دانشگاه شاهد

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

یک ساختار BCK- جبر روی حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا

نگارش

زهرا منصور سمائی

استاد راهنما

دکتر محمد علی نصر آزادانی

اسفند ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به ساحت مقدس آفتاب عالم تاب

تقدیر و تشکر

الهی ای کامکاری که دل دوستان در کنف توحید توست و ای کارگزاری که جان بندگان در صدف تقدیرت، نگه دار تا پریشان نشویم و در راه ار تا سرگردان نمانیم. شکرگزار وجود مقدسی هستم که به من قدرت اندیشیدن، به قلمم یارای نوشتن و به زبانم توان تکلم عنایت کرد. تدوین این پایان نامه مرهون زحمات مانای استاد ارجمندم دکتر محمد علی نصر آزادانی است، بر خود فرض می دانم نهایت سپاس را از ایشان داشته باشم. در پایان از پدر و مادر عزیزتر از جانم که چون همیشه ستارگان روشن این طریق بودند ممنونم و برایشان سعادت و سلامت آرزومندم.

چکیده

در این پایان نامه دسته ای از BCK-جبرها را می سازیم و نشان خواهیم داد این BCK-جبرها جابجایی، با خاصیت حذفی نسبی، نیم مشبکه پایینی و با شرط (S) است و همچنین دو مثال برای این گونه BCK-جبرها ارائه می‌دهیم. در ادامه نشان می دهیم که برای هر BCI-جبر X ، مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل های بسته در X یک مشبکه‌ی توزیع پذیر شبه متمم دار است اگر و تنها اگر X یک BCK-جبر باشد. همچنین برای هر ایده‌آل بسته مانند A، $A \subseteq A^{**}$ اگر و تنها اگر X یک BCK-جبر باشد. در پایان با توجه به مفهوم مجموعه‌ی $\wedge$-بسته در BCK-جبرها، ساختار کسری روی BCK-جبر های استلزامی کراندار را معرفی و نتایج مرتبط را بدست خواهیم آورد.

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم BCK-جبر[۱] توسط ایمایی[۲] و ایزکی[۳] در سال ۱۹۶۶ از دو منشأ تفاضل مجموعه‌ها و جبر گزاره‌ها سرچشمه گرفت. رابطه‌ی نزدیکی بین تفاضل مجموعه‌ها و جبر گزاره‌ها وجود دارد که به آنها اشاره می‌کنیم. روابط ساده‌ی زیر در نظریه‌ی مجموعه‌ها برقرار است.

$$(1)\ \ (A-B)-(A-C)\subseteq C-B$$

در جبر گزاره ها نیز متناظر با این رابطه را داریم.

$$(2)\ \ (p\longrightarrow q)\longrightarrow((q\longrightarrow r)\longrightarrow(p\longrightarrow r))$$

از جبرهای گزاره ای شامل گزاره ی درست فوق، سیستم های BCI و BCK را مردیت[۴] معرفی کرد. در این سیستم ها، بر گزاره‌ی مهم زیر تاکید می‌شود.

$$p\longrightarrow((p\longrightarrow q)\longrightarrow q)$$

که متناظر با فرمول زیر در نظریه‌ی مجموعه ها است.

$$(5)\quad (A-(A-B))\subseteq B$$

در جبر گزاره ها، گزاره های زیر همیشه درستند

$$(K)\ \ p\longrightarrow(q\longrightarrow p)$$
$$(B)\ \ (p\longrightarrow q)\longrightarrow((r\longrightarrow p)\longrightarrow(r\longrightarrow q))$$
$$(C)\ \ (p\longrightarrow(q\longrightarrow r))\longrightarrow(q\longrightarrow(p\longrightarrow r))$$

خواص دیگری مانند خواص زیر نیز همواره برقرارند.

$$(I)\ \ p\longrightarrow p$$
$$(W)\ \ (p\longrightarrow(p\longrightarrow q))\longrightarrow(p\longrightarrow q)$$

---

[۱] BCK-algebra
[۲] Imai
[۳] Iséki
[۴] Meredith

هم ارز رابطه‌های بالا را نیز در نظریه‌ی مجموعه‌ها داریم. به عنوان مثال

$$p \longrightarrow (q \longrightarrow p) \equiv (A - B) - A = \emptyset$$

این رابطه‌ها ما را به مفهوم BCK-جبر هدایت می‌کند، که در فصل اول به معرفی آن پرداخته شده است.

این پایان نامه شامل ۴ فصل به شرح زیر می باشد:
در فصل اول با مفاهیم مقدماتی چون BCK-جبرها، مجموعه های فازی و حلقه ها آشنا می‌شویم.
در فصل دوم ساختار BCK-جبر D^X را معرفی نموده، خواص و مثال هایی از آن را بیان می‌کنیم.
در فصل سوم پوچ ساز یک مجموعه را تعریف نموده و نشان می‌دهیم اگر مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های BCI-جبر X مشبکه‌ی توزیع پذیر شبه متمم دار باشد، آنگاه X یک BCK-جبر است. در فصل چهارم ساختار کسری روی BCK-جبرهای استلزامی کراندار را معرفی نموده و قضیه هایی را در این مورد ثابت می‌کنیم.
ماحصل نتایج فصل دوم منجر به استخراج مقاله ای تحت عنوان

A class of BCK-algebras

شده است، که برای مجله International Journal of Algebra ارسال شده است و مباحث فصل های سوم و چهارم به ترتیب مربوط به مقالات

(1) M. Kondo, *Annihilators in BCK-algebras*, Mathematical Science. 31,21-25,1998.

(2) R. A. Borzooei and J. Shohani, *Fraction structure on bounded implicative BCK-algebras*, Word Academy of Science, Engineering and Technology 49,1084-1090, 2009.

می‌باشد.

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل با مفاهیمی از BCK-جبرها و مجموعه های فازی و حلقه ها آشنا می‌شویم و از منابع [۷]، [۶]، [۴]، [۳] برای ارائه این مطالب استفاده می‌کنیم.

۲.۱ آشنایی با مفاهیم BCK- جبر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی همراه با عمل دوتایی $* : X \times X \longrightarrow X$ و عنصر ثابت 0 باشد. در این صورت $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$BCI1 : ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0,$$
$$BCI2 : ((x * (x * y)) * y = 0,$$
$$BCI3 : x * x = 0,$$
$$BCI4 : x * y = 0, y * x = 0 \Longrightarrow x = y,$$
$$BCK5 : 0 * x = 0$$

برای هر $x, y, z \in X$.
هر گاه $(X; *, 0)$ در همه‌ی شرط های بالا به غیر از شرط $BCK5$ صدق کند، X را یک BCI-جبر می‌نامیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید X یک BCI- جبر باشد. آنگاه

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$$

برای هر $x, y \in X$.

اثبات. $\square$

قضیه ۳.۲.۱. در یک BCI-جبر X شرایط زیر هم ارزند. برای هر $a \in X$
(i) a عضو مینیمال است.

$a = 0 * (0 * a)$ (ii)

(iii) وجود دارد $x \in X$ به طوری که $a = 0 * x$.

اثبات. $\square$

نتیجه ۴.۲.۱. در BCI-جبر X اگر $x \leq 0$ آنگاه $x = 0$.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2\}$ و عملگر $*$ را روی X با استفاده از جدول زیر تعریف کنیم

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

در این صورت X یک BCK-جبر است.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی آن باشد. عملگر $*$ را روی $\mathcal{P}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم، که برای هر $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A * B = \begin{cases} \emptyset & \text{،} \ A \subseteq B, \\ A - B & \text{،} \ B \subset A. \end{cases}$$

در این صورت $(\mathcal{P}(X); *, \emptyset)$ یک BCK-جبر است.

حل : فرض کنید A, B, C سه زیرمجموعه ناتهی از X باشند، خواص BCK را در X در حالتی

که $A * B = A - B$ بررسی می‌کنیم. $BCI1$:

$$
\begin{aligned}
&((A * B) * (A * C)) * (C * B) \\
=&((A - B) - (A - C)) - (C - B) \\
=&((A \cap B') \cap (A \cap C')') \cap (C \cap B')' \\
=&[((A \cap B') \cap A') \cup ((A \cap B') \cap C))] \cap (C \cap B')' \\
=&((A \cap C) \cap B') \cap (C' \cup B) \\
=&[(A \cap C \cap B') \cap C'] \cup [(A \cap C \cap B') \cap B \\
=&\emptyset
\end{aligned}
$$

$BCI2$:

$$
\begin{aligned}
&(A * (A * B)) * B \\
=&(A - (A - B)) - B \\
=&(A \cap (A \cap B')') \cap B' \\
=&(A \cap (A' \cup B)) \cap B' \\
=&((A \cap A') \cup (A \cap B)) \cap B' \\
=&\emptyset
\end{aligned}
$$

$BCI3$:

$$A * A = A - A = A \cap A' = \emptyset$$

$BCI4$: فرض کنید $A * B = \emptyset$ و $B * A = \emptyset$ در این صورت

$$(1) \quad A - B = A \cap B' = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$

$$(2) \quad B - A = B \cap A' = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A$$

بنابراین با استفاده از (1) و (2) داریم : $A = B$

$BCK5$:

$$\emptyset * A = \emptyset - A = \emptyset$$

مثال های زیر نشان می‌دهند که خواص پنج گانه BCK مستقل از یکدیگرند.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, ...\}$ و عملگر $*$ بوسیله رابطه‌ی زیر تعریف شده باشد

$$x * y = \begin{cases} 0 & x \leq y, \\ 1 & otherwise. \end{cases}$$

X در شرایط $BCI1$ ، $BCI3$ ، $BCI4$ ، $BCK5$ صدق می‌کند، اما در شرط $BCI2$ صدق نمی‌کند زیرا برای $1 < y$ و $1 < x$ داریم

$$(x * (x * y)) * y = (x * (1)) * y \neq 0$$

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, , ..., \omega\}$ با ترتیب زیر باشد، که برای هر $i \in X$ داریم $i < i + 1$ و $i < \omega$ و عمگر $*$ در X بوسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعریف شده باشد

$$x * y = \begin{cases} 0 & , x \leq y \\ \omega & , y < x, y \neq 0 \\ x & , y = 0 \end{cases}$$

در این مثال $BCI2$ ، $BCI3$ ، $BCI4$ ، $BCK5$ برقرارند اما $BCI1$ برقرار نیست. زیرا

برای $x = 2, y = 1, z = 0$ داریم

$$((x*y)*(x*z))*(z*y) = ((2*1)*(2*0))*(0*1) = (\omega*2)*0 = \omega*0 = \omega \neq 0$$

در مثال فوق اگر $\omega = 2$ آنگاه این مثال یک BCK-جبر خواهد بود.

مثال ۹.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1\}$ و عملگر $*$ بوسیله‌ی جدول زیر تعریف شده باشد

$*$	0	1
0	0	0
1	0	0

واضح است که X در شرط $BCI4$ صدق نمی‌کند، زیرا $0 * 1 = 0$ و $1 * 0 = 0$ اما $1 \neq 0$

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2\}$ باشد و عملگر $*$بوسیله‌ی جدول زیر تعریف شده باشد

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	2	0
2	2	2	0

X در شرایط $BCI1$،$BCI2$،$BCI4$،$BCI5$ صدق می‌کند. واضح است که در شرط $BCI3$ صدق نمی‌کند، زیرا $1 * 1 = 2 \neq 0$

مثال ۱۱.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2\}$ باشد و عملگر $*$ روی X بوسیله‌ی جدول زیر تعریف شده باشد

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

X در $BCI1$ ، $BCI2$ ، $BCI3$ ، $BCI4$ صدق می‌کند اما در $BCK5$ صدق نمی‌کند، زیرا $0 * 2 = 2 \neq 0$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر باشد. رابطه‌ی $\leq$ روی X را به این صورت تعریف می‌کنیم که، $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x * y = 0$ به ازای هر $x, y \in X$. بنابراین $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر است اگر در شرایط زیر صدق کند

$BCI1' : ((x * y) * (x * z)) \leq (z * y),$

$BCI2' : ((x * (x * y)) \leq y,$

$BCI3' : x \leq x,$

$BCI4' : x \leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y,$

$BCK5' : 0 \leq x.$

قضیه ۱۳.۲.۱. در BCK-جبرX برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$(i) \quad x \leq y \Rightarrow z * y \leq z * x$

$(ii) \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

اثبات. رجوع شود به [۴]. □

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر باشد، در این صورت $(X; \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.

اثبات. رجوع شود به [۴]. □

قضیه ۱.۲.۱۵. فرض کنید X یک BCK-جبر باشد، در این صورت $(x*y)*z = (x*z)*y$ برای هر $x, y, z \in X$.

اثبات. رجوع شود به [۴]. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۶. فرض کنید X یک BCK-جبر باشد، آنگاه برای هر $x, y, z \in X$ داریم

(i) $x * y \leq z \Rightarrow x * z \leq y$

(ii) $(x * z) * (y * z) \leq (x * y)$

(iii) $x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z$

(iv) $x * y \leq x$

(v) $x * 0 = x$

اثبات. رجوع شود به [۴]. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۷. دستگاه جبری $(X; *, 0)$، یکBCK-جبر است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند

(i) $BCI1$

(ii) $BCI4$

(iii) $x * (0 * y) = x$

اثبات. رجوع شود به [۴]. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید $(X; *, 0)$یک BCK-جبر، $S \subseteq X$ و $S \neq \emptyset$ باشد. در این صورت S را یک زیر BCK-جبر X گوییم هرگاه $x * y \in S$ به ازای هر $x, y \in S$. یعنی S نسبت به عمل $*$ در X بسته باشد.

نتیجه ۱.۲.۱۹. اگر $(X, *, 0)$ یک BCK-جبر باشد، آنگاه:

(i) X و $\{0\}$ زیر BCK-جبرهایی از X هستند.

(ii) اگر S یک زیر BCK-جبر X باشد، آنگاه $0 \in S$.

(iii) اگر S یک زیر BCK-جبر X باشد، آنگاه S یک BCK-جبر است.

(iv) برای هر عنصر ناصفر a از X، $S = \{0, a\}$ یک زیر BCK-جبر است.

۱.۲.۱ BCK-جبر کراندار

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید X یک BCK-جبر باشد، اگر $1 \in X$ و به ازای هر $x \in X$ ، $x \leq 1$ آنگاه عنصر 1 را عنصر یکه ی X می‌نامیم و عنصر 1 را با N نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. هر BCK -جبری که عنصر یکه داشته باشد را یک BCK-جبر کراندار می‌نامیم.
عنصر یکه، منحصر به فرد می‌باشد زیرا اگر $1'$ عنصر یکه‌ی دیگری در X باشد، آنگاه $1' \leq 1$ و از طرفی چون $1 \leq 1'$ پس بنابر $BCI4$ ، $1 = 1'$.

مثال ۲۲.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و عملگر $*$ بوسیله جدول زیر تعریف شده باشد .

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	1	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	4	0

در نتیجه $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر کراندار با عنصر یکه ی 4 می‌باشد زیرا با توجه به جدول

$$\forall x \in X : \ \ x * 4 = 0$$

مثال ۲۳.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, 3\}$ و عملگر $*$ بوسیله جدول زیر تعریف شده باشد .

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	3	1	1	0

X یک BCK-جبر کراندار با عنصر یکه‌ی 3 می‌باشد، زیرا با توجه به جدول به ازای هر $x \in X$، $x * 3 = 0$.

قرارداد ۲۴.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$یک BCK-جبر باشد. عمل $\wedge$ را روی X به این شکل داریم که $x \wedge y = y * (y * x)$ به ازای هر $x, y \in X$.
بنا به این قرداد، از $BCI2'$ نتیجه می‌گیریم $x \wedge y = y * (y * x) \leq x$. علاوه براین، بنا به قضیه ۱۶.۲.۱ (iv) از $x * y \leq x$ نتیجه می‌گیریم که $y * (y * x) \leq y$ لذا $x \wedge y \leq y$ بنابراین $x \wedge y$ یک کران پایین برای $\{x, y\}$ است.

قضیه ۲۵.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر باشد، آنگاه برای هر $x \in X$.

(i) $x \wedge x = x$

(ii) $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$

اثبات. رجوع شود به [۴]. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که رابطه $x \wedge y = y \wedge x$ همواره برقرار نیست.

مثال ۲۶.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$ یک BCK -جبر باشد که عملگر $*$ روی آن توسط جدول

زیر تعریف شده باشد

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

در این صورت $1 \wedge 2 = 2 * (2 * 1) = 2 * 2 = 0$ اما $2 \wedge 1 = 1 * (1 * 2) = 1 * 0 = 1$ بنابراین $1 \wedge 2 \neq 2 \wedge 1$.

قضیه ۲۷.۲.۱. در BCK-جبر X داریم $x * (y \wedge x) = x * y$ برای هر $x, y \in X$.

اثبات. رجوع شود به [۴]. $\square$

مثال ۲۸.۲.۱. فرض کنید $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر باشد و $1 \notin X$. $\bar{X}$و $*'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x *' y = \begin{cases} x * y & , x, y \in X \\ 0 & , x \in X, y = 1 \\ 1 & , x = 1, y \in X \\ 0 & , y = x = 1 \end{cases}$$

$$\bar{X} = X \cup \{1\}$$

ثابت می‌کنیم $(\bar{X}; *', 0)$ یک BCK-جبر است. شرایط قضیه‌ی ۱۷.۲.۱ را برای آن بررسی می‌کنیم. اگر $x, y, z \in X$ هر سه شرط برقرارند لذا این شرایط را با حالت های دیگر بررسی می‌کنیم .

شرط اول : $BCI1$: