بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی منفی شدن توابع ویگنر در فضای فاز گسترش یافته

نگارش:

پروین صادقی یامچی

اساتید راهنما:

دکتر سعداله نصیری قیداری
دکتر سیامک خادمی

مهر ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادرعزیزم

قدردانی و تشکر

بر خود لازم می‌دانم که از اساتید راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر سعداله نصیری و جناب آقای دکتر سیامک خادمی به خاطر راهنمایی‌ها و تذکرات بجایشان و صبر و حوصله فراوانشان در راهنمایی و پاسخ دادن به پرسش‌هایم تشکر و قدردانی نمایم، که این مسیر بدون راهنمایی‌های مشفقانه ایشان هرگز طی نمی‌شد.

همچنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر ناصر نفری و جناب آقای دکتر محمد محمودی که قبول زحمت فرموده و پایان‌نامه این حقیر را مطالعه نمودند، سپاسگزارم.

از پدر و مادر مهربانم که مرا در مسیر زندگی راهنمایی می‌کنند و در همه حال پشتیبان من بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در پایان‌نامه حاضر برای جدا کردن حالت‌های کلاسیکی و غیر کلاسیکی، شاخصی معرفی شده است که براساس تداخل بوده و در تمامی نمایش‌ها با تابع توزیع حقیقی، کاربرد دارد. این شاخص برای حالت گربه شرودینگر حل شده و با شاخص‌هایی که تاکنون برپایه حجم قسمت منفی تابع توزیع ارائه شده‌اند، مقایسه می‌گردد. شاخص جدید در همه نمایش‌ها با تابع توزیع حقیقی، رفتار یکسانی دارد. این مطلب نشان می‌هد که نمایش‌های مختلف هم‌ارز می‌باشند، در حالی که شاخص‌های قبلی، در هر نمایشی رفتار متفاوت دارند. از مزیت‌های دیگر شاخص جدید، هم‌خوانی با عدم قطعیت است.

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

فرمول‌بندی مکانیک کوانتمی فضای فاز اولین بار توسط ویگنر(۱۹۳۲) ارائه شد[۱]، وی تابع توزیع در فضای فاز را معرفی نمود و با این شیوه توانست دنیای کوانتم را با فرمول بولتزمن مرتبط کند. از آنجا که فرمول‌بندی فضای فاز، پدیده‌های کوانتمی را به زبان کلاسیک توضیح می‌دهد، می‌تواند بینش فیزیکی مفیدی را ارائه دهد که در سایر نمایش‌ها به آسانی نمی‌توان به آن دست یافت. در این روش با معادلات عددی روبرو شده و با عملگرها سروکار نخواهیم داشت. سادگی و راحتی در حل مسائل با این شیوه موجب گردید فرمول‌بندی فضای فاز در محدوده وسیعی از فیزیک مانند فیزیک آماری، اپتیک کوانتمی، نظریه برخورد و فیزیک غیر خطی کاربرد پیدا کند. ابزار اصلی برای فرمول‌بندی مکانیک کوانتمی در فضای فاز، تابع توزیع می‌باشد. تابع توزیع کوانتمی در فضای فاز به عنوان یک ابزار ریاضی، محاسبات کوانتمی را آسان نمود، بنابراین هر تابعی که متوسط کمیت مشاهده‌پذیر فیزیکی را به درستی محاسبه کند می‌تواند به عنوان تابع توزیع شبه احتمالاتی نامیده شود. از همان روزهای اول معرفی فضای فاز و تابع توزیع، فیزیکدانان متوجه شدند که راه منحصر به فردی برای ارائه تابع توزیع وجود ندارد. توابع توزیع دیگری نیز بعد از تابع توزیع ویگنر معرفی شده‌اند و ویژگی‌هایی دارند که تابع توزیع ویگنر فاقد این خصوصیات است. از جمله این توابع توزیع، تابع توزیع هوسیمی[۱] (۱۹۴۰)[۲]، کیرکوود[۲]

[۱] *Husimi*

[۲] *Kirkwood*

(۱۹۳۳)[۳] و گلابر– سودرشان[1] [۴] می‌باشند.

در سال ۱۹۹۳ ثبوتی[2] و نصیری[3] با معرفی فضای فاز گسترش یافته، روشی جدید برای کوانتش سیستمهای بس ذره‌ای پیشنهاد کردند[۵]. آنها با معرفی لاگرانژی و هامیلتونی گسترش یافته، فضای فاز گسترش یافته در حد کلاسیکی را ایجاد نموده و با کوانتش این فضا به مکانیک کوانتمی در فضای فاز دست یافتند. این مسئله از این جهت دارای اهمیت است که در روش کوانتش بندادی در حد کوانتمی تقارن بین مختصه‌های مکان و تکانه‌های بندادی متناظر آنها از بین می‌رفت، اما در فضای فاز گسترش یافته پس از کوانتش و ساختن عملگر هامیلتونی، تقارن مذکور بین مختصه‌های مکان و تکانه‌ها حفظ می‌شود. یکی دیگر از خواص فضای فاز گسترش یافته این است که در این فضا با تبدیلات بندادی مختلف کلیه توابع توزیع معرفی شده توسط دیگران به دست می آید[٦] از مهمترین این توابع، تابع توزیع ویگنر می‌باشد که با تبدیل یکانی می‌توان آن را بدست آورد.

با توجه به این که در کلاسیک، احتمال همواره باید مثبت باشد، توابع توزیع کلاسیکی مثبت هستند. اگرچه توابع توزیع کوانتمی می بایست رفتاری شبه کلاسیکی داشته باشند، اما در بعضی موارد بعضی از توابع توزیع مانند ویگنر مقدار منفی دارند. منفی بودن تابع توزیع نشانی از رفتار غیر کلاسیکی حالت مورد نظر است[۷—۸—۹]. بنابراین محققین برای جداسازی حالت‌های کلاسیکی و غیر کلاسیکی شاخص‌هایی معرفی کردند. مندل[4] اولین شاخص غیر کلاسیکی را بر اساس انحراف تعداد فوتون‌ها از توزیع گوسی، که مشخصه حالت‌های همدوس است، معرفی نمود[۱۰]. بعد از آن افراد دیگری از جمله هیلاری[5][۱۱]، ددنف[6][۱۲] و دیگران [۱۳—۱۴] این کار را ادامه دادند. در سالهای اخیر شاخص‌هایی معرفی گردیده که بر اساس قسمت منفی تابع ویگنر می‌باشند، از جمله شاخص v، که بندیک[7] و همکارانش آن را ارائه نموده‌اند[۱۵—۱٦]. در

[1] *Glauber – Sudarshun*

[2] *Sobuoti*

[3] *Nasiri*

[4] *Mandel*

[5] *Hillery*

[6] *Dodonov*

[7] *Benedict*

سال ۲۰۰۴ نیز شاخص معادل آن، δ، توسط کنفک[1] و زیچویسکی[2] معرفی شد[۱۷]. در بسیاری از مقالات نویسندگان به شاخص δ توجه خاص داشته اند. به عنوان نمونه محمودی و همکارانش الکترون آزاد را در میدان الکترومغناطیس قوی قرار داده و رفتار تداخلی الکترون با خودش و به بیان دیگر، رفتار غیرکلاسیکی الکترون در این محیط را با استفاده از منفی بودن تابع توزیع ویگنر توجیه کرده‌اند[۱۸]. نگوس[3] و همکارانش مقدار منفی تابع ویگنر میدان تابشی فوتونی را اندازه‌گیری کرده و منفی بودن تابع ویگنر را نشان از طبیعت غیرکلاسیکی میدان تابشی تک فوتونی دانسته‌اند[۱۹]. کسودهیش [4] و همکارانش خواص غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس و حالت‌های فشرده شده را بررسی کرده و منفی بودن تابع ویگنر برای این حالت‌ها را به عنوان شاخص غیر کلاسیکی در نظر گرفته‌اند[۲۰]. گروه دیگری از افراد نیز طرح‌های تداخل در توابع توزیع مختلف را به عنوان رفتار غیرکلاسیکی حالت مورد بررسی پذیرفته‌اند. از جمله، دراگمن[5][۲۱] که تداخل در نمایش ویگنر را منبع منفی بودن می‌داند. جنگ[6] و رالف[7] تداخل را به عنوان رفتار غیرکلاسیکی حالت حرارتی معرفی می‌کنند[۲۲]، همچنین در نمایش هوسیمی که تابع توزیع همیشه مثبت است مونداراین [8] و استفانی[9] طرح‌های تداخل را نتیجه رفتار غیرکلاسیکی حالت‌ها می‌دانند[۲۳].

با توجه به این‌که بعضی از توابع توزیع کوانتمی در فضای فاز منفی نمی‌باشند، شاخص‌هایی که برای بررسی خواص غیرکلاسیکی حالت‌ها بر اساس قسمت منفی توابع توزیع معرفی شده‌اند، برای آنها مفید نیستند. با مشاهده این کمبود در شاخص‌هایی که تاکنون معرفی شده‌اند، ما در این رساله شاخصی را ارائه نموده‌ایم که بر پایه تداخل می‌باشد و قادر است حالت‌های کلاسیکی و غیرکلاسیکی را در تمامی نمایش‌ها با تابع توزیع حقیقی، مخصوصاً در نمایشی همانند هوسیمی، که تابع توزیع همواره مثبت است تفکیک نماید. علاوه بر این، ویژگی

[1] *Kenfack*
[2] *Życzkowski*
[3] *Nogues*
[4] *Cosudheesh*
[5] *Dragoman*
[6] *Jeong*
[7] *Ralph*
[8] *Mundarain*
[9] Stephany

بارز و مهمّ دیگر شاخص جدید، رفتار یکسان آن در نمایش‌های بررسی شده است که منعکس کننده هم‌ارزی توابع توزیع مختلف و فیزیکی بودن مشخصه کوانتمی است که در اثر تغییر نمایش از بین نمی‌رود.

در این رساله، پس از مقدمه ذکر شده در این فصل، به مرور مفاهیم اولیّه مکانیک کلاسیک و فضای فاز گسترش یافته در فصل دوم خواهیم پرداخت. فصل سوم شامل توابع توزیع و خصوصیات و ارتباط آنها باهم دیگر می‌باشد. در فصل چهارم بعضی از شاخص‌ها که دیگران تاکنون ارائه نموده‌اند بررسی می‌شود همچنین شاخص جدیدی که در این رساله معرفی شده به تفصیل توضیح داده خواهد شد. در نهایت در فصل پنجم نتیجه‌ای از بحث‌های صورت گرفته ارائه خواهد شد.

فصل ۲

فضای فاز گسترش یافته

به‌منظور بررسی فضای فاز گسترش یافته در این فصل، ابتدا به طور مختصر مکانیک کلاسیک شرح داده می‌شود سپس به فضای فاز گسترش یافته و نتایج حاصل از آن پرداخته خواهد شد.

۱.۲ مکانیک کلاسیک

برای بررسی کلاسیکی حرکت اجسام از دینامیک هامیلتونی و لاگرانژی استفاده می‌شود. این دو روش معادل هم بوده و نسبت به روش نیوتون در بررسی حرکت اجسام مفهوم اضافی و جدیدی ندارند، اما از آنجا که آنها بر اساس انرژی پایه‌گذاری شده‌اند، از قدرت لازم برای تعمیم به سایر شاخه‌های فیزیک برخوردار هستند. در روش نیوتن، از بردارها به عنوان ابزارهای محاسباتی بهره می‌گیرند که لازمه آن شناخت تمامی نیروهای وارد بر سیستم می‌باشد، در مواردی این نیروها مانند نیروهای قیدی، ناشناخته هستند. بر خلاف نظریه برداری نیوتن، روشهای هامیلتونی و لاگرانژی با کمیات اسکالر سروکار داشته و بدون نیاز به شناخت نیروهای قیدی، مسئله‌های پیچیده را می توان حل کرد، نیروهای قیدی نیز در ضمن حل آنها به دست می‌آیند. دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی در مسائل مربوط به میدان‌ها و مسائل کوانتمی کاربرد دارند. دینامیک هامیلتونی از روشهای نیرومند در مکانیک کلاسیک به شمار می‌رود که در درون مکانیک کلاسیک، پایه‌ای برای گسترش به شاخه‌های دیگر

مکانیک کلاسیک مانند هامیلتونی ژاکوبی، روش‌های اختلالی و نظریه آشوب ایجاد می‌کند و در خارج از محدوده مکانیک کلاسیک می‌توان از این معادلات استفاده کرد و مکانیک آماری و مکانیک کوانتمی بر پایه آن ساخت[۲۴].

۱.۱.۲ معادلات لاگرانژ

پیکربندی لحظه‌ای سیستمی که دارای n درجه آزادی است، به وسیله n مختصه تعمیم یافته $\{q_i\}$ به طور دقیق بیان می‌گردد. فضایی که این مختصات درست می‌کنند، فضای پیکربندی می‌نامند. هر نقطه در این فضا، حالت لحظه‌ای سیستم را مشخص می‌کند و با گذشت زمان، جای این نقطه در فضای پیکربندی عوض شده و مسیر حرکت ذره را در این فضا به وجود می‌آورد. برای توصیف حرکت سیستم و بدست آوردن معادلات حرکت لاگرانژ از روشهای مختلفی می‌توان استفاده نمود، از جمله، معادلات حرکت نیوتن، اصل دالامبر و اصل هامیلتونی است. این جا برای بدست آوردن معادلات از روش اصل هامیلتونی استفاده می‌شود[۲۴].

انتگرال کنش برای حرکت سیستم در بازه زمانی t_1 و t_2 به صورت زیر می‌باشد

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L^q dt. \qquad (1)$$

در این رابطه $L^q = T - V$ تابع لاگرانژی نامیده می‌شود که اختلاف انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم در فضای پیکربندی است. باتوجه به اصل هامیلتونی، سیستم برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر مسیری انتخاب می‌کند که در آن کنش سیستم کمینه باشد. یعنی

$$\delta I = 0. \qquad (2)$$

با استفاده از تکنیک وردشی معادلات اویلر—لاگرانژ به صورت

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^q}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \qquad (3)$$

به دست می‌آیند. n درجات آزادی سیستم می‌باشد و از آن‌جا که n تا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم وجود دارد،

برای حل معادله دیفرانسیل بالا نیاز به $2n$ ثابت اختیاری است که معمولاً از شرایط اولیه که حالت سیستم را در زمان معین مشخص می‌کنند، تعیین می‌گردند.

لاگرانژی سیستم منحصر به فرد نیست و با اضافه کردن یک مشتق کلی زمانی به آن، مطابق رابطه

$$L' = L^q + \frac{dF(q_1, \ldots, q_n; t)}{dt}. \tag{۴}$$

باز هم معادلات حرکت اویلر– لاگرانژ، رابطه (۳)، نتیجه می‌شود، بنابراین $L(q_i, \dot{q}_i)$ کمیّت فیزیکی نمی‌باشد، تنها یک ابزار ریاضی مفیدی است که برای حل مسائل می‌توان از آنها استفاده کرد.

اندازه حرکت تعمیم یافته متناظر با q_i به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_i = \frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_i}. \tag{۵}$$

اگر این مشتق روی یک مسیر واقعی، یعنی بر اساس یکی از جواب‌های معادله اویلر–لاگرانژ حساب شود، اندازه حرکت بندادی و یا اندازه حرکت مزدوج q_i هست. این عبارت روی یک مسیر مجازی که دیگر جواب معادله اویلر–لاگرانژ نیست حساب شود، وجود دارد اما دیگر مزدوج بندادی q_i نخواهد بود. با جاگذاری رابطه (۵) در معادله اویلر–لاگرانژ

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L^q}{\partial q_i}, \tag{۶}$$

به دست می‌آید.

۲.۱.۲ معادلات حرکت هامیلتون

روش دیگر جهت بررسی سیستم‌ها استفاده از دینامیک هامیلتونی است. در فرمول‌بندی هامیلتونی n متغیر مستقل از مختصه‌های تعمیم یافته $\{q_i\}$ و n–تای دیگر از اندازه حرکت‌های مزدوج $\{p_i\}$ آنها بدست می‌آید. متغیرهای (p_i, q_i) را دوتایی‌های بندادی می‌گویند. لاگرانژی $L^q(q_i, \dot{q}_i)$ تابع مختصه‌ها و سرعت‌های تعمیم یافته می‌باشد و از دیدگاه ریاضی انتقال از فرمول‌بندی لاگرانژی، $L(q_i, \dot{q}_i)$، به هامیلتونی، $H(q_i, p_i)$، در توابع

مکانیکی با تبدیل متغیرهای $(q_i, \dot{q}_i; t)$ ، به متغیرهای جدید $(q_i, p_i; t)$، متناظر است که این تغییر متغیر توسط تبدیل لژاندر امکان‌پذیر است.

تابع هامیلتونی $H(p_i, q_i)$ با تبدیل لژاندر به صورت

$$H(p_i, q_i, t) = p_i\dot{q}_i - L^q(q_i, \dot{q}_i, t), \qquad (۷)$$

تعریف می‌شود. دیفرانسیل دو طرف معادله بالا

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L_q}{\partial t}, \qquad (۸)$$

است، از طرفی

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \qquad (۹)$$

دیفرانسیل هامیلتونی $H(p_i, q_i, t)$ می‌باشد، از مقایسه رابطه (۸) و (۹)، نتایج

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \tfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \tfrac{\partial H}{\partial t} &= -\tfrac{\partial L^q}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

حاصل می‌شود. این روابط شامل $۲n$، معادله دیفرانسیل مرتبه اول از زمان هستند که به معادلات حرکت هامیلتون موسوم هستند و به همراه $۲n$، ثابت اختیاری، حرکت سیستم را به طور کامل توصیف می‌کنند.

در معادلات حرکت بدست آمده در رابطه (۱۰) تقارن بین مختصه و اندازه حرکت مزدوج آن مشاهده می‌شود که این ویژگی، استفاده از هامیلتونی را در بسیاری از مسائل و مخصوصاً در مباحث کوانتمی را موجب گردیده است. چنان چه H تابع صریحی از زمان نباشد، معادله (۷) به عنوان یک معادله دیفرانسیل به صورت

$$H\left(\frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_i}, q_i\right) = \dot{q}_i\frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_i} - L^q, \qquad (۱۱)$$

در نظر گرفته می‌شود. این رابطه دو جانبه است بدین معنی که با داشتن یک L^q معین H و با مشخص بودن H، L^q به دست می‌آید. جواب‌های این معادله برای L^q در این دو مورد متفاوت بوده به بیان دیگر، L^q منحصر به فرد نمی‌باشد و در یک مشتق کامل زمانی با هم اختلاف دارند.

معادلات اویلر– لاگرانژ در فضای اندازه حرکت

در بخش قبل، معادلات اویلر– لاگرانژ در فضای پیکربندی بیان شد. در فضای اندازه حرکت نیز این کار امکان‌پذیر است. لاگرانژی در فضای اندازه حرکت که تابعی از p و $\dot{p}$ است و با $L^p = L^p(p,\dot{p})$ نشان داده می‌شود، با تبدیل لژاندر

$$L^p(p,\dot{p}) = \dot{p}q + \dot{q}p - L^q(q,\dot{q}), \qquad (۱۲)$$

با L^q رابطه دارد. اگر از معادله بالا دیفرانسیل گرفته شود،

$$dL^p = \dot{q}dp + qd\dot{p}. \qquad (۱۳)$$

از طرفی چون $L^p(p,\dot{p})$ تابعی از p و $\dot{p}$ است،

$$dL^p = \frac{\partial L^p}{\partial p}dp + \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}}d\dot{p}. \qquad (۱۴)$$

از مقایسه معادله (۱۳) و (۱۴)،

$$q = \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}}, \qquad (\text{۱۵الف})$$

$$\dot{q} = \frac{\partial L^p}{\partial p}. \qquad (\text{۱۵ب})$$

نتیجه می‌شود. با ترکیب معادله بالا رابطه

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^p}{\partial p_i} = 0, \qquad (۱۶)$$

به دست می‌آید که معادله اویلر–لاگرانژ، در فضای اندازه حرکت است.

هم‌چنین برای پیدا کردن تبدیل لژاندری که L^p و $H(p,q)$ را به هم ربط می‌دهد، معادلات (۷) و (۱۲)، را با هم مقایسه کرده، نتیجه مقایسه

$$H(q_i,p_i) = -\dot{p}_i q_i + L^p(p_i,\dot{p}_i), \qquad (۱۷)$$

است. با معلوم بودن L^p، معادله (۱۷) یک معادله جبری برای پیدا کردن $H(p,q)$ است. این معادله را به صورت دیگر نیز می‌توان تعبیر کرد، به این معنی که با معلوم بودن $H(p,q)$ معادله بالا به عنوان یک معادله دیفرانسیل، به صورت

$$H\left(p_i, \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_i}\right) = -\dot{p}_i \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_i} + L^p, \qquad (۱۸)$$

برای پیدا کردن L^p، نوشته می‌شود با حل معادله دیفرانسیل بالا، می‌توان جواب‌های L^p را با اختلاف یک مشتق زمانی اضافی نسبت به هم، پیدا کرد. مشتق $\frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_i}$ روی یک مسیر واقعی، مزدوج بندادی p به حساب می‌آید.

تبدیلات بندادی و قلاب پواسون

با توجه به مسئله مورد بررسی مختصات تعمیم یافته مناسب، بدون هیچ محدودیتی انتخاب می‌شود. مجموعه‌ای از مختصه‌های q_j توسط تبدیل زیر به مجموعه‌ای از مختصه‌های جدید Q_i تبدیل می‌گردند

$$Q_i = Q_i(q_j). \qquad (۱۹)$$

در بخش های قبل مشاهده شد که q و p به شکلی متقارن در معادلات حرکت پدیدار می‌شوند، لذا تبدیلات لژاندر به طور همزمان توسط روابط زیر در مورد $۲n$ متغییر مستقل مختصه‌ها و اندازه حرکت‌های مزدوج آنها اعمال می‌شود.

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j), \qquad P_i = P_i(q_j, p_j). \qquad (۲۰)$$

رابطه(۱۹) تبدیل در فضای پیکربندی و رابطه (۲۰) تبدیل در فضای فاز است. باید توجه داشت که تمام تبدیلات در رابطه (۲۰) معادلات هامیلتون را ناوردا نگه نمی‌دارند در نتیجه تبدیلاتی مورد توجه است که در آن معادلات هامیلتون ناوردا بمانند، چنین تبدیلاتی که در آن معادلات هامیلتون ناوردا بمانند تبدیلات بندادی می‌نامند. تبدیلات بندادی در حل مسائل اهمیت زیادی دارند و اطمینان می‌دهند که تحت این تبدیلات فیزیک مسئله تغییری نمی‌کند.

برای ساده‌تر شدن بررسی این‌گونه تبدیلات رابطه (۲۰) به شکل ماتریسی نمایش داده می‌شود. بنابراین برای سیستمی با n درجه آزادی

$$\eta = \begin{bmatrix} q_j \\ p_j \end{bmatrix}, \tag{۲۱}$$

یک ماتریس ستونی با $2n$ عضو، متشکل از q_j و p_j است. به همین ترتیب مجموعه مختصه‌های جدید Q_i و P_i را با یک ماتریس ستونی ξ با $2n$ عضو تعریف می‌کنند، لذا رابطه (۲۰) به شکل فشرده

$$\xi = \xi(\eta), \tag{۲۲}$$

نوشته می‌شود.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}[\xi(\eta)] \;\rightarrow\; \dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{d\eta_j}\frac{d\eta_j}{dt} = M_{ij}\dot{\eta}_j, \tag{۲۳}$$

مشتق زمانی یک عنصر از ماتریس می‌باشد، که در آن M ماتریس تبدیل ژاکوبی با اعضای

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}, \tag{۲۴}$$

است. با مشخص بودن عناصر ماتریس‌های η و $\frac{\partial H}{\partial \eta}$، و با توجه به این‌که $H = H(\xi(\eta))$ است، رابطه

$$\dot{\xi} = MJ\widetilde{M}\,\frac{\partial H}{\partial \xi}, \tag{۲۵}$$

برقرار است. اگر در رابطه بالا

$$MJ\widetilde{M} = J, \tag{۲۶}$$

باشد، شرط بندادی بودن تبدیلات به دست می‌آید[۲۴]. ماتریس M که این شرط را ارضا می‌کند ماتریس سیمپلیتیک نامیده می‌شود و این امکان را می‌دهد که با توجه به رابطه بالا بندادی بودن تبدیلات بررسی شود.

اگر $F(q,p,t)$ تابعی از مختصات فضای فاز با n ذره در نظر گرفته شود با استفاده از تعریف قلاب پواسون،

$$\{F,H\}_{q,p} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}, \tag{۲۷}$$

و معادلات هامیتونی در رابطه (۲۷)، تغییرات زمانی تابع $F(q,p,t)$ به صورت

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (۲۸)$$

نوشته می‌شود. تبدیلات بندادی علاوه بر اینکه معادلات هامیلتونی را ناوردا نگه می‌دارند، قلاب پواسون‌ها نیز تحت این تبدیلات ناوردا باقی می‌مانند[۲۴].

۲.۲ مکانیک آماری کلاسیک

در مورد سیستم‌های بس ذره‌ای، بررسی رفتار تک تک ذرات کار ناممکنی است، لذا برای مطالعه رفتار این‌گونه از سیستم‌ها، از مکانیک آماری و مفهوم فضای فاز که از کنار هم قرار دادن دوتایی‌های بندادی (p,q) ایجاد می‌گردد، استفاده می‌شود. برای سیستمی که دارای $۳n$ درجه آزادی است، فضای فاز یک فضای $۶n$ بعدی است که پایه‌های آن از $۳n$ مختصه مکانی و $۳n$ مختصه اندازه حرکت بندادی متناظر، شکل گرفته است. هر نقطه (p,q) در فضای فاز، نشان دهنده حالت لحظه‌ای کل(میکرو حالت) سیستم در زمان معین t می‌باشد که این نقطه را، نقطه مشخصه می‌گویند. با گذشت زمان میکرو حالت هر عضو از آنسامبل تغییر می‌کند و نقطه نمایش متناظر آن در فضای فاز نیز به طور پیوسته بر روی مسیرهای قابل دسترس خود تحول می‌یابد. اثر حرکت این نقطه در فضای فاز را مسیر حرکت سسیستم می‌نامند. برای بررسی تحول سیستم، در مکانیک آماری کلاسیک تابع چگالی احتمال $\rho(p,q;t)$ معرفی می‌شود. این تابع طوری تعریف شده که حاصل‌ضرب $\rho(p,q;t)dp^{۳n}dq^{۳n}$ در لحظه t برابر تعداد نقاط مشخصه(سیستم‌ها در آنسامبل) در عنصر حجم $dp^{۳n}dq^{۳n}$ و در پیرامون نقطه (p,q) باشد.

تحول تابع توزیع احتمال ρ، در دنیای کلاسیک آماری به وسیله معادله زیر که معادله لیوویل می‌نامند، داده می‌شود[۲۵]

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = ۰. \qquad (۲۹)$$