دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی محض

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

دوگان قاب های موجک

استاد راهنما

دکتر علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

دکتر طیبه لعل شاطری

نگارش

احسان حقیقت جو

تابستان ۱۳۹۱

فرم ۱۱۴ – ت

شماره :

تاریخ :

دانشگاه حکیم سبزواری

معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد/دکتری

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای احسان حقیقت جو دانشجوی رشته ریاضی محض با عنوان «دوگان قاب های موجک » در ساعت ۸ روز سه شنبه مورخ ۹۱/۴/۲۷ در محل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید .

پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای احسان حقیقت جو به دفاع از موضوع پرداخت و به سئوالات آنها پاسخ گفت .

سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۷/ برابر درجه خوب برای آن تعیین گردید .

به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای احسان حقیقت جو به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی محض شناخته می شود .

ردیف	نام ونام خانوادگی	سمت	امضاء
۱	دکتر علی اکبر عارفی جمال	استاد راهنما	
۲	دکتر طیبة لعل شاطری	استاد مشاور	
۳	دکتر محمد جانفدا	استاد داور	
۴	دکتر اعظم پورمیرزایی	نماینده تحصیلات تکمیلی	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه

طیبه لعل شاطری

رونوشت

۱- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع

۲- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع

۳- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو

۴- دانشجو

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید،

و به پاس محبت های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی

دفتر مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: حقیقت جو	**نام:** احسان	**ش دانشجویی:** ۸۹۱۳۱۲۲۱۱۱
استاد راهنما: علی اکبر عارفی جما ل	**استاد مشاور:** طیبه لعل شاطری	
دانشکده: ریاضی و کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۹۱/٤/۲۷	**تعداد صفحات:** ۶۰

عنوان پایان‌نامه: دوگان قاب های موجک

کلیدواژه‌ها: قاب، دوگان قاب،قاب موجک

چکیده:

در این پایان نامه نشان می دهیم که یک موجک قاب ψ با کاهش سریع در دامنه ی زمان و تکیه گاه فشرده در دامنه فرکانس وجود دارد و سیستم موجکی تولید می کند که دوگان کانونی قاب نمی تواند توسط تعداد دلخواهی از مولد ها تولید شود، از طرف دیگر تعداد نامتناهی دوگان غیر کانونی از ψ توسط یک تابع تولید می شود.

در پایان برای پارامترهای انتقال به قدر کافی کوچک و هر تابع محدود ψ که اتساع های تبدیل فوریه آن یک افراز واحد تشکیل دهد یک قاب موجکی تولید می کند که دوگان آن نیز ساختار موجک دارد. این دوگان قاب توسط یک ترکیب خطی متناهی از اتساع های ψ با ضرایب معلوم تولید می شود.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۰۹ هار[۱] اولین کسی بود که به موجک ها اشاره کرد. در سال ۱۹۸۰ ایومیر [۲] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه های موجکی متعامد را کشف کرد، در سال ۱۹۷۶ میر [۳] و مالت [۴] از پایه های موجک متعامد توانستند آنالیز چند ریزگی را بسازند و مالت تجزیه موجک ها و الگوریتم های بازسازی را با به کار بردن آنالیز چندریزگی بوجود آورد[۲۰] ،[۲۱].

بعد از آن در سال ۱۹۸۶موجک قاب ها (یا قاب های آفین) توسط دوبیشی [5]و گروسمن [۶] و میر مورد مطالعه قرار گرفته شد [۱۲].

نظریه موجک ها در پردازش سیگنال ها، پردازش تصاویر، آنالیز داده ها و بسیاری از شاخه های علوم به کار می روند.

در یک فضای هیلبرت به کمک هر قاب می توان عناصر فضا را به صورت ترکیب خطی اعضای قاب نوشت.

---

[۱] Haar

[۲] Eumier

[۳] Meyer

[۴] Mallet

[5] Dubechies

[۶] Grossmann

در این نمایش دوگان قابها نقشی اساسی ایفاء می کنند، دوگان کانونی که توسط عملگر قاب معرفی می شود اولین انتخاب خواهد بود. اما دو مشکل عدم وجود راهی برای یافتن دوگان کانونی و حفظ نکردن ویژگی های خاص قاب اولیه توسط دوگان کانونی در حالت کلی ما را به سمت یافتن دوگان های غیر کانونی سوق می دهد. از این رو شناسایی دوگان غیر کانونی قاب موجک از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

مشکل اساسی در این است که حتی وجود یک قاب دوگان موجک مستلزم این نیست که دوگان کانونی نیز ساختار موجک داشته باشد این ادعا تحت مثالی توسط دوبیشی و هان [۷] [۱۱] ثابت گردید، متاسفانه استدلال اولیه حاوی اشکالاتی بود که بعدا توسط بونیک [۸] و لمویگ [۹] مرتفع گردید [۱].

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است:

در فصل اول برخی مفاهیم مورد نیاز را یادآوری می کنیم و به صورت اجمالی به معرفی قاب ها و دوگان آنها در فضاهای هیلبرت جدایی پذیر می پردازیم.

در فصل دوم به بیان قاب موجک ها و دوگان آنها می پردازیم که کارایی زیادی در شاخه های علوم و مهندسی دارند.

در فصل سوم ضمن مرور کارهای انجام شده سعی می کنیم برای برخی قاب موجک ها فرمولی جهت یافتن دوگان غیر کانونی آنها ارائه دهیم که ساختار موجک داشته باشد، این مطلب از آن جهت ارزشمند است که یافتن دوگان کانونی در عمل امری دشوار و گاهی غیر ممکن بوده، حتی در صورت وجود ممکن است ساختار موجک نداشته باشد.

در انتها نیز فرمولی های صریحی برای یافتن دوگان های غیر کانونی برخی قاب های موجک ارائه می دهیم.

---

[۷] Han

[۸] Bownik

[۹] Lemvig

این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر است:

1)M. Bownik and J. Lemvig, The canonical and Alternate duals of a wavelet frame, Appl. Comput. Harmon. Anal (2007), 263-272.

2)O. Christensen, Moment problems and stability results for frames with applications to irregular sampling and Gabor frames. Appl. Comput. Harmon. Anal. 3 (1996), 82-86.

3)J. Lemvig, Constructing pairs of dual bandilmited framelets with desired time localization, Adv. Comput. Math. 30 (2009), 231-247.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

در این فصل ضمن یادآوری تعاریف و مفاهیمی از آنالیز حقیقی به مقدماتی درباره فضای هیلبرت، عملگرها و قاب ها روی فضای هیلبرت می‌پردازیم و به قضایای مورد نیاز فصل های بعدی اشاره می‌کنیم. برای بحث های تکمیلی خواننده می‌تواند به منابع [۴]، [۶] و [۲۲] مراجعه کند.

۱.۱ فضای هیلبرت

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. یک ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ عبارت است از تابع : $\langle .,. \rangle$ $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و اسکالر های $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

۱. $\langle x, x \rangle \geq 0$.

۲. $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

۳. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

۴. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

اگر برای $x, y \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle x, y\rangle = ۰$، گوییم x بر y عمود است و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت با تعریف $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{۱/۲}$ فضای $\mathcal{H}$ به یک فضای نرم دار تبدیل می‌شود، اگر $\mathcal{H}$ با این نرم فضای کامل باشد (به این معنی که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد) آن را یک فضای هیلبرت [۱] می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی x_n ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sum_{i=1}^{k} c_{n_i}x_{n_i}:\ k, n_i \in \mathbb{N},\ c_{n_i} \in \mathbb{C}\ \}.$$

دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را کامل [۲] گوییم، هرگاه $span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathcal{H}$ چگال[۳] باشد.

قضیه ۳.۱. *فرض کنید $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه شرایط زیر معادل اند:*

۱. *دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ کامل است.*

۲. *اگر $x \in \mathcal{H}$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\langle x, x_k\rangle = ۰$ آن گاه $x = ۰$.*

اثبات. برای اثبات صفحه ۳۸ مرجع [۶] را ببینید. □

تعریف ۴.۱. دنباله متعامد یکه $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک پایه متعامد یکه [۴] گوییم هرگاه کامل باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=۱}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i, \qquad x \in \mathcal{H} \\ |x| &= \sum_{i=۱}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^{۲}. \end{aligned}$$

---

[۱] Hilbert space

[۲] Complete

[۳] Dense

[۴] Orthonormal basis

به سادگی نشان داده می شود که چنین دنباله ای در $\mathcal{H}$، $\omega-$مستقل [5] است. بدین مفهوم که هرگاه ضرایب $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ طوری باشند که $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = 0$، آنگاه $c_i = 0$ برای هر $i \in \mathbb{N}$.

تعریف ۵.۱. فرض کنید M زیر مجموعه ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $M^{\perp}$ فضای مکمل متعامد [6] M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in M\}.$$

همواره $M^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. فرض کنید M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه هر $x \in \mathcal{H}$ تجزیه منحصر به فردی مانند $x = x_1 + x_2$ دارد که $x_1 \in M$، $x_2 \in M^{\perp}$، به عبارت دیگر $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.

۲.۱ برخی عملگرها بر فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$

در این بخش چند عملگر مهم معرفی می کنیم که در ادامه پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند.

فرض کنید $\mathbb{C}$ یک میدان اسکالر باشد. فضاهای L^p روی $\mathbb{R}^d$ $(1 \leq p < \infty)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}; \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx < \infty\}$$

که با نرم $\|\ .\ \|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |.|^p)^{1/p}$ یک فضای باناخ است در حالت $p = 2$ فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت مختلط است

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)dx \ .$$

در این پایان نامه به سه عملگر زیر در $L^2(\mathbb{R}^d)$ نیاز داریم.

---

[5] $\omega-$Independence

[6] Orthogonal complement

تعریف ۶.۱. فرض کنیم $k \in \mathbb{Z}^d$ و $m \in \mathbb{Z}$ و A یک ماتریس نامنفرد $d \times d$ باشد.

در این صورت تعریف می کنیم

(عملگر انتقال)[۷] $T_k : L^۲(\mathbb{R}^d) \to L^۲(\mathbb{R}^d),\ T_k f(x) = f(x-k)$

(عملگر اتساع [۸]) $D_A : L^۲(\mathbb{R}^d) \to L^۲(\mathbb{R}^d),\ D_A f(x) = |\det A|^{۱/۲} f(Ax)$

(عملگر مدولاسیون [۹]) $E_m : L^۲(\mathbb{R}^d) \to L^۲(\mathbb{R}^d),\ E_m f(x) = e^{۲\pi i m.x} f(x)$

ماتریس A در تعریف فوق را A ماتریس اتساع نامیم و به اختصار D_A را با D نشان می دهیم. خواص این عملگر ها را در دو گزاره زیر بیان می کنیم که اثبات بدیهی دارند.

گزاره ۷.۱. *برای هر* $k, j, m \in \mathbb{R}$ *روابط زیر را داریم*

$$\begin{aligned} T_k^* &= T_{-k} = (T^{-۱})^k \\ (D^j)^* &= D^{-j} = (D^{-۱})^j \\ E_m^* &= E_{-m} = (E_m)^{-۱} \end{aligned}$$

گزاره ۸.۱. *برای هر* $k, m \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}$ *روابط زیر را داریم*

$$\begin{aligned} T_k D^j &= D^j\, T_{A^j k}, & D^j\, T_k &= T_{A^{-j}k} D^j \\ T_k\, E_m &= e^{-۲\pi i k m}\, E_m\, T_k, & E_m\, T_k &= e^{۲\pi i k m}\, T_k\, E_m \\ E_m D^j &= D^j\, E_{A^j m}, & D^j\, E_m &= E_{A^{-j}m} D^j. \end{aligned}$$

اکنون تبدیل فوریه [۱۰] را به عنوان یک عملگر یکانی روی $L^۱(\mathbb{R})$ معرفی می کنیم.

---

[۷] Translation

[۸] Dilation

[۹] Modulation

[۱۰] Fourier transform

تعریف ۹.۱. برای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$ تبدیل فوریه f که با نماد $\hat{f}$ یا $\mathcal{F}(f)$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{f}(\gamma) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \gamma . x} dx$$

طبق قضیه پلانچرل [۱۱] تبدیل فوریه قابل توسیع به یک عملگر یکانی از $L^2(\mathbb{R})$ به $L^2(\mathbb{R})$ است. وارون تبدیل فوریه f را با $\check{f}$ یا $\mathcal{F}^{-1} f$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۰.۱. *تبدیل فوریه وارون:* [۱۲] *اگر* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *آنگاه*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy \quad (a.e) \ .$$

گزاره ۱۱.۱. *برای هر* $k \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}$ *روابط زیر را داریم*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\, T_k &= E_{-k} \mathcal{F} \\ \mathcal{F}\, D_A^j &= D_{A^*}^{-j} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

۳.۱ قاب ها در فضای هیلبرت

در این بخش به معرفی قاب ها [۱۳] *در فضاهای هیلبرت جدایی پذیر می‌پردازیم. هم چنین به اختصار خواص دو عملگر مهم یک قاب را بررسی می‌کنیم .*

تعریف ۱۲.۱. دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ [۱۴] را یک قاب (گسسته) می‌نامیم، هرگاه ثابت های مثبت A و B وجود

[۱۱] Plancherel 's theorem

[۱۲] Inversion Fourier theorem

[۱۳] Frame

[۱۴] Separable

داشته باشند به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A\|f\|^{۲} \le \sum_{i=۱}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^{۲} \le B\|f\|^{۲}.$$

A و B را کران های قاب می‌نامیم. اگر $A = B$ آن گاه قاب را چسبان [۱۵] و در حالتی که $A = ۱$ و $B = ۱$ قاب را چسبان نرمال [۱۶] می‌نامیم.

دنباله $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty} \in \mathcal{H}$ را بسل [۱۷] گوییم هرگاه حداقل شرط بالای نامساوی قاب برقرار باشد و B را کران بسل برای $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ می‌گوییم.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را یک دنباله قاب [۱۸] نامیم هرگاه $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\overline{span}\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ باشد.

در تعریف قاب، بزرگترین مقدار برای A و کوچکترین مقدار برای B که در شرط های نامساوی قاب صدق می‌کند را کران های بهینه [۱۹] قاب می نامیم.

تعریف ۱.۱۴. یک پایه ریس [۲۰] برای $\mathcal{H}$ ، یک خانواده از $\{Ue_i\}_{i=۱}^{\infty}$ که $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک عملگر کراندار و دوسویی است.

لم زیر نشان می دهد که مجموع یک دنباله بسل و یک قاب، مجددا یک قاب خواهد شد. برهان آن نتیجه مستقیمی از تعریف هاست.

[۱۵] Tight frame

[۱۶] Normal tight frame

[۱۷] Bessel sequence

[۱۸] Frame sequence

[۱۹] Optimal bounds

[۲۰] Riesz basis

لم ۱.۱۵. *فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با کران های A و B در آن باشد، و همچنین فرض کنید $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران C باشد، آنگاه $\{f_i + g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با کران های $\sqrt{A^2 - C^2}$ و $\sqrt{B^2 + C^2}$ است.*

اثبات. *برای اثبات قضیه ۳ مرجع [۱۳] و نتیجه ۲.۷ مرجع [۷] را ببینید.* □

بسیاری از خواص یك قاب توسط عملگری بیان می‌شود که متناظر با آن روی فضای هیلبرت زمینه تعریف می‌شود، این عملگر را عملگر قاب می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۶. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب در فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ باشد، عملگر قاب [۲۱] عبارت است از عملگرخطی $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

قضیه ۱.۱۷. *فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S و کران های A و B باشد آن گاه S عملگری کراندار، معکوس پذیر، خودالحاقی و مثبت است. به علاوه*

$$AI \leq S \leq BI.$$

اثبات. *برای اثبات صفحه ۱۰۰ مرجع [۶] راببینید.* □

تعریف ۱.۱۸. برای قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، عملگر T باضابطه

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad T\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i,$$

عملگر پیش قاب [۲۲] نامیده می‌شود و عملگر الحاقی آن به صورت زیر است،

$$T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \qquad T^*(f) = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty},$$

که عملگر تجزیه [۲۳] گفته می‌شود. به سادگی نشان داده می‌شود که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

[۲۱] Frame operator

[۲۲] Pre-frame operator

[۲۳] Analysis operator

$$S:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H},\qquad Sf=TT^*f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle f_i.$$

عملگر پیش قاب T همواره معکوس پذیر نیست. در حقیقت T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه ریس باشد.

قضیه ۱.۱۹. *هرگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S و کران های A و B باشد، آن گاه $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S^{-1} و کران های A^{-1} و B^{-1} است.*

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۱ مرجع [۶] را ببینید. □

لم ۱.۲۰. *هرگاه A و B کران های بهینه قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشند، آن گاه A^{-1} و B^{-1} کران های بهینه قاب $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ هستند.*

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۰ مرجع [۶] راببینید. □

قضیه ۱.۲۱. *فرض کنید S عملگر قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد، آن گاه برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم*

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,S^{-1}f_i\rangle f_i=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle S^{-1}f_i. \qquad (۱.۱)$$

اثبات. *برای اثبات صفحه ۱۰۲ مرجع [۶] راببینید.* □

قضیه ۱.۲۲. *فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر پیش قاب T و عملگر قاب S باشد، آن گاه کران های بهینه قاب عبارت اند از:*

$$A=\|S^{-1}\|^{-1},\qquad B=\|S\|=\|T\|^{2}.$$

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۱۱ مرجع [۶] راببینید. □

قضیه بعدی به این واقعیت اشاره دارد که ضرایب قاب $\{\langle f,S^{-1}f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ در (۱.۱) کمترین l^2 نرم را در بین همه دنباله های متناظر به f دارد. برای اثبات آن قضیه ۱.۱.۵ از مرجع [۶] را ببینید.

قضیه ۱.۲۳. *فرض کنیم $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $f\in\mathcal{H}$. اگر f برای ضرایب $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ نمایشی به صورت $f=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$ داشته باشد آنگاه*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,S^{-1}f_i\rangle|^2+\sum_{i=1}^{\infty}|c_i-\langle f,S_i^{-1}\rangle|^2.$$

فصل ۲

دوگان کانونی قاب های موجک

قاب های موجک [۱] یک رده از قاب ها هستند که در بسیاری از شاخه های علوم و مهندسی کارایی خود را نشان داده اند، در این بخش ضمن معرفی قاب های موجک در فضای هیلبرت $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ به بررسی دوگان چنین قاب هایی خواهیم پرداخت.

۱.۲ دوگان کانونی [۲]

یکی از اهداف اصلی نظریه قابها، یافتن ضرایب مناسبی به جای ضرایب قاب $\{\langle f, S^{-۱} f_i\rangle\}_{i=۱}^{\infty}$ در (۱.۱) است. پاسخ کاملی به این مبحث یافتن دوگان هایی برای یک قاب است. دراین بخش ضمن معرفی دوگان یک قاب به همراه مثال هایی شرایط وجود آنها را نیز بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک دنباله بسل برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. هم چنین اگر $\{g_i\}_{i=۱}^{\infty}$ نیز یک دنباله بسل برای $\mathcal{H}$ باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$f = \sum_{i=۱}^{\infty} \langle f, g_i\rangle f_i,$$

[۱] Wavelet frames

[۲] Canonical dual

آن گاه $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ را دوگان $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

توجه داریم که دوگان دارای خاصیت تقارنی است. ضمن اینکه حداقل یك قاب $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f,\ f_i \rangle g_i, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{۱.۲}$$

در حقیقت انتخاب استاندارد به صورت $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \{S^{-1} f_i\}_{i=1}^{\infty}$ است.

تساوی (۱.۲) که فرمول بازسازی [۳] نیز خوانده می‌شود یکی از مهمترین ابزارها در کاربرد قاب هاست.

متاسفانه در حالت دوگان کانونی نیز با معکوس یك عملگر کران دار روی یك فضای هیلبرت عموما نامتناهی البعد مواجه هستیم که این معکوس به آسانی به دست نمی‌آید. از طرفی دیگر، هیچ تضمینی نیست که ویژگی های خاصی از قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ به دوگان کانونی آن $\{S^{-1} f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نیز منتقل گردد.

اکنون این سوال مطرح می گردد که آیا انتخاب های دیگری برای $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ در (۱.۲) وجود دارد که شرایط خاص ما را برآورده سازد؟ در فصل های بعد به این سوال در مورد قاب موجک پاسخ خواهیم داد.

لم ۲.۲. *فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله های بسل در $\mathcal{H}$ باشند آنگاه گزاره های زیر معادل اند:*

۱. $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i, \quad \forall f \in \mathcal{H}$

۲. $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle g_i, \quad \forall f \in \mathcal{H}$

۳. $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle \langle g_i, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{H}$

۴. $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle \langle g_i, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$

در صورتی که تمام شرایط بالا برقرار باشند، همه سری های بالا بطور نامشروط همگرایند و قاب های $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دوگان یکدیگرند.

اثبات. برای اثبات مرجع [۶]را ببینید. □

---

[۳] Reconstruction