بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بعد و انتروپی برای فراکتال‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مولایی

مولف:

مجید قمری

شهریور ۸۶

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مجیدقمری

استاد راهنما : دکتر محمدرضا مولایی

داور ۱ : دکتر محمدابراهیمی

داور ۲ : دکتر فرزادنعمت

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به:

یَد پرتوان هستی‌ام، پدرم

و

بهترین یار و یاورم، مادرم.

سپاس

سپاس بی‌کران دادار یکتا که هستی‌ام بخشید و مرا به طریق علم و دانش رهنمون شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم ساخت. اکنون که به یاری دادار مهربان مراحل انجام این پروژه به پایان رسیده است، سپاسگذار همه اساتید و بزرگوارانی هستم که از راهنمایی‌هایشان بهره جستم. مراتب سپاس فراوان خود را از جناب آقای **دکترمحمدرضا مولایی** به سبب ارایه تجربه‌ها و راهنمایی‌های ارزشمند خود که در گردآوری این پروژه مرا یاری نمودند واندوخته علمی خود را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند ابراز می‌دارم. و قدردان جناب آقای **دکتر محمد ابراهیمی** و جناب آقای **دکتر فرزاد نعمت** به سبب داوری موشکافانه و توجه خاصی که در این پروژه مبذول نموده‌اند، می‌باشم.

چکیده

در مطالعه بی‌نظمی اغلب به مجموعه‌های پایایی با یک هندسه پیچیده مواجه می‌شویم. معمولا این مجموعه‌ها شبیه خود نیستند اما می‌توانند به زیر مجموعه‌هایی که مقیاس‌بندی متقارنی دارند تجزیه شوند. این تجزیه، تجزیه فرکتال‌های چندگانه نامیده می‌شود و یک بخش اساسی آنالیز فرکتال‌های چندگانه در سیستم‌های دینامیکی است.

این پایان‌نامه از چهار بخش تشکیل شده است. بخش نخست به معرفی انتروپی می‌پردازد، در بخش دوم مفهوم بعد برای فرکتال‌های چندگانه بیان شده است. در بخش سوم اصل توزیع انتروپی و نگاشت Manneville-Pomeau به طور خلاصه بیان می‌شود. و در سرانجام در بخش چهارم به اندازه گیبز در فرکتال‌های چندگانه اشاره شده است.

در توضیح انتروپی موضعی طیف فرکتال‌های چندگانه به بیان حالت‌های گیبز $\{\mu_q\}_{q\geq 1}$ می‌پردازیم. یک نقطه از مجموعه نقاط انباشتگی μ_∞ از این دنباله، حالات اساسی گیبز یا دمای حدی صفر نامیده می‌شود. ثابت خواهیم کرد که μ_q بزرگترین اندازه است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

انتروپی

انتروپی

این فصل را با مفهوم انتروپی آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده و $f:X\to X$ یک سیستم دینامیکی توپولوژیکی باشد به ازای $n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$ متر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$d_n(x,y):=\underset{0\le k\le n-1}{Max}\ d(f^k(x),f^k(y)) \qquad (۱-۱)$$

با تعریف فوق واضح است که به ازای $n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ، $d_{n+1}\ge d_n$. و برای هر n تمام مترهای d_n معادلند یا اصطلاحاً (*Homeomorphic*) هستند یعنی توپولوژی‌هایی که مترهای مختلف تولید می‌کنند یکسان‌اند.

تعریف ۱- ۲: برای $\varepsilon>0$ ثابت، $A\subseteq X$ را یک (n,ε)- گسترشی گوییم اگر:

$$\forall\ x\in X \qquad \exists y\in A\ \ni\ d_n(x,y)<\varepsilon \qquad (۲-۱)$$

تذکر۱- ۱ : با توجه به تعریف بالا اگر A یک (n,ε)- گسترشی باشد لزوماً متناهی نیست .

تعریف ۱- ۳ : به مینیمم کاردینالیتی از یک مجموعه (n,ε)-گسترشی یک (n,ε,f) گستره می‌گوئیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Span\ (n,\varepsilon,f):=Min\ \ Card\ (A) \qquad (۳-۱)$$

که در آن A یک (n,ε)-گسترشی است

تعریف۱-٤ : زیر مجموعه A از X را (n,ε)- مجزا می‌گوئیم اگر برای هر دو نقطه مجزا x,y از A داشته باشیم $d_n(x,y)\ge\varepsilon$ یا به عبارت دیگر:

$$\forall \ x,y \ \in A \Rightarrow d_n(x,y) \geq \varepsilon \qquad (۱-۴)$$

توجه ۱-۲ : هر مجموعه (n,ε) - مجزا متناهی است زیرا:

$$\bigcup_{x\in X} N(x,\varepsilon)=X \quad ; N(x,\varepsilon)=\{y\in X \quad ; d_n(x,y)<\varepsilon\} \qquad (۱-۵)$$

X فشرده است در نتیجه:

$$\bigcup_{i=1}^{k} N(x,\varepsilon)=X \quad \& \quad A\subseteq X = \bigcup_{i=1}^{k} N(x,\varepsilon) \Rightarrow A \quad \text{متناهی است} \qquad (۱-۶)$$

تعریف ۱-۵ : به ماکزیمم کاردینالیتی یک (n,ε) - مجزا ، $Sep(n,\varepsilon,f)$ گوئیم به عبارتی:

$$Max\,Card\;A = Sep(n,\varepsilon,f) \qquad (۱-۷)$$

که در آن A یک (n,ε) - مجزا می باشد:

تعریف ۱-٦ : به مینیمم کاردینالیتی از مجموعه‌هایی با قطر کمتر از ε که X را می پوشاند

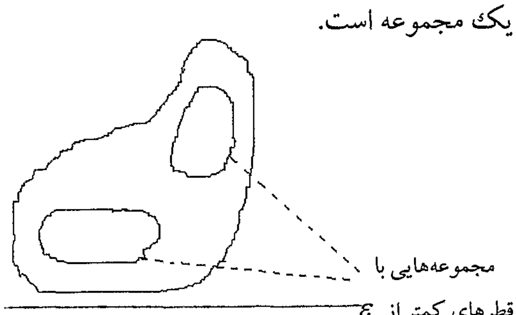
$Cov(n,\varepsilon,f)$ گوئیم به عبارتی:

$$Cov(n,\varepsilon,f) = Card\;B \qquad (۱-۸)$$

که $B\subseteq X$ مجموعه‌ی است که در بین تمام پوشش‌های X از مجموعه‌هایی با d_n - قطر کمتر از ε

دارای مینیمم کاردینالیتی می باشد.

منظور از d_n - قطر یک مجموعه ، سوپریمم فاصله بین دو نقطه در یک مجموعه است.



شکل (۱-۲)

قرار می‌دهیم $h_\varepsilon(f) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} Log\,(Cov(n,\varepsilon,f))$ حال وقتی $\varepsilon \downarrow 0$ در نتیجه قطر مجموعه‌هایی

که کمتراز ε هستند ، تعداد آن‌ها افزایش پیدا می‌کند در نتیجه مقدار $Cov(n,\varepsilon,f)$ با کاهش

εافزایش میابد به عبارتی :

$$CoV\ (n,\varepsilon,f)\uparrow \Rightarrow h_\varepsilon(f)\uparrow$$

که به آن انتروپی توپولوژیکی می‌گوئیم و بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(f) = h_{top}(f) \text{ یا } h(f) \qquad (۹-۱)$$

قضیه ۱-۱ : انتروپی توپولوژیکی یک نگاشت پیوسته مستقل از انتخاب متر تولید کننده توپولوژی X است.

اثبات:

فرض می‌کنیم d و d' دو متری هستند که توپولوژی X را تولید می کنند. برای $\varepsilon > 0$فرض می-کنیم

$$\delta(\varepsilon) = Sup\,\{d'(x,y)\ ;\ d(x,y) \le \varepsilon\} \qquad (۱۰-۱)$$

بنا به فشردگی اگر $\varepsilon \to 0$ آنگاه $\delta(\varepsilon) \to 0$.در اینصورت اگر U یک مجموعه با d_n – قطر کمتر از ε باشد آنگاه U دارای d'_n – قطر حداکثر $\delta(\varepsilon)$ است در نتیجه :

$$Cov'(n,\delta(\varepsilon),f) \le Cov\,(n,\varepsilon,f) \qquad (۱۱-۱)$$

کهCov و Cov' به ترتیب با متر d و d' مطابقت دارد. در نتیجه:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Log(Cov'(n,\delta,f)) \le \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Log\,(Cov(n,\varepsilon,f)) \qquad (۱۲-۱)$$

با تعویض d و d' نامساوی (۱–۱۲) معکوس شده و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

■

تعریف ۱–۷ : اگر X و Y فضاهای توپولوژیکی و $\pi : Y \to X$ یک همریختی باشد به قسمی که به ازای هر t داشته باشیم $\pi o g^{t} = f^{t} o \pi$. آنگاه نگاشت π را مزدوج توپولوژیکی گوییم.

قضیه ۱–۲ : انتروپی توپولوژیکی تحت تزویج توولوژیکی پایا است.

اثبات :

فرض می‌کنیم $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ یک مزدوج توپولوژیکی سیستم دینامیکی با تزویج $\phi : Y \to X$ باشند. فرض می‌کنیم d متر روی X باشد بعلاوه

$$d'(y_1, y_2) = d(\phi(y_1), \phi(y_2)) \qquad (۱۳–۱)$$

متر روی Y است که توپولوژی روی X را تولید می‌کند. از طرفی ϕ یک طولپایی از (X,d) و (Y,d') است و چون انتروپی مستقل از متر است(بنا به قضیه ۱–۱) در نتیجه خواهیم داشت

$$h(f) = h(g) \qquad (۱۴–۱)$$

■

تعریف ۱–۸ : فرض می‌کنیم f یک همسانریختی روی فضای متریک فشرده (X,d) و μ یک اندازه f – پایا باشدآنگاه انتروپی موضعی پایینی و انتروپی موضعی بالایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{h}_\mu(x,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{-1}{n}\log\mu(B^f_{n,\varepsilon}(x))$$
$$\underline{h}_\mu(x,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\log\mu(B^f_{n,\varepsilon}(x)) \qquad (۱۵-۱)$$

که در آن $B^f_{n,\in}(x)$ ، گوی‌هایی به مرکز x و شعاع ε در متر d_n می‌باشند.

قضیه ۱-۳ : برای $x\in X$ و هر μ – تقریباً همه جا خواهیم داشت [۱۱].

$$a)\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\log\mu(B^f_{n,\in}(x))=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{-1}{n}\log\mu(B^f_{n,\in}(x))=h_\mu(f,x) \qquad (۱۶-۱)$$

$b)h_\mu(f,x)$ f پایاست (۱۷-۱)

$$c)\int_X h_\mu(f,x)=h_\mu(f) \qquad (۱۸-۱)$$

برهان: برای $\varepsilon>0$ ثابت و افراز اندازه پذیر متناهی ξ قرار می‌دهیم.

$$diam\ \xi=Max\ diam\ (C)<\varepsilon \qquad (C\in\xi) \qquad (۱۹-۱)$$

فرض کنید $C_\xi(x)$ عضوی از ξ شامل x و $C_n^\xi(x)$ عضوی از افراز

$$\xi_n=\xi\vee f^{-1}\xi\vee\ldots\vee f^{-n+1}\xi \qquad (۲۰-۱)$$

شامل x باشد. قضیه مک میلان – بریمن حاکی از آن است که :

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log\mu(C_n(x))=\mu_\xi(x) \qquad (۲۱-۱)$$

برای x تقریباً همه جا موجود است و داریم:

$$\int_X\mu_\xi(x)d\mu=h(f,\xi)\le h_\mu(f) \qquad (۲۲-۱)$$

واضح است که $B^f_{n,\varepsilon}(x)\supseteq C_n^\xi(x)$ بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ داریم:

$$\int_X \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{-1}{n} \log \mu\,(B^{f}_{n,\varepsilon}(x)) \le h_\mu(f) \qquad (۲۳-۱)$$

حال برآورد زیر را ادامه می‌دهیم:

فرض کنید ξ_e تجزیه X به مؤلفه های ارگوردیک f با خاصیت μ باشد و $P: X \to X/\xi_e = Y$ (که تصویر مولفه طبیعی و $h(y)$ که $y \in Y$ انتروپی تحدید f به $p^{-1}(y)$ با اندازه شرطی می‌باشد. $(f|_{p^{-1}(y)})$. عدد ثابت کوچک مثبت α و $M > 1$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $\int_{h^{-1}([M,\infty])} h(y)\, d\mu_Y < \alpha$. همچنین فرض کنید برای $K = [\frac{M}{\alpha}]$، $k = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} A_K &= P^{-1}(h^{-1}([k\alpha,(k+1)\alpha))) \\ A_{K+1} &= X - \bigcup_{k=0}^{k} A_K \end{aligned} \qquad (۲۴-۱)$$

به قسمی که $\mu(A_{K+1}) < \alpha$.

$a = (A_0, \ldots, A_k, A_{k+1})$ قرار می‌دهیم و فرض می کنیم $\xi \ge a$ یک افراز اندازه پذیر متناهی است که:

برای $x \in A_k$، $k = 0,1,\ldots,k$ و $\mu_\xi(x) \le (k+1)\alpha$.

همچنین اگر ξ، به اندازه کافی خوب باشد (عنصرها دارای قطرهای کوچک یکنواخت باشند) آنگاه:

$$k\alpha - \frac{\alpha}{100} \le \mu_\xi(x) \le (k+1)\alpha \quad , \quad x \in A_k \;\; ; \;\; k \ne k+1 \qquad (۲۵-۱)$$

عدد ثابت $\gamma > 0$ و افراز $b \ge a$ را به گونه‌ای در نظر می گیریم که:

$$h_\mu(f, b) > h_\mu(f) - \gamma \qquad (۲۶-۱)$$

برای هر $x \in X$ گویی به مرکز x و شعاع دلخواه کوچک که کراندار و دارای اندازه صفر می‌باشند موجود است. این گوی‌ها پوششی متناهی برای X خواهند بود و ساختار معمول در این روش افزار به تمام اشتراک‌های ممکن این گوی‌هاست بدین طریق ما افزارهای دلخواه مناسب ξ را به قسمی که $\mu(\partial\xi)=0$ و به صورت $\partial\,\xi=\bigcup_{c\in\xi}\partial C$ تعریف می‌شود را مشاهده می‌کنیم. خصوصاً قادر به تخمین b به وسیله افراز $\eta\le\xi$ خواهیم بود. بنابراین برای یک عدد مثبت q ساختار افراز η را با خاصیت زیر خواهیم داشت:

$$h_\mu(f,\eta)>h_\mu(f)-\gamma \qquad (۱-۲۷)$$

برای هر عضو $c\in\eta$ یک مجموعه $A_{k(c)}$ به قسمی که:

$$\mu(C\cap A_{k(c)})>(1-q)\mu(C) \qquad (۱-۲۸)$$

$$\mu(\partial\eta)=0 \qquad (۱-۲۹)$$

وجود دارد.

توجه داشته باشید که N تعداد عناصر η تنها به γ,α بستگی دارد نه به q.

برای $\delta>0$ قراردهید:

$$U_\delta(\eta)=\{x\in X \quad \text{نیستند.}\ \underset{\eta}{C}(x)\ \text{گویهایی از}\ x\ \text{که شامل}\ -\delta\ \} \qquad (۱-۳۰)$$

ازطرفی داریم: $\bigcap_{\delta>0}U_\delta(\eta)=\partial\eta$

بنا به (۱-۲۹) $\mu(U_\delta(\eta))\to 0$ وقتی که $\delta\to 0$ بنابراین ما می توانیم $\delta>0$ را به قسمی انتخاب کنیم که $\mu(U_{\delta'}(\eta))<q$ برای هر $\delta'<\delta$.

فرض می کنیم برای $k=0,1,\dots,K$

$$A'_k = \bigcup_{C \in \eta \,;\, k(C)=k} C \qquad (۳۱-۱)$$

از طرف دیگر A'_k اجتماع عناصر η است که اکثراً در A_k هستند علاوه بر این:

$$D = \bigcup_{k=0}^{K} (A'_k - A_k) \qquad (۳۲-۱)$$

بنا به (۱-۲۸) $\mu(D) < q$ بنابراین بنا به قضیه ارگودیک بیرخوفو نامساوی چیبشوف داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_D(f^i x)$$

برای n به اندازه کافی بزرگ

$$\mu\left(\left\{x \in X \,;\, \forall n' \geq n \ \sum_{i=0}^{n'-1} \chi_D(f^i x) < 2\sqrt{q}\, n'\right\}\right) > 1 - 2\sqrt{q} \qquad (۳۳-۱)$$

$U_\delta(\eta)$ را بطور مشابه به جای D بکار می بریم

$$\mu\left(\left\{x \in X \,;\, \forall n' \geq n \ \sum_{i=0}^{n'-1} X_{U_\delta}(f^i X) < 2\sqrt{q}\, n'\right\}\right) > 1 - 2\sqrt{q} \qquad (۳۴-۱)$$

قضیه مک میلان- بریمن درمورد افرازهای η و $\xi = \eta \vee a$ و μ_ξ و μ_η اشاره به این دارد که:

$$\mu_\xi(x) \geq \mu_\eta(x) \qquad (۳۵-۱)$$

از طرف دیگر بنا به (۱-۲۷)

$$\int \mu_\eta(x) d\mu = h_\mu(f,\eta) \geq h_\mu(f) - \gamma \geq h_\mu(f,\xi) - \gamma = \int \mu_\xi(x) d\mu - \gamma \qquad (۳۶-۱)$$

بنابراین از نامساوی چیبشوف داریم:

$$\mu(\{x \in X \,;\, \mu_\xi(x) - \mu_\eta(x) > \sqrt{\gamma}\}) < \sqrt{\gamma} \qquad (۳۷-۱)$$

پس برای n به اندازه کافی بزرگ

$$\mu(\left\{x \in X ; \frac{\log \mu(C_n^{\eta}(x)) - \log \mu(C_n^{\xi}(x))}{n} < 2\sqrt{\gamma}\right\}) > 1 - 2\sqrt{\gamma} \qquad (۳۸-۱)$$

فرض کنید:

$$F(x) := \begin{cases} k\alpha - \frac{\alpha}{50} - 2\sqrt{\gamma} & x \in A_k \quad k = 1,2,\dots,k \\ 0 & x \in A_0 \end{cases} \qquad (۳۹-۱)$$

بنا به (۱-۳۸) و (۱-۲۵) خواهیم داشت.

$$\mu(\left\{x \in \overset{k}{\underset{k=0}{U}} A_k : \frac{-\log \mu(C_n^{\eta}(x))}{n} < F(x)\right\}) < 3\sqrt{\gamma} \qquad (۴۰-۱)$$

از طرفی تقریباً همه جا $\frac{-\log \mu(C_n^{\eta}(x))}{n} \to \mu_{\eta}(x)$. در نتیجه خواهیم داشت

$$\mu(\left\{x \in \overset{k}{\underset{k=0}{U}} A_k : \mu_{\eta}(x) < F(x)\right\}) < 3\sqrt{\gamma} \qquad (۴۱-۱)$$

بنابراین برای n به قدر کافی بزرگ داریم :

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{k}\left\{x \in A_k : \forall n' \geq n \;,\; \frac{-\log \mu(c_{n'}^{\eta}(x)}{n'} \geq F(x) - \sqrt{\gamma}\right\}) \geq \mu(\bigcup_{k=0}^{k} A_k) - 4\sqrt{\gamma} \qquad (۴۲-۱)$$

مجموعه نقاط در شرایط‌های توصیف شده در قسمت چپ (۱-۳۳) (۱-۳۴) (۱-۴۲) صدق می کند

و بیانگر: $E_k = E \cap A_k$ است. فرض کنید:

$$W_{\eta}^{n}(x) = (C_{\eta}(x), C_{\eta}(f x), \dots, C_{\eta}(f^{n-1}x)) \qquad (۴۳-۱)$$

(η,n) – اسم‌های x باشد اگر $y \in B_n^f(x,\delta)$. آنگاه برای هر $0 \le i \le n-1$ یکی از $f^i x$, $f^i y$ متعلق به یک عنصر η یا $f^i x \in U_\delta(\eta)$ می‌باشد.

بنابراین اگر $x \in E_k$ و $y \in B_n^f(x,f)$ آنگاه بنا به (۱-۳۴) همینگ فاصله بین (η,n) – اسم‌هایی y,x کمتر از $2\sqrt{q}$ –است. ما اکنون می‌خواهیم یک برآورد بالایی از $\mu(B_n^f(x,\delta))$ برای اکثر نقاط در E_k ارائه نمائیم.در این کار ما به برآورد اندازه‌ی از مجموعه نقاط y که (η,n) – اسم‌ها از $2\sqrt{q}$ نزدیکتر به (η,n) – اسم‌ها از x هستند،می‌پردازیم.

برای تعداد L_n که بیانگر تعداد (η,n) – اسم‌هایی که از $2\sqrt{q}$ نزدیکترند به (η,n) –اسم‌هایی از x که $x \in E_k$ داریم.[۱۲]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log L_n}{n} = 2\sqrt{q}\log(N-1) - 2\sqrt{q}\log(2\sqrt{q}) - (1-2\sqrt{q})\log(1-2\sqrt{q}) \qquad (۱–۴۴)$$

که N تعداد عناصر در η است.

در نتیجه اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه:

$$L_n \le \exp(g(q,N)n) \qquad (۱–۴۵)$$

$$g(q,N) = 2\sqrt{q}\log(N-1) - 2\sqrt{q}\log(2\sqrt{q}) - (1-2\sqrt{q})\log(1-2\sqrt{q}) + q \qquad (۱–۴۶)$$

از آنجا که ما ابتدا N و سپس q را انتخاب می کنیم تعداد $g(q,N)$ می‌تواندبه صورت کوچک دلخواه ساخته شود

$$g(q,N) < \frac{\alpha}{100} \ . \qquad (۱–۴۷)$$

$0 \le k \le K$ را ثابت می‌گیریم با این کار قادر خواهیم بود که اندازه نقاط در E_k که $(\eta,n)-$

اسم‌ها عضوی از η_n با بزرگترین اندازه هستند را برآورد کنیم آنگاه: $\exp(-ka+\frac{\alpha}{10})\eta$ در $2\sqrt{q}$

همینگ همسایگی آنهاست. واضح است که تمام تعداد یک چنین عناصر

$$\exp(-ka+\frac{\alpha}{10})n \qquad (۴۸-۱)$$

بنابراین بنا به (۱-۴۵) و (۱-۴۷) تمام تعداد عناصر η_n که در $2\sqrt{q}$ همسایگی همینگ خودشان

صادقند، تجاوز نمی کند.

$$Q_n \le \exp(k\alpha-\frac{\alpha}{10}+g(q,N))n < \exp(k\alpha-\frac{\alpha}{10}+\frac{\alpha}{100})n \qquad (۴۹-۱)$$

با بررسی Q_n در می‌آبیم عناصر η_n که با E_k اشتراک دارند دارای اندازه صفر هستند.

و با برآورد کردن اندازه های کلیشان، S_n، تعداد برآورد آن‌ها را که از (۱-۴۹) بدست آمده و کران

بالایی برای اندازه های آن‌ها که بنا به (۱-۴۲) بدست آمده را ضرب می کنیم:

$$S_n \le \exp(k\alpha-\frac{\alpha}{10}+\frac{\alpha}{100}-k\alpha+\frac{\alpha}{50}+3\sqrt{\gamma})n \le \exp(-\frac{\alpha}{20}n) \qquad (۵۰-۱)$$

آخرین نامساوی اگر γ در مقایسه با α کوچک انتخاب شود، درست می باشد.در نتیجه از (۱-۴۸)

داریم که :

$$\mu(\{x \in E_k ; \mu(B^f_{n,\varepsilon}(x)) > \exp(-k\alpha+\frac{\alpha}{10})n\}) < \exp(\frac{-\alpha}{20}n) \qquad (۵۱-۱)$$

برای $k=1,2,\dots,K$.

بنا به لم بُرل – کانتلی برای تقریباً همه $x \in E_k$