دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش رانگ–کوتای مرتبه چهار از نوع تفاضلات پسرو نیوتن بر اساس تقریب‌های چبیشف

اساتید راهنما

دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور

دکتر قدرت عبادی

پژوهشگر

سمیه اکبری

تیر ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: اکبری　　　نام: سمیه

عنوان: روش رانگ–کوتای مرتبه چهار از نوع تفاضلات پسرو نیوتن بر اساس تقریب‌های چبیشف

اساتید راهنما : دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی ، دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور: دکتر قدرت عبادی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　رشته: ریاضی کاربردی　گرایش: معادلات دیفرانسیل　دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی　　تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۸۹　　تعداد صفحه: ۸۱

کلید واژه‌ها: پایداری مطلق، $\mathrm{A}(\alpha)$– پایداری ، مساله مقدار اولیه سخت، روش های پسرو نیوتن، روش رانگ–کوتای ضمنی

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه روش رانگ–کوتای مرتبه چهار از نوع تفاضلات پسرو نیوتن بر اساس تقریب‌های چبیشف برای حل مسائل مقدار اولیه سخت می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم که روش را می‌توان به شکل روش رانگ–کوتای چهار مرحله‌ای مرتبه چهار فرمول بندی کرد. مزیت روش بی‌کران بودن ناحیه پایداری بوده که برای مقادیر بزرگ α، $\mathrm{A}(\alpha)$– پایدار است. کارایی روش با اعمال آن روی چند مساله مقدار اولیه سخت نشان داده می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه

حل عددی معادلات دیفرانسیل یکی از مباحث مهم آنالیز عددی است. که با توجه به اهمیت آن مورد توجه متخصصین قرار گرفته است. در این میان حل عددی مسائل سخت از ویژگی‌های خاصی برخوردار است. از سال ۱۹۵۰ که کرتیس[1] و هیرشفلدر [2] مشکلات حل عددی مسائل مقدار اولیه سخت را بیان کردند، روش‌های متعددی جهت برخورد با این مسائل ارائه گردیده است. مشکل اصلی این مسائل، ناحیه پایداری روش‌های به‌کار گرفته شده است که در آن‌ها طول گام را علاوه بر در نظر گرفتن دقت، می‌بایستی برای پایداری مسائل نیز کنترل کرد. روش‌های صریح برای حل عددی مسائل مقدار اولیه، محدودیت‌های زیادی در قبال ناحیه پایداری دارند که نهایتاً باعث خواهد شد چنین روش‌هایی مفید واقع نشوند. قضیه معروف دالکوئیست[3] که بیان می‌کند: «مرتبه یک روش چندگامی خطی A- پایدار حداکثر ۲ می‌باشد و روش الزاماً ضمنی است»، مسیر تحقیقات را برای روش‌هایی با ناحیه پایداری وسیع‌تر و مرتبه بالاتر مشخص نمود. روش‌های چندگامی خطی BDF[4] از جمله اولین روش‌های عددی برای مسائل سخت هستند که در سال ۱۹۵۲ معرفی گردید، که به علت ویژگی‌های خاص خود بسیار مورد توجه قرار گرفتند. در این پایان نامه ضمن مطالعه روش‌های معروف برای حل عددی دستگاه‌های سخت، یک روش رانگ—کوتای مرتبه چهارم از نوع تفاضلات پسرو نیوتن بر اساس تقریبات چبیشف برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل سخت معرفی می‌شود.

این پایان‌نامه در سه فصل گردآوری شده است. عمده مطالب فصل ۱ از منابع [۵] و [۴] و [۷] و [۱۰] و [۱۳] و [۱۴] و [۱۵] و [۱٦] جمع آوری شده است که در آن مفاهیم مقدماتی مربوط به

---

[1] Curtiss

[2] Hirschfelder

[3] Dahlquist

[4] Backward Differential Formula

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و روش‌های حل عددی دستگاه‌های سخت را بیان می‌کنیم. در فصل ۲ که از منبع [۱۱] گردآوری شده است، به ارائه روش رانگ—کوتای مرتبه چهارم می‌پردازیم. برنامه‌ای با نرم‌افزار maple برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی سخت به روش رانگ—کوتای مرتبه چهارم تهیه شده و آن را برای چند مساله سخت اجرا کرده‌ایم که نتایج به دست آمده در فصل ۳ آمده است.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر گردآوری شده است.

H. Ramos, J. Vigo-Aguiar, *A fourth-order Runge-Kutta method based on BDF-type Chebyshev approximations* , Appl. Math. Comput. 204(2007) 124-136.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ روش های عددی حل مساله مقدار اولیه

مساله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y), \quad y : [x_0, b] \to \mathbb{R}^m, \quad f : [x_0, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \qquad (۱.۱)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

را در نظر بگیرید.

قضیه ۱.۱ فرض کنید D دامنه‌ای در R^2 و f تابع حقیقی باشد به طوری که

(۱) $f \in c(D)$

(۲)f در شرط لیپ شیتس نسبت به x با ثابت لیپ شیتس L درD صدق کند.

همچنین، فرض کنید (τ, ξ) نقطه درونی در D باشد و a وb طوری باشند که مستطیل

$$R = \{(t, x) :| t - \tau |\leq a, | x - \xi |\leq b\}$$

در D قرار گیرد. در این صورت، جواب منحصربفرد ϕ برای مساله مقدار اولیه (۱.۱) برای t هایی که $| t - \tau |\leq h$ وجود دارد که در آن،

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M = \max | f(t, x) | .$$

و$(t, x) \in R$

برهان. ر.ک [۱۲]. $\square$

فرض کنید مساله (۱.۱) جواب یکتایی دارد. روش‌های عددی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه به شکل (۱.۱)، مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در نقاط مشخصی از بازه

$[x_0, b]$ به دست می‌آورند، که نقاط گره‌ای نام دارند. در یک افراز متساوی‌الفاصله، هر نقطه گرهی از روی x_0 با رابطه

$$x_n = x_0 + nh, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$
$$x_N = b,$$

به دست می‌آید، که در آن h طول گام نامیده می‌شود.

روش معروف اویلر [1] از اولین روش‌های حل عددی مسائل مقدار اولیه است که آن را می‌توان اساس روش های دیگر دانست. برای حل عددی (۱.۱) به روش اویلر، مقادیر تقریبی y_0،y_1،y_2،... از $y(x_0)$،$y(x_1)$،$y(x_2)$،... با رابطه

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$y(x_0) = y_0,$$

به دست می‌آیند.

با توجه به فرمول اویلر ملاحظه می‌شود که y_n تنها به y_{n-1} وابسته است و مقادیر y_{n-2}،y_{n-3}،... در محاسبه‌ی y_n نقشی ندارند. در حالی که روش‌های چندگامی شامل روابطی است که در آنها y_n به مقادیر $(k \geqslant 2)$ y_{n-2}،...،y_{n-k} نیز وابسته است. به عنوان مثال

$$y_n = y_{n-2} + 2hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

همچنین در فرمول روش اویلر فقط تابع f استفاده می‌شود نه مشتقات آن، به عبارتی جمله‌ای شامل $y''(x)$،$y'''(x)$،... وجود ندارد. در حالی که روش سری تیلور که تعمیم یافته روش اویلر است، شامل روابطی است که در آن‌ها علاوه بر $y'(x)$، از عبارات $y''(x), y'''(x), \ldots$ نیز استفاده

[1] Euler

می‌شود. همچنین در هر گام از روش اویلر، تابع f تنها یک بار محاسبه می‌شود. در صورتی که در روش‌های رانگ—کوتا[2] تابع f بیش از یک بار محاسبه می‌شود، به عنوان مثال

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{1}{2}hf(x_{n-1}, y_{n-1})).$$

یک روش از دسته روش‌های رانگ—کوتا است. بنابراین در رده‌بندی اولیه روش‌ها، دو دسته روش را می‌توان در نظر گرفت: روش‌های تک‌گامی و روش‌های چندگامی.
در روش‌های تک‌گامی مقدار تقریبی در هر گره با استفاده از اطلاعات در گره قبلی به دست می‌آید. در حالی که در یک روش چندگامی، مثلاً k- گامی، مقدار تقریبی با استفاده از اطلاعات در k گره قبلی تعیین می‌شود.

۱.۱.۱ روش‌های چندگامی خطی

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در n نقطه $x_i = x_0 + ih \quad i = 1, 2, \ldots, n,$ محاسبه نموده‌ایم

$$y_i \simeq y(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

یک روش k- گامی برای حل معادله دیفرانسیل (۱.۱) در حالت کلی به صورت

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\phi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, y'_n, y'_{n+1}, \ldots, y'_{n+k}),$$

نوشته می‌شود، که در آن h طول گام و α_i مقادیر ثابت و معلوم می‌باشند. اگر ϕ مستقل از y'_{n+k} باشد، روش را صریح و در غیر این صورت روش را ضمنی می‌نامیم. تعداد $k-1$ مقدار

---
[2] Runge-Kutta

y_1،y_2،...،y_{k-1} مورد نیاز برای شروع یک روش k- گامی را می‌توان با استفاده از یک روش تک گامی به دست آورد. شکل کلی روش‌های چند گامی خطی به صورت

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}, \tag{۲.۱}$$

است، که در آن ضرایب α_i و β_i اعداد حقیقی ثابتی هستند، $\alpha_k = 1$ و ضرایب α_0 و β_0 همزمان صفر نیستند ($\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$).

اگر $\beta_k = 0$، روش صریح نامیده می‌شود، به عبارتی y_{n+k} تنها در سمت چپ معادله ظاهر می‌شود و می‌توان آن را با استفاده از مقادیر سمت راست مستقیماً به دست آورد. اگر $\beta_k \neq 0$، روش را ضمنی گوییم، در این صورت y_{n+k} در هر دو طرف معادله ظاهرشده و مستقیماً قابل محاسبه نمی‌باشد.

تعریف ۲.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را همگرا گوییم هرگاه برای هر مساله مقدار اولیه (۱.۱)،

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x-x_0}} y_n = y(x),$$

به ازای هر $x \in [a,b]$ برقرار باشد و برای همه جواب های y_n از مساله مقدار اولیه (۱.۱) که در شرایط آغازین $y_\mu = y_\mu(h)$ صدق می‌کنند، داشته باشیم $\lim_{h\to 0} y_\mu(h) = y_0,\ \mu = 0,1,2,...,k-1.$

عملگر تفاضلی L نظیر روش (۲.۱) را به صورت

$$L[y(x_n);h] = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i y(x_{n+i}) - h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'(x_{n+i}), \tag{۳.۱}$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از بسط تیلور حول x_n می‌توان نوشت

$$L[y(x_n);h] = c_0 y(x_n) + c_1 h y'(x_n) + c_2 h^2 y''(x_n) + \cdots + c_q h^q y^{(q)}(x_n) + \cdots,$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i, \\ c_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k), \\ c_q &= (\frac{1}{q!})(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k) - (\frac{1}{(q-1)!})(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + k^{q-1}\beta_k), \quad q = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

تعریف ۳.۱ عملگر تفاضلی (۳.۱) و متناظر آن روش چندگامی خطی (۲.۱) را از مرتبه p گوییم هرگاه

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_p = 0, \qquad c_{p+1} \neq 0.$$

در این صورت برای هر $y(x) \in C^{p+2}$ و ثابت غیرصفر c_{p+1} می‌توان نوشت

$$L[y(x); h] = c_{p+1} h^{p+1} y^{p+1}(x_{n+k}) + O(h^{p+2})$$

که c_{p+1} را ثابت خطا می‌نامند.

۲.۱.۱ سازگاری و صفر– پایداری

تعریف ۴.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را سازگار[3] گوییم هرگاه از مرتبه‌ی $p \geq 1$ باشد.

بنابراین روش (۲.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i.$$

consistent[3]

حال اگر اولین و دومین چندجمله‌ای مشخصه روش چندگامی خطی را به ترتیب به صورت

$$\rho(\xi)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\xi^i,\qquad \sigma(\xi)=\sum_{i=0}^{k}\beta_i\xi^i,$$

تعریف کنیم، در این صورت روش سازگار است اگر و تنها اگر

$$\rho(1)=0,\qquad \rho'(1)=\sigma(1).$$

بنابراین در یک روش سازگار چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\xi)$ همواره یک ریشه در ۱+ دارد که این را ریشه اصلی می‌نامیم و آن را با ξ_1 نشان می‌دهیم و بقیه ریشه‌ها، ξ_s ،$s=2,3,4,\dots,k$ را ریشه‌های فرعی می‌نامیم و زمانی ظاهر می‌شوند که تعداد گام‌های روش بیشتر از ۱ باشد.

مساله مقدار اولیه $y(0)=0$ ،$y'=0$ را در نظر بگیرید که جواب آن $y(x)=0$ است. با به کارگیری روش (۲.۱) روی این مساله، معادله تفاضلی $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=0$ به دست می‌آید. فرض کنید ریشه‌های ξ_s از $\rho(\xi)$ حقیقی و متمایز باشند. لذا یک جواب برای y_n از معادله تفاضلی فوق به صورت

$$y_n=h(d_1\xi_1^n+d_2\xi_2^n+\cdots+d_k\xi_k^n),$$

است، که در آن d_s ثابت‌های دلخواه هستند. اگر روش همگرا باشد، باید برای $h\to 0$ و $n\to\infty$ و $nh=x$ ثابت داشته باشیم $y_n\to 0$. با توجه به اینکه داریم

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x}} h\xi_s^n = x\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_s^n}{n}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad |\xi_s|\leqslant 1,$$

بنابراین برای همگرایی روش، نباید اندازه ریشه‌های $\rho(\xi)$ بیشتر از یک باشد.

حالتی را در نظر می‌گیریم که ξ_s یک ریشه حقیقی چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\xi)$ با چندگانگی $m>1$ باشد، لذا یک جواب برای y_n از معادله تفاضلی فوق به صورت

$$y_n=h\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{k}d_t\xi_t^n+h(d_{s,1}+d_{s,2}n+d_{s,3}n(n-1)+\cdots+d_{s,m}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2))\xi_s^n,$$

خواهد بود. چون برای $q \geq 1$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x}} hn^q\xi_s^n = x\lim_{n\to\infty} n^{q-1}\xi_s^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\xi_s| < 1$$

لذا واضح است که برای همگرایی روش اندازه‌ی ریشه‌های از چندگانگی بیش از یک باید اکیداً کمتر از یک باشند.

تعریف ۵.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را صفر– پایدار[4] می‌نامیم هرگاه ریشه‌های $\rho(\xi)$ داخل و روی دایره واحد بوده و ریشه‌های از چندگانگی بیش از ۱ داخل دایره واحد قرار گیرند.

قضیه مهم برای روش‌های چندگامی خطی در زیرآورده می‌شود که رابطه بین مفاهیم فوق را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۱ سازگاری و صفر– پایداری با هم شرط لازم و کافی برای همگرایی روش هستند.

برهان. ر.ک [۷]. □

روش k– گامی خطی (۲.۱) تعداد $2k+2$ ضریب α_i و β_i دارد که با فرض $\alpha_k = 1$، تعداد $2k+1$ پارامتر آزاد داریم. لذا انتظار داریم برای یک روش k– گامی ضمنی مرتبه روش $2k+1$ و برای روش صریح $2k$ باشد. اما برای صفر– پایداری قضیه زیر محدودیت مرتبه را مشخص می‌کند.

قضیه ۷.۱ در یک روش k– گامی خطی صفر– پایدار مرتبه روش برای مقادیر فرد k حداکثر $k+1$ و برای مقادیر زوج k حداکثر $k+2$ است.

برهان. ر.ک [۷]. □

[4] zero-stable

۳.۱.۱ پایداری عددی روش

روش (۲.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید روش سازگار و صفر− پایدار است و جواب تحلیلی $y(x)$ از مساله مقدار اولیه در شرط

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) + T_{n+k}, \qquad (۴.۱)$$

صدق می‌کند، که در آن T_{n+k} خطای برشی موضعی است. حال اگر $\{\tilde{y}_n\}$ جواب (۲.۱) با احتساب خطای گرد شده باشد، داریم

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{y}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, \tilde{y}_{n+i}) + R_{n+k}, \qquad (۵.۱)$$

که R_{n+k} را خطای گرده شده می‌نامند. از تفاضل (۵.۱) از (۴.۱) و تعریف خطای $\tilde{e}_n = y(x_n) - \tilde{y}_n$، داریم

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{e}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i [f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) - f(x_{n+i}, \tilde{y}_{n+i})] + \phi_{n+k},$$

که در آن $\phi_{n+k} = T_{n+k} - R_{n+k}$.

اگر فرض کنیم مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ برای هر $x \in [a,b]$ وجود دارد، آنگاه بنابر قضیه مقدار میانگین، عددی مانند η_{n+k} در بازه باز $(y(x_{n+i}), \tilde{y}_{n+i})$ وجود دارد به طوریکه می‌توان نوشت

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{e}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \frac{\partial f(x_{n+i}, \eta_{n+i})}{\partial y} \tilde{e}_{n+i} + \phi_{n+k}.$$

حال اگر $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}$ و $\phi_n = \phi$ به عنوان مقادیر ثابت فرض شوند، داریم

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{e}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda \tilde{e}_{n+i} + \phi,$$

به عبارت دیگر داریم

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - h\lambda\beta_i) \tilde{e}_{n+i} = \phi.$$

جواب عمومی معادله تفاضلی فوق به صورت

$$\tilde{e}_n = \sum_{s=1}^{k} d_s \xi_s^n - \frac{\phi}{\bar{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_i},$$

است، که در آن d_s مقادیر ثابت دلخواه و ξ_s ریشه‌های متمایز معادله چندجمله‌ای

$$\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i - \bar{h}\beta_i)\xi^i = 0,$$

می‌باشند.

تعریف ۸.۱ چندجمله‌ای پایداری[5] روش (۲.۱) به صورت

$$\pi(\xi, \bar{h}) = \rho(\xi) - \bar{h}\sigma(\xi),$$

تعریف می‌شود که در آن $\bar{h} = h\lambda$.

فرض کنید که $\xi_1(\bar{h})$ ریشه‌ای از $\pi(\xi, \bar{h}) = 0$ باشد که $\lim \xi_1(\bar{h}) = 1$ وقتی $\bar{h} \to 0$، این ریشه را ریشه اصلی می‌نامند. واضح است که می‌خواهیم بقیه ریشه‌ها در داخل دایره واحد در صفحه مختلط قرار گیرند.

تعریف ۹.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را پایدار مطلق[6] گوییم هرگاه داشته باشیم $\mid \xi_i(\bar{h}) \mid < 1$، $i = 1, 2, \cdots, k$. ناحیه پایداری مطلق برای روش چندگامی خطی به صورت

$$A = \{\bar{h} \in C : \mid \xi_i(\bar{h}) \mid < 1,\ i = 1, 2, \cdots, k\},$$

تعریف می‌شود که در آن C مجموعه اعداد مختلط است.

[5] Stability Polynomial

[6] Absolute Stability

هنگامی که $\bar{h}=0$ باشد، دراین صورت ریشه‌های چندجمله‌ای پایدار بر ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه اول یعنی ρ منطبق خواهد بود که با توجه به صفر– پایداری و سازگاری همه ریشه‌ها در داخل یا روی دایره واحد قرار دارند و $\xi_1=1$ یک ریشه ساده است.
فرض می‌کنیم که r_1 یک ریشه از چندجمله‌ای مشخصه پایدار باشد، وقتی h به صفر میل کند در این صورت r_1 به $\xi_1=1$ میل می‌کند و می‌توان نشان داد [۱۵]

$$exp(\bar{h})-r_1=O(\bar{h}^{p+1}),$$

که در آن p مرتبه روش چندگامی خطی است. از رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که هر روش سازگار و صفر– پایدار برای $\bar{h}^+$ کوچک، بطور مطلق ناپایدار است.
یکی از روش‌های تعیین ناحیه پایداری مطلق، استفاده از روش مکان هندسی مرزی است. در این روش ابتدا چندجمله‌ای پایداری $\pi(\xi,\bar{h})=\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi)$ به دست می‌آید. سپس این معادله را نسبت به $\bar{h}$ حل می‌کنیم. مقادیری از ξ را در نظر می‌گیریم که روی دایره واحد قرار دارند و برای این کار قرار می‌دهیم

$$\xi=e^{i\theta},\qquad \theta\in[0,2\pi],$$

درنتیجه مقادیر $\bar{h}$ مرز ناحیه پایداری را مشخص می‌کند.

تعریف ۱۰.۱ روش (۲.۱) را A– پایدار[7] گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\{\bar{h}\in C: Re(\bar{h})<0\}\subset A.$$

---

[7] A-Stable

روش‌های چندگامی خطی A- پایدار برای حل دستگاه‌های سخت مناسب هستند. ولی این دسته از روش‌ها بسیار محدود می‌باشند. قضیه دوم دالکوئیست این محدودیت را در معرفی روش‌های A- پایدار نشان می‌دهد که به صورت زیر است.

قضیه ۱۱.۱ مرتبه یک روش چندگامی خطی A- پایدار حداکثر ۲ بوده و این روش الزاماً ضمنی است.

برهان. ر.ک [۴]. □

تعریف ۱۲.۱ روش (۲.۱) را $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$، A($\alpha$)- پایدار[8] گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\{\bar{h} \in C : -\alpha < \pi - Arg(\bar{h}) < \alpha \, , \, \bar{h} \neq 0\} \subset A.$$

شکل ۱.۱: A(α)- پایداری

تعریف ۱۳.۱ روش (۲.۱) را $A(0)$- پایدار[9] گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\{\bar{h} \in C : Re(\bar{h}) < 0, Im(\bar{h}) = 0\} \subset A.$$

[8] A(α)-Stable

[9] A(0)-Stable

تعریف ۱۴.۱ روش (۲.۱) را L– پایدار [10] گوییم هرگاه اولاً A– پایدار بوده و ثانیاً هرگاه روی مساله آزمون $y' = \lambda y$ بکار ببریم برای $\bar{h} \to -\infty$، $(Re\lambda))$ بزرگ و h به قدر کافی کوچک نباشد) $\lim y_n = 0$.

تعریف ۱۵.۱ روش (۲.۱) را به طور سخت پایدار[11] گوییم هرگاه داشته باشیم

$$A_1 \cup A_2 \subset A,$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\bar{h} \in C : Re(\bar{h}) < -a\}, \\ A_2 &= \{\bar{h} \in C : -a \leq Re(\bar{h}) \leq 0, -c \leq Im(\bar{h}) \leq c\}, \end{aligned}$$

و a, c اعداد حقیقی مثبت هستند. واضح است که به طور سخت پایداری، A(α)– پایداری را به ازای $\alpha = \arctan(\frac{c}{a})$ نتیجه می‌دهد.

۲.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل سخت دارای مولفه‌های جواب با تغییرات شدید هستند. در مسائل غیرسخت، طول گام را فقط جهت دقت مساله کنترل می‌کنند. اما مسائلی که درآن‌ها

[10] L-Stable

[11] Stiffly-Stable