بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض

چه هنگام برد یک ضربگر روی جبر باناخ ، بسته است ؟

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:

محسن امینی خوئی

مهرماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض آقای محسن امینی خوئی

تحت عنوان:

چه هنگام برد یک ضربگر روی یک جبر باناخ بسته است

در تاریخ ... ۸۷/۷/۲۴ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب........... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمود لشکری زاده با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر علی رجالی با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر فرید بهرامی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه...........................

بسمه تعالی

شکر و سپاس خداوند بخشنده و مهربان را که آفریننده و روزی دهنده همه مخلوقات عالم است.
اکنون که این پایان نامه به سرانجام رسیده، می دانم که همه لطف عمیم او بوده که در تمام مراحل، شامل حالم شده است.
در اینجا بر خود واجب می دانم از تمام افرادی که در هدایت من به نحوی سهیم بوده اند تشکر و قدردانی کنم.
ابتدا از پدر، مادر و اعضای خانواده ام که در تمام مراحل زندگی پشتیبان من بوده اند تشکر می کنم.
ازتمامی اساتید خود مخصوصا آقای دکتر محمود لشکری زاده و جناب آقای دکتر علی رجالی به خاطر زحمات بی منتشان نسبت به این حقیر کمال قدر دانی و تشکر را دارم.
همچنین از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر عبدالرسول نصر و جناب آقای دکتر فرید بهرامی کمال تشکر را دارم.
در انتها از تمام دوستانم و کادر اداری گروه ریاضی مخصوصا خانمها فرهمند، گرامی،غازی و معمار سپاسگزارم.

تقدیم به:

پدر و مادرعزیزم

به پاس تمام زحماتشان

چکیده:

دراین رساله ما به اثبات قضیه زیر خواهیم پرداخت.
قضیه : فرض کنیم A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کراندار باشد به طوری که هر ایده آل سره ی بسته از A، دریک ایده آل سره ی بسته از A با یک همانی تقریبی کراندار قرار بگیرد. در این صورت ضربگر $T: A \to A$ بابرد بسته است اگروتنها اگر T به صورت حاصلضرب یک ضربگر خود توان و یک ضربگر معکوس پذیر تجزیه شود.

واژگان کلیدی: جبر باناخ ، همانی تقریبی کراندار، ضربگر، طیف گلفند .

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

فرض کنیم A یک جبر باناخ دلخواه با یک همانی تقریبی کراندار باشد. عملگر خطی پیوسته $T:A\rightarrow A$ را یک ضربگر گوئیم هرگاه

هرگاه T به صورت حاصل ضرب یک ضربگر خودتوان θ و ضربگر معکوس پذیر S تجزیه شود ، آن گاه واضح است که برد T بسته است.

هدف اصلی در این رساله حل مسأله ی (۱) زیر می باشد.

مسأله (۱) : چه هنگام ضربگر $T:A\rightarrow A$ با برد بسته را می توان به صورت حاصل ضرب یک ضربگر خودتوان و ضربگر معکوس پذیر تجزیه کرد؟

مسأله (۲): فرض کنیم $T:A\rightarrow A$ یک ضربگر با برد بسته باشد. چه هنگام برد T یک همانی تقریبی کراندار دارد؟

برای بعضی جبرهای باناخ (نه همه ی جبرها) زمانی که برد T در A بسته است ،$T(A)$ یک همانی تقریبی کراندار دارد. بنابراین برای چنین جبرهایی ، حل مسأله ی (۲) ، حل مسأله ی(۱) را در بر می گیرد.

هنگامی که $T(A)$ در A بسته است، طبق قضیه ی تجزیه کوهن یک شرط لازم برای اینکه ایده آل $T(A)$ همانی تقریبی کراندار داشته باشد، آن است که $T^2(A)$ در $T(A)$چگال باشد. این شرط چگال بودن به طور خودکار در بعضی جبرهای باناخ صدق می کند که این موضوع مسأله ی (۳) را مطرح می کند.

مسأله (۳): کدام یک از جبرهای باناخ A با یک همانی تقریبی کراندار دارای این خاصیت می باشد که برای هر ضربگر $T:A\rightarrow A$ با برد بسته ، $T^2(A)$ در $T(A)$چگال است؟

در این رساله با بررسی مسائل زیر ، به حل مسأله ی (۱) خواهیم پرداخت.

در فصل اول برخی مقدمات اولیه مورد نیاز این رساله را بیان خواهیم نمود.

در فصل دوم، مسأله ی (۲) را با مطالعه و بررسی نتایج ارائه شده در منابع [۱۵،۱۶،۲۴و۲۵] حل خواهیم نمود .

در فصل سوم ، ابتدا به حل مسأله ی (۳) می پردازیم و سپس با کمک مسائل (۲) و (۳) به حل مسأله ی (۱) خواهیم پرداخت.

سر انجام در فصل چهارم کاربردهایی از نتایج به دست آمده در فصل های قبلی را بیان خواهیم کرد.

فصل ۱

پیش نیازها

دراین فصل تعاریف اولیه، قضایا، لم‌ها و گزاره‌هایی را که در فصل‌های آینده استفاده خواهند شد بیان شده‌اند. از آوردن اثبات بعضی از قضایا خودداری می‌کنیم.

۱—۱ مفاهیم اولیه‌ی توپولوژی

تعریف ۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد. هر زیرمجموعه از $A \times A$ را یک رابطه روی A گوئیم و با $\leq$ نشان می‌دهیم و به‌علاوه به‌جای $(\alpha, \beta) \in \leq$ می‌نویسیم $\alpha \leq \beta$.

تعریف ۲.۱ رابطه‌ی $\leq$ روی A را یک رابطه ترتیبی جزئی نامیم هرگاه

۱) برای $\alpha \in A$، $\alpha \leq \alpha$؛

۲) برای $\alpha, \beta \in A$ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آن‌گاه $\alpha = \beta$؛

۳) برای α, β و $\gamma \in A$، اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$، آن‌گاه $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۳.۱ مجموعه‌ی غیرتهی A را یک مجموعه‌ی جهت‌دار گوئیم هرگاه یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی $\leq$ روی A موجود باشد به طوری که برای هر زوج α, β از A، عنصر $\gamma \in A$ موجود باشد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک تور در X یک نگاشت چون $f : A \longrightarrow X$ از مجموعه‌ی جهت دار A به X می‌باشد که $\alpha \in A \longrightarrow f(\alpha)$. معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نشان می‌دهیم. لذا تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یا $(x_\alpha)_\alpha$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ تور $(y_\beta)_{\beta \in B}$ را یک زیرتور از تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ گوئیم هرگاه نگاشت $f : B \longrightarrow A$ موجود باشد که

۱) $y_\beta = x_{f(\beta)}$؛

۲) برای $\alpha \in A$، یک $\beta \in B$ موجود باشد به طوری که اگر $\gamma \geq \beta$ آن‌گاه $f(\gamma) \geq \alpha$.

تعریف ۶.۱ هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ را همگرا به $x \in X$ گوئیم هرگاه برای هر همسایگی U حول x، یک $\alpha \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $\beta \in A$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

در این صورت می‌نویسیم $x_\alpha \longrightarrow x$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x$.

قضیه ۷.۱ هرگاه تور $(x_\alpha)_\alpha$ در فضای توپولوژیک X همگرا به x باشد، آن‌گاه هر زیرتور از $(x_\alpha)_\alpha$ نیز همگرا به x است.

قضیه ۸.۱ هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، $x \in X$ یک نقطه‌ی انباشتگی تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X است اگر و تنها اگر زیرتوری همگرا به x داشته باشد.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی انباشتگی برای $A \subseteq X$ گوئیم، هرگاه توری در $A - \{x\}$ وجود داشته باشد که همگرا به x است.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. دراین صورت $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر توری در A موجود باشد که همگرا به x باشد.

قضیه ۱۱.۱ فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر هرتور در X دارای یک زیرتور همگرا باشد.

اثبات. به [۱۱] صفحه‌ی ۱۳۶ مراجعه کنید.

۱—۲ آنالیز تابعی

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری خطی روی میدان اعداد مختلط باشد. منظور از نرم روی X یک نگاشت چون $||.|| : X \longrightarrow C$ است که در خواص زیرصدق کند:

۱)به ازای هر$x \in X$ ، $||x|| \geq 0$؛

۲)به ازای هر$x \in X$ و $\alpha \in C$ ، $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$؛

۳)به ازای هر$x, y \in X$ ، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

X را به همراه این نرم $||.||$ روی آن یک فضای نرم دار گوئیم. همچنین X با متر $d(x, y) = ||x - y||$ یک فضای متریک است و X با توپولوژی تولید شده توسط این متر که به آن توپولوژی نرم گوئیم ، به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود.

تعریف ۱۳.۱ فضای نرم دار X رافضای باناخ گوئیم هرگاه متر تولید شده توسط نرم یعنی، $x, y \in X$ $d(x, y) = ||x - y||$، کامل باشد.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار روی میدان اعداد مختلط باشند آن‌گاه

الف) نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی گوئیم هرگاه

$$\forall \ x, y \in X, \alpha \in C : T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

ب) عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوئیم هرگاه

$$\sup\{\frac{||T(x)||}{||x||}\ ; \circ \neq x \in X\} = \sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq ۱\} < \infty.$$

ج) مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم. $B(X,Y)$ با عمل جمع معمولی و ضرب اسکالر و نرم

$$||T|| = \sup\{\frac{||T(x)||}{||x||}\ ; \circ \neq x \in X\} = \sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq ۱\}$$

یک فضای نرم دار می‌باشد.

$B(X,Y)$ با توپولوژی القایی از نرم $||T|| = \sup\{\frac{||T(x)||}{||x||}\ ; \circ \neq x \in X\}$ به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود که این توپولوژی روی $B(X,Y)$ را توپولوژی عملگر نرمی گوئیم. همچنین همگرایی در آن به این صورت می‌باشد که دنباله‌ی $\{T_n\}$ را همگرا به T گوئیم هرگاه

$$||T_n - T||_{op} \longrightarrow \circ.$$

یا

$$\sup\{||T_n(x) - T(x)|| : ||x|| \leq ۱\} \longrightarrow \circ.$$

د) $B(X,X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم که هر عضوش یک عملگر خطی و کراندار است.

و) فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی کراندار

روی X یعنی، $B(X,C)$، را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X گوئیم.

X^* با نرم $\{||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| \leq 1\}$ یک فضای باناخ می‌باشد.

برای $f \in X^*$، مقدار f در $x \in X$ یعنی، $f(x)$، را با نماد $< f, x >$ نشان می‌دهیم و آن را دوگانگی بین X و X^* گوئیم.

همچنین دوگان X^*، یعنی $(X^*)^*$ را با X^{**} نشان می‌دهیم. واضح است که X^{**} یک فضای باناخ است. نگاشت طبیعی از X به دوگان دوم X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{} : X \longrightarrow X^{**}$$
$$< \hat{x}, f > = < f, x > .$$

تعریف ۱.۱۵ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار با دوگان X^* باشد. در این صورت توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X به طوری که نسبت به آن هر $f \in X^*$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف[1] روی X گوئیم و آن را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

لذا طبق این تعریف، همگرایی ضعیف دنباله‌هادر این فضای توپولوژیک به صورت زیرخواهد بود:

دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ در X راهمگرای ضعیف به $x \in X$ گوئیم اگر و تنهااگر برای هر $f \in X^*$

---

[1] Weak Topology

داشته باشیم

به [۹] صفحه‌ی ۳۵ رجوع کنید.$< f, x_n > \longrightarrow < f, x >$

قضیه ۱۶.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و M یک زیرفضای برداری از X باشد، آن‌گاه M در توپولوژی ضعیف بسته است اگر و تنها اگر M در توپولوژی نرم بسته باشد.

اثبات. به [۲۱] صفحه‌ی ٦۵ رجوع کنید.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار با دوگان X^* باشد. دراین صورت ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* به طوری که برای هر $x \in X$، $\hat{x} \in X^{**}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف ستاره[۲] روی X^* گوئیم و آن را با $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

لذا طبق این تعریف، همگرایی ضعیف ستاره دنباله‌هادر این فضای توپولوژیک به صورت زیرخواهد بود:

دنباله $\{f_n\}_{n\geq 1}$ در X^* همگرای ضعیف ستاره به $f \in X^*$ است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$،

$$< \hat{x}, f_n > = < f_n, x > \longrightarrow < \hat{x}, f > = < f, x > .$$

[۲] Weak Star Topology

گزاره ۱۸.۱ توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(X^*, X)$ هاسدورف است.

اثبات. به [۹] صفحه‌ی ۳۵ رجوع کنید.

قضیه ۱۹.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار روی میدان مختلط C باشد.دراین صورت توپولوژی اولیه روی X یعنی توپولوژی نرم روی X قوی تر از توپولوژی ضعیف روی X است و همچنین توپولوژی ضعیف روی X^* قوی‌تر از توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* است.

اثبات. به [۵] صفحه‌ی ۴۲ رجوع کنید.

قضیه ۲۰.۱ (آلااقلو[۳]) فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد.دراین صورت گوی یکه‌ی بسته‌ی $S^* = \{f \in X^* : ||f|| \leq ۱\}$، فشرده ضعیف ستاره در X^* است.

اثبات. به [۲۱] صفحه‌ی ٦٦ رجوع کنید.

قضیه ۲۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار و $(f_\alpha)_\alpha$ یک تور کراندار در X^* باشد.دراین صورت این تور دارای یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف ستاره در X^* است.

اثبات. از آنجایی که تور $(f_\alpha)_\alpha$ کراندار در X^* است، پس

$$\exists\, k > ۰ \quad s.t \ \ \forall \alpha : ||f_\alpha|| \leq k.$$

---

[۳] Alaoglu

لذا تور $(f_\alpha)_\alpha$ درگوی بسته $B(\circ, k)$ در X^* می‌افتد و چون این گوی طبق قضیه آلاقلو ضعیف ستاره فشرده است، پس تور $(f_\alpha)_\alpha$ در یک مجموعه‌ی ضعیف ستاره فشرده قرار می گیرد. بنابراین دارای یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف ستاره می‌باشد.

قضیه ۲۲.۱ فرض کنیم X و Y دوفضای نرم دار باشند، آن‌گاه عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم X و Y دوفضای نرم دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$$
$$< T^*f, x >=< f, Tx > (\forall\ f \in Y^*, x \in X).$$

T^* را الحاقی T گوئیم.

قضیه ۲۴.۱ هرگاه $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه $T^* \in B(Y^*, X^*)$ و $||T^*|| = ||T||$.

اثبات. به [۲۱] صفحه‌ی ۹۳ رجوع کنید.

قضیه ۲۵.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار باشند. هرگاه $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره— ضعیف ستاره پیوسته است.

برعکس : هرگاه $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره— ضعیف ستاره پیوسته باشد.در این صورت $T \in B(X,Y)$.

اثبات. به [۱۰] صفحات ۲۸۴ و ۲۸۵ رجوع کنید.

قضیه ۲۶.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$ که X یک فضای باناخ باشد. در این صورت هر کدام از سه شرط زیر دو شرط دیگر را به‌دست می‌دهد.

۱) $T(X)$ نرم بسته در X است.

۲) $T^*(X^*)$ ضعیف ستاره بسته در X^* است.

۳) $T^*(X^*)$ نرم بسته در X^* است.

اثبات. به [۲۱] صفحه‌ی ۹۶ رجوع کنید.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنیم M یک زیرفضا از فضای باناخ X و N یک زیرفضا از X^* باشد. در این صورت پوچ‌سازهای $M^\perp$ و $^\perp N$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M^\perp = \{f \in X^* :< f, x >= 0 \ \forall\, x \in M\},$$
$$^\perp N = \{x \in X :< f, x >= 0 \ \forall\, f \in N\}.$$

قضیه ۲۸.۱ فرض کنیم M یک زیرفضا از فضای باناخ X باشد و $x \notin \overline{M}$. در این صورت $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in M$، $< f, x > \neq 0$ و $< f, u >= 0$.

اثبات. به [۲۱] صفحه‌ی ۵۹ رجوع کنید.

قضیه ۲۹.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$ که X یک فضای باناخ باشد. در این صورت