بازه های باز که اجتماع آن ها برابر $[a, b]$ باشد، دارای یک زیر خانواده متناهی است که اجتماع آن ها هنوز برابر $[a, b]$ است. (قضیه هاینه — بورل)

ج) یک مجموعه A بسته و کراندار است اگر و فقط اگر هر دنباله در A دارای یک زیر دنباله همگرا به نقطه ای از A باشد.

د) هر تابع حقیقی مقدار پیوسته روی یک مجموعه بسته و کراندار مقادیر ماکزیمم و مینیم‌اش را اختیار می کند.

هر یک از این موارد می توانند برای تعمیم مفهوم فشردگی به کار روند. اما بسیاری از آن ها به دلیل خصوصیاتی که دارند رضایت بخش نیستند. بعد از جستجوی بسیار و بعد از آنکه تیخونوف قضیه اش را اثبات کرد، تعریف فشردگی براساس قضیه هاینه — بورل مورد پذیرش عام قرار گرفت.

۱.۱-۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$. گردایه $\mathcal{C}$ از زیر مجموعه های X را یک پوشش برای A (یا یک پوششِ A) خوانیم در صورتی که

$$A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

به بیان دیگر، گوییم $\mathcal{C}$ مجموعه A را می پوشاند.

هر گاه زیر گردایه ای از $\mathcal{C}$ نیز A را بپوشاند، آن را یک زیر پوشش از $\mathcal{C}$ برای A، یا به طور مختصر، یک زیر پوشش $\mathcal{C}$ می نامیم. در صورتی که X یک فضای توپولوژیک باشد، اغلب پوشش هایی برای X در نظر گرفته می شود که اعضای آن ها دارای خواص معین توپولوژیک باشند. یک پوشش باز X، پوششی است که هر عضو آن (در X) باز باشد. یک پوشش بسته X به طریق مشابه تعریف می شود. در متن زیر عبارت «پوشش برای X» و «پوشش X» را به اقتضای مورد، به کار خواهیم برد.

تبصره. هرگاه $\mathcal{C}$ پوششی برای X باشد، آنگاه $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

۲.۱-۱ تعریف. فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز X شامل یک زیر پوشش متناهی باشد. به عبارت دیگر، هرگاه $\mathcal{C}$ پوشش باز دلخواهی برای X باشد، آنگاه $\mathcal{C}$ اعضایی مانند $C_۱, C_۲, \ldots, C_n$ دارد به طوری که $X = \bigcup_{i=۱}^{n} C_i$.

۳.۱-۱ تعریف. گردایه ای مانند $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های X را گوییم در شرط مقطع متناهی صدق می کند در صورتی که مقطع هر زیر گردایه متناهی از آن ناتهی باشد و به عبارت دیگر هرگاه $\{A_۱, \ldots, A_n\}$ یک زیر گردایه متناهی و دلخواه $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i \neq \emptyset$.

۱-۴.۱ قضیه. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت گزاره های زیر دوبه‌دو معادل اند:

الف. X فشرده است.

ب. اگر $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X باشد به طوری که $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$، آنگاه I زیر مجموعه ای متناهی مانند J دارد که $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

ج. اگر $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X باشد که در شرط مقطع متناهی صدق کند، آنگاه $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

برهان. (ب)$\Rightarrow$(الف): فرض کنیم X فشرده، و $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X باشد به طوری که $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. اینک گردایه $C = \{X - F_i \mid i \in I\}$ از زیر مجموعه های X را در نظر می گیریم. گوییم چون هر F_i بسته است، اعضای C جملگی بازند. از طرفی چون $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$، $X = \bigcup_{i\in I}(X - F_i)$. بنابراین C یک پوشش باز X است. حال از اینکه X فشرده است، C یک پوشش متناهی دارد. بنابراین I، اعضایی مانند $i_1, \dots, i_n$ دارد که $X = \bigcup_{k=1}^{n}(X - F_{ik})$. بنابراین $\bigcap_{k=1}^{n} F_{ik} = \emptyset$. حال کافیست قرار دهیم $J = \{i_1, \dots, i_n\}$ و ملاحظه می کنید که $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

(ج)$\Rightarrow$(ب): فرض کنید $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X باشد که در شرط مقطع متناهی صدق کند. ادعا می کنیم $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. فرض کنید چنین نباشد. بنابراین، $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. در این صورت طبق (ب)، $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$، که در آن J زیرمجموعه ای متناهی از I است. و این متناقض است با اینکه $\{F_i\}_{i\in I}$ در شرط مقطع متناهی صدق کند.

(الف)$\Rightarrow$(ج): اینک (ج) را مفروض می گیریم و ثابت می کنیم X فشرده است. فرض کنیم C یک پوشش باز X باشد و $\omega = \{X - D \mid D \in C\}$. گوییم چون هر عضو C باز است، ω گردایه ای از مجموعه های بسته X است. از طرفی چون C یک پوشش X است،

$X = \bigcup_{D\in C} D$. بنابراین $\bigcap_{W\in\omega} W = \emptyset$. از اینجا به موجب (ب)، معلوم می‌شود که ω در شرط مقطع متناهی صدق نمی‌کند. بنابر تعریف (۱—۱.۳)، نتیجه می‌شود ω زیر گردایه ای متناهی مانند $\{X - D_۱, \dots, X - D_n\}$ دارد که $\bigcap_{i=۱}^{n}(X - D_i) = \emptyset$. بنابراین $X = \bigcup_{i=۱}^{n} D_i$. یعنی پوشش C دارای زیر پوشش متناهی است. ■

۱-۱.۵ مثال.

الف. فرض کنید فضای X متناهی باشد. در این صورت، توپولوژی X هر چه باشد، X فشرده است. بالاخص فضای تهی فشرده است.

ب. هر فضا که توپولوژی آن متناهی باشد فشرده است.

ج. R فشرده نیست. زیرا گردایه $C = \{(-n, n) \mid n \in N\}$ یک پوشش باز برای R است و می دانیم که هیچ زیر گردایه C فضای R را نمی پوشاند.

۱-۱.۶ قضیه. فرض کنیم Y زیر فضایی از X باشد. در این صورت Y فشرده است اگر و تنها اگر هر پوشش Y، از مجموعه های باز X، دارای زیر گردایه ای متناهی باشد که Y را بپوشاند.

برهان. فرض کنیم که Y فشرده، و $\mathcal{C}$ پوششی برای Y از مجموعه های باز X باشد. بنابراین، واضح است که $\mathcal{A} = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$، گردایه ای از زیر مجموعه های باز Y است که Y را می پوشاند. حال گوییم چون Y فشرده است، $\mathcal{A}$ زیر گردایه ای متناهی دارد که Y را می پوشاند. بنابراین، $Y = \bigcup_{i=۱}^{n}(C_i \cap Y)$. از اینجا $Y = (\bigcup_{i=۱}^{n} C_i) \cap Y$. پس $Y \subseteq (\bigcup_{i=۱}^{n} C_i)$ و حکم ثابت می شود.

برعکس، فرض کنید $\mathcal{A}'$ پوششی از مجموعه های باز Y، برای Y باشد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم به ازای هر $A' \in \mathcal{A}'$، مجموعه بازی در X مانند C' هست که $A' = C' \cap Y$ (زیرا A' در

توپولوژی زیر فضایی باز است.) اینک گردایه چنین C' هایی را $\mathcal{C}'$ می نامیم. واضح است که $\mathcal{C}'$ پوششی برای Y از زیر مجموعه های باز X است. بنا به فرض، $\mathcal{C}'$ یک زیر گردایه متناهی مانند $\{C'_1, \ldots, C'_m\}$ دارد که Y را می پوشاند. در این صورت، $\{C'_1 \cap Y, \ldots, C'_m \cap Y\}$ زیر گردایه ای متناهی از $\mathcal{A}'$ است که Y را می پوشاند. یعنی Y فشرده است. ■

۱-۷.۱ قضیه. هر زیر مجموعه بسته یک فضای فشرده، فشرده است.

برهان. فرض کنید X یک فضای فشرده و $Y \ (\subseteq X)$ در X بسته باشد. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک پوشش برای Y از مجموعه های باز X باشد. گردایه $\mathcal{C}$ را چنین تعریف می کنیم: $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}$. چون Y بسته است، $X - Y$ باز است. اینک بدیهی است که $\mathcal{C}$ پوششی باز برای X است. گوییم، چون X فشرده است، زیر گردایه ای متناهی از $\mathcal{C}$ مانند $\mathcal{C}'$ فضای X را می پوشاند. اینک دوحالت تشخیص می دهیم.

حالت اول: $X - Y \in \mathcal{C}'$. در این صورت گردایه متناهی $\mathcal{C}' - \{X - Y\}$، Y را می پوشاند.

حالت دوم: $X - Y \notin \mathcal{C}'$. در این صورت، به وضوح، $\mathcal{C}'$ فضای X و در نتیجه زیر فضای Y را می پوشاند. بنابراین، در هر دو حالت گفته شده گردایه ای متناهی از $\mathcal{C}$ فضای Y را می پوشاند و طبق قضیه(۱–۶.۱) حکم ثابت می شود. ■

۱-۸.۱ تعریف. فضای X را هاسدورف[1] گوییم، هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز X مانند x و y مجموعه های بازی مانند U و V (در X) موجود باشند به طوری که $x \in U$، $y \in V$، و $U \cap V = \emptyset$.

۱-۹.۱ قضیه. اگر X یک فضای هاسدورف باشد و $A \subseteq X$ فشرده، آنگاه A بسته است.

[1] Hausdorff

برهان. کافی است نشان دهیم $X-A$ باز است. فرض کنید $x \in X-A$. برای هر $y \in A$، $y \neq x$. لذا همسایگی های V_y و U_y از x و y موجود است به طوری که $V_y \cap U_y = \emptyset$. چون $\{U_y\}_{y\in A}$ یک پوشش باز برای A می باشد و A فشرده، لذا $U_1, \dots, U_n$ موجودند که به طوری که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.حال قرار می دهیم $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ و $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$، بدیهی است که V یک همسایگی از x است و به علاوه $U \cap V = \emptyset$. زیرا اگر $x_0 \in U \cap V$ موجود باشد، آنگاه:

$$\exists i_0 \quad s.t. \quad 1 \leq i_0 \leq n \quad , \quad x_0 \in U_{i_0}$$

و
$$\forall \quad 1 \leq i \leq n \quad x_0 \in V_i \Rightarrow x_0 \in V_{i_0} \quad (i = i_0)$$

در نتیجه $x_0 \in U_{i_0} \cap V_{i_0}$ که به تناقض می رسیم. از آنجا که $A \subseteq U$، $V \cap A = \emptyset$. پس $X-A$ باز است. ■

۱-۱.۱۰ قضیه. فرض کنید X و Y دو فضا و $f: X \to Y$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت هرگاه X فشرده باشد، آنگاه $f(X)$ فشرده است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{C}$ پوششی برای $f(x)$ از مجموعه های باز Y باشد. گردایه $\mathcal{A} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ را در نظر می گیریم. با توجه به اینکه هر C از $\mathcal{C}$ در Y باز و f پیوسته است، اعضای گردایه $\mathcal{A}$ بازند. به علاوه چون، $f(x) \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$،

$$X \subseteq f^{-1}f(x) \subseteq f^{-1}(\textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C) \subseteq X$$

بنابراین، $X = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C)$. پس معلوم می شود که $\mathcal{A}$ پوشش بازی برای X است. حال گوییم چون X فشرده است، تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ مانند $f^{-1}(C_1), \dots, f^{-1}(C_n)$ فضای X را می پوشاند. بنابراین، $X = f^{-1}(C_1) \cup \dots \cup f^{-1}(C_n) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$. از اینجا، $f(X) = f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. پس زیر گردایه متناهی $\{C_1, \dots, C_n\}$ از $\mathcal{C}$ زیر فضای $f(X)$ را می پوشاند. ■

تبصره. از قضیه قبل معلوم می شود که فشردگی یک خاصیت توپولوژیک است.

۱-۱۱.۱ نتیجه. فرض کنید X و Y دو فضا باشند و $f : X \to Y$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت اگر $X_۱$ زیر مجموعه فشرده ای از X باشد، آنگاه $f(X_۱)$ فشرده است.

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که تابع $f\,|_{X_۱}: X_۱ \to Y$ پیوسته است و قضیه(۱—۱۰.۱) را به کار ببریم. ■

۱-۱۲.۱ قضیه. فرض کنید X یک فضای فشرده و Y یک فضای هاسدورف، و $f : X \to Y$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت تابع f بسته است.

برهان. فرض کنید A در X بسته باشد. بنابراین، به موجب قضیه(۱—۷.۱)، A فشرده است. اینک چون f پیوسته است، بنابر نتیجه(۱—۱۱.۱)، $f(A)$ زیر مجموعه فشرده Y است. از هاسدورف بودن Y نتیجه می شود $f(A)$ بسته است. ■

۱-۱۳.۱ قضیه. فرض کنید X یک فضای فشرده و Y یک فضای هاسدورف، و $f : X \to Y$ یک تناظر ۱—۱ پیوسته باشد. در این صورت، f هومئومورفیسم است.

برهان. با استفاده از فرضیات و قضیه(۱—۱۲.۱) نتیجه می شود که f بسته است. بنابراین، $f^{-۱}$ پیوسته است. ■

۱-۱۴.۱ قضیه. فرض کنید A و B به ترتیب زیر مجموعه هایی فشرده از فضاهای X و Y باشند. به علاوه، فرض کنید مجموعه باز W در $X \times Y$ چنان باشد که $A \times B \subseteq W$. در این صورت مجموعه های بازی مانند U و V به ترتیب در X و Y وجود دارند به طوری که $A \subseteq U$، $B \subseteq V$، و $U \times V \subseteq W$.

برهان. حکم در حالتی که یکی از A و B تهی باشند برقرار است. بنابراین فرض می کنیم هر دو ناتهی باشند. b را عضو دلخواه و از این به بعد ثابتی از B می گیریم. به ازای هر

$a \in A$ داریم $(a,b) \in W$. بنابراین، به موجب تعریف توپولوژی حاصلضربی، مجموعه های بازی در X و Y به ترتیب مانند K_a و L_a وجود دارند به طوری که $(a,b) \in K_a \times L_a \subseteq W$. (توجه کنید چون b ثابت و a دلخواه است، K_a و L_a تنها به a بستگی دارند.) اینک گردایه $\{K_a \mid a \in A\}$ را در نظر می گیریم. این گردایه یک پوشش برای A از مجموعه های باز X است، چون A فشرده است، تعداد متناهی از اعضای این پوشش، A را می پوشاند. فرض کنید این زیر پوشش A، $\{K_{a_1}, \ldots, K_{a_n}\}$ باشد. قرار می دهیم:

$$K_b = \bigcup_{i=1}^{n} K_a \quad , \quad L_b = \bigcap_{i=1}^{n} L_a$$

واضح است که K_b در X و L_b در Y بازند و به علاوه $A \subseteq K_b$ و $b \in L_b$. همچنین $K_b \times L_b \subseteq W$. زیرا اگر فرض کنیم $(x,y) \in K_b \times L_b$، آنگاه jی هست که $1 \leq j \leq n$ و $x \in K_{a_j}$. حال چون $y \in L_b$، داریم $y \in L_{a_j}$. بنابراین $(x,y) \in K_{a_j} \times L_{a_j}$. از طرفی $K_{a_j} \times L_{a_j} \subseteq W$. لذا $(x,y) \in W$. تذکر می دهیم که تا حال حاضر از فشردگی A استفاده کرده ایم و فشردگی B را به کار نبرده ایم.

اینک b را در B تغییر می دهیم و گردایه های $\{K_b \mid b \in B\}$ و $\{L_b \mid b \in B\}$ را در نظر می گیریم. واضح است که $\{L_b \mid b \in B\}$ یک پوشش برای B از مجموعه های باز Y است. چون B فشرده است، تعداد متناهی از اعضای این گردایه مانند $L_{b_1}, \ldots, L_{b_m}$، B را می پوشانند. قرار می دهیم $U = \bigcap_{i=1}^{m} K_{b_i}$ و $V = \bigcup_{i=1}^{n} L_{b_i}$. بدیهی است که U در X و V در Y باز است. به علاوه $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$ و همچنین $U \times V \subseteq W$. ■

۱-۱۵.۱ نتیجه(لم لوله). فضای حاصلضربی $X \times Y$ را که در آن Y فشرده است در نظر بگیرید و فرض کنید W مجموعه بازی در $X \times Y$ باشد به طوری که $\{x_0\} \times Y \subseteq W$ که در آن $x_0 \in X$. در این صورت مجوعه بازی مانند U در X هست که $x_0 \in U$ و

$W \subseteq U \times Y \subseteq \{x_\circ\} \times Y$.

برهان. قضیه(۱—۱.۱۴) را با قرار دادن $\{x_\circ\}$ به جای A و Y به جای B به کار می‌بریم.

■

۱-۱.۱۶ قضیه. حاصلضرب دو فضای فشرده، فشرده است.

برهان. فرض کنید X و Y دو فضای فشرده باشند و $\mathcal{C}$ پوشش بازی برای $X \times Y$ باشد. $x_\circ$ را نقطه دلخواه ولی ثابت از X می گیریم. چون $Y \cong \{x_\circ\} \times Y$ و Y فشرده است، $\{x_\circ\} \times Y$ فشرده است. بنابراین زیر گردایه متناهی از $\mathcal{C}$ مانند $\{C_1, \ldots, C_m\}$ وجود دارد که $\{x_\circ\} \times Y$ را می پوشاند. فرض کنیم $W = C_1 \cup \ldots \cup C_m$. واضح است که W مجموعه ای باز(در $X \times Y$) و حاوی $\{x_\circ\} \times Y$ است. طبق لم لوله، مجموعه بازی در X مانند U هست که $W \subseteq U \times Y \subseteq \{x_\circ\} \times Y$. از اینجا معلوم می شود که تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{C}$ مانند $C_1, \ldots, C_m$ مجموعه $U \times Y$ را می پوشاند. بنابر استدلال فوق معلوم شد که به ازای هر عضو X مانند x، می توان مجموعه بازی مانند U_x چنان یافت که تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{C}$ مجموعه $U_x \times Y$ را بپوشاند. اینک گردایه $\{U_x \mid x \in X\}$ پوشش باز برای X است. چون X فشرده است، این گردایه، زیر گردایه متناهی مانند $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ دارد که X را می پوشاند. واضح است که $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \times Y)$. حال گوییم چون هر یک از$U_{x_i} \times Y$ را می توان با تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{C}$ پوشاند، $X \times Y$ را نیزمی توان با تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{C}$ پوشاند. بنابراین، $X \times Y$ فشرده است. ■

۱-۱.۱۷ تعریف. فضای X را موضعاً فشرده گوییم در صورتی که به ازای هر x از X زیر مجموعه فشرده‌ای از X مانند A، و مجموعه‌ی بازی مانند U موجود باشد به طوری که $x \in U \subseteq A$.

فصلِ ۲

شرایط معادل برای فشردگی در رسته فضاهای توپولوژیک

در این فصل با معرفی خانواده با اندیس پیوسته، معادل‌های جدیدی برای مفهوم فشردگی در رسته فضاهای توپولوژیک ارائه می‌دهیم و در ادامه این مفاهیم را تعمیم داده تا به نتایجی در مورد نگاشت های سره و فشردگی نسبی برسیم.

۲-۱ خانواده با اندیس پیوسته

۲-۱.۱ تعریف. فرض کنید Z یک فضای توپولوژیک و $\{V_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه های باز Z باشد. اگر مجموعه اندیس گذاری I دارای توپولوژی باشد، آنگاه چنین خانواده‌ای را « خانواده با اندیس پیوسته » گوییم هرگاه:
اگر $z \in V_i$ باشد، همسایگی های T از z و U از i موجود باشند به طوری که به ازای هر $t \in T$ و $u \in U$، $t \in V_u$. یا به طور معادل $\{(z,i) \in Z \times I \mid z \in V_i\}$ با توپولوژی حاصلضربی باز باشد.

۲-۱.۲ قضیه . فضای X فشرده است اگر و فقط اگر برای هر فضای دلخواه Z، نگاشت تصویر $\pi : Z \times X \to Z$ بسته باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$: فرض کنید $F \subseteq Z \times X$ بسته باشد و $\pi(F) = A$. برای اینکه نشان دهیم A در Z بسته‌است، کافیست ثابت کنیم $Z - A$ در Z باز است. فرض کنید $z \in Z - A$، در این صورت داریم:

$$z \notin A = \pi(F) \Rightarrow \forall x \in X \quad (z,x) \notin F \Rightarrow (\{z\} \times X) \bigcap F = \emptyset$$

$$\Rightarrow \{z\} \times X \subseteq (Z \times X) - F$$

ازبسته بودن F، باز بودن $(Z \times X) - F$ نتیجه می شود. طبق لم لوله زیرمجموعه باز U از Z موجود است به طوری که، $z \in U \subseteq Z$ و $\{z\} \times X \subseteq U \times X \subseteq (Z \times X) - F$.
بنابراین $(U \times X) \cap F = \emptyset$.

حال ادعا می کنیم $U \cap A = \emptyset$.

برهان خلف: فرض کنید $U \cap A$ عضوی مانند z داشته باشد، بنابراین:

$$z \in A = \pi(F) \Rightarrow \exists x \in X \quad (z, x) \in F \Rightarrow (\{z\} \times X) \bigcap F \neq \emptyset.$$

ملاحظه می کنید با این فرض به تناقض با تهی بودن $(U \times X) \cap F$ می رسیم. بنابراین $U \bigcap A = \emptyset$. در نتیجه $U \subseteq Z - A$، و $Z - A$ در Z باز است.

$(\Rightarrow)$: برهان این قسمت از قضیه، در انتهای بخش(۳) از همین فصل ارائه خواهد شد. ■

۳.۱-۲ لم. برای فضای دلخواه X، گزاره های زیر معادل‌اند:

الف. برای هر خانواده با اندیس پیوسته $\{V_x \mid x \in X\}$ از زیر مجموعه های باز فضای دلخواه Z، مجموعه $\bigcap_{x \in X} V_x$ بازاست.

ب. برای هر فضای Z و هر مجموعه باز $W \subseteq Z \times X$، مجموعه $\{z \in Z \mid \forall x \in X \quad (z, x) \in W\}$ باز است.

برهان. (الف)$\Leftarrow$(ب): فرض کنید $W \subseteq Z \times X$ باز باشد. پس برای هر $(z, x) \in W$ مجموعه های باز U و V_x موجودند به طوری که $(z, x) \in V_x \times U \subseteq W$، در نتیجه خانواده $\{V_x \mid x \in X\}$ از زیر مجموعه های باز Z موجود است که:

$$\forall (z, x) \in W \quad \exists V_x \subseteq Z \quad s.t \quad z \in V_x.$$

بنابراین طبق توپولوژی حاصلضربی مجموعه $\{(z,x)\in Z\times X \mid z\in V_x\}$ باز است. به عبارت دیگر $\{V_x \mid x\in X\}$ یک خانواده با اندیس پیوسته است. طبق فرض $\bigcap_{x\in X} V_x$ باز است، اما:

$$z\in \bigcap_{x\in X} V_x \iff \forall x\in X \quad z\in V_x \iff \forall x\in X \quad (z,x)\in W$$

در نتیجه $\bigcap_{x\in X} V_x=\{z\in Z \mid \forall x\in X \quad (z,x)\in W\}$.

(ب)⇐(الف): فرض کنید $\{V_x \mid x\in X\}$ خانواده ای با اندیس پیوسته باشد. در این صورت بنا بر تعریف(۲—۱.۱)، مجموعه $W=\{(z,x)\in Z\times X \mid z\in V_x\}$ با توپولوژی حاصلضربی باز است. طبق فرض $\{z\in Z \mid \forall x\in X \quad (z,x)\in W\}$ باز است و یک محاسبه ساده نشان می دهد که، $\{z\in Z \mid \forall x\in X \quad (z,x)\in W\}=\bigcap_{x\in X} V_x$. ■

تذکر. مجموعه $\{z\in Z \mid \forall x\in X \quad (z,x)\in W\}$ را می توان به صورت $\{z\in Z \mid \{z\}\times X\subseteq W\}$ نشان داد. بنابر لم (۲—۳.۱)، قضیه های(۲—۴.۱) و (۲—۵.۱) معادل‌اند. به همین دلیل فقط به اثبات قضیه(۲—۵.۱) می پردازیم.

۲-۴.۱ قضیه . فضای X فشرده است اگر و فقط اگر برای هر خانواده با اندیس پیوسته $\{V_x \mid x\in X\}$ از زیر مجموعه های باز فضای دلخواه Z، مجموعه $\bigcap_{x\in X} V_x$ باز باشد.

۲-۵.۱ قضیه . فضای X فشرده است اگر و فقط اگر برای هر فضای Z و هر مجموعه باز $W\subseteq Z\times X$، مجموعه $\{z\in Z \mid \forall x\in X \quad (z,x)\in W\}$ باز باشد.

برهان. (⇐): فرض کنید X فشرده و $W\subseteq Z\times X$ باز باشد. مجموعه بسته F را به صورت $F=(Z\times X)\setminus W$ تعریف می کنیم. اگر $\pi: Z\times X\to Z$ نگاشت تصویر باشد،