دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمار ریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

مشخصه‌سازی فرآیندهای همبسته متناوب و ایستای چندمتغیره با ویژگی مارکف

استاد راهنما:

دکتر علیرضا نعمت اللهی

استاد مشاور:

دکتر نرگس عباسی

نگارش:

سمیرا افشار

بهمن ۸۸

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : مشخصه‌سازی فرآیندهای همبسته متناوب و ایستای چندمتغیره با ویژگی مارکف

که توسط سمیرا افشار در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۸۸/۱۱/۳۰ نمره: ۱۹/۱ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– دکتر علیرضا نعمت اللهی	استاد راهنما	دانشیار	
۲– دکتر نرگس عباسی	استاد مشاور	دانشیار	
۳– دکتر مسعود یارمحمدی	استاد داور	استادیار	
۴– دکتر نرگس عباسی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاسگزاری

پس از حمد و ستایش به درگاه خداوند متعال، بدینوسیله بر خود لازم می‌دانم از استاد فرزانه و ارجمند جناب آقای دکتر نعمت اللهی، به‌خاطر تلاش‌ها و راهنمایی‌های ارزشمندشان در انجام این پایان‌نامه صادقانه تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از عنایات استاد محترم، دکتر نرگس عباسی و اعضای محترم کمیته پایان‌نامه صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان از خانواده عزیزم که در تمام سال‌های تحصیل باعث دلگرمی‌ام بوده‌اند، تشکر می‌کنم.

چکیده

تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی معمولاً با فرض ایستایی سری صورت می‌گیرد، در حالی‌که این فرض در بسیاری موارد برقرار نمی‌باشد. مثلاً با توجه به طبیعت گردشی منظومه شمسی، در بسیاری از پدیده‌های طبیعی نظیر جزر و مد، فعالیت‌های اقتصادی، فرآیندهای هواسنجی و ... یک تناوب به‌صورت ذاتی وجود دارد. از اینرو در چند دهه اخیر کلاسی از فرآیندهای ناایستا به‌نام فرآیندهای همبسته متناوب، به‌خاطر کاربردهای مختلف در علوم و فنون، توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده‌است. این فرآیندها با داشتن بسیاری از خواص فرآیندهای ایستا، دارای نظمی متناوب در میانگین و کواریانس می‌باشند. برخی فرآیندهای همبسته متناوب را پلی بین فرآیندهای ایستا و ناایستا دانسته‌اند.

این پایان‌نامه به مطالعه‌ی فرآیند مارکف و خودبازگشتی باهمبستگی متناوب و ایستای چندمتغیره و تحقیق درباره‌ی ساختار تابع کوواریانس و ضرایب انعکاس و مشخصه‌سازی آنها بر اساس مارتینگل‌های ضعیف و مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول می‌پردازد.

فرمول‌های بسته‌ای برای تابع کوواریانس $R(n,m)$ و چگالی طیفی $f(\lambda)$ فرآیندهای یک متغیره مارکف با همبستگی متناوب ارائه شده‌است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل سوم: مشخصه‌سازی فرآیندهای همبسته متناوب و ایستای چندمتغیره با ویژگی مارکف

پیوست

مقدمه :

ساختار همبستگی بسیاری از سری‌های زمانی وابسته به عامل "فصل" می‌باشد و از این‌رو نمی‌توان از فرض ایستایی برای مدل‌بندی اینگونه سری‌ها استفاده کرد. فرآیندهای همبسته متناوب (PC) کلاسی از فرآیندهای تصادفی هستند که در حالت کلی ناایستا بوده اما تعدادی از ویژگی‌های فرآیند ایستا را دارا هستند.

فرآیندهای همبسته متناوب، به‌خاطر کاربردهای مختلف در علوم و فنون، توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده‌است. برای مثال، در علم جوشناسی (برای مثال، برای پیش-بینی وضع هوا) تناوب ناشی از فصل، به‌وسیله چرخش و حرکت انتقالی زمین به‌وجود آمده‌است. در اخترشناسی تناوب ناشی از چرخش ماه، چرخش و ارتعاشات خورشید، چرخش ژوپیتر و ماهواره-های I/O و... می‌تواند سبب تناوب قوی در سری زمانی(برای مثال سیگنال‌های ارتعاشی) باشد. این فرآیندها با داشتن بسیاری از خواص فرآیندهای ایستا، دارای نظمی متناوب در میانگین و کواریانس می‌باشند.

همان‌گونه که می‌دانیم تکامل آینده یک فرآیند مارکف اکید به شرط تکامل حال و گذشته آن تنها به حال آن بستگی دارد. بر حسب خواص مرتبه دوم، این ویژگی مارکفی برای محاسبه تصویر روی زیر فضاهای خطی تولید شده به‌کار می‌رود.

در ادبیات این مفهوم، فرآیندهای مارکف ضعیف عمدتاً در حالت زمان پیوسته فرض شده‌اند. اما دراین پایان نامه حالت زمان گسسته را مد نظر قرار می‌دهیم.

هدف از این پایان نامه بررسی فرآیندهای مارکف ضعیف زمان گسسته هم از نوع چندمتغیره ایستا و هم از نوع همبسته متناوب می‌باشد و خواص آنها را بررسی خواهیم کرد و این فرآیندها را بر اساس مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول مشخصه سازی می‌کنیم.

پایان‌نامه حاضر به‌صورت زیر سازماندهی شده‌است.

در فصل اول برخی اصول پایه‌ای و برخی از مفاهیم مورد نیاز از قبیل فرآیندهای همبسته متناوب، تئوری قلمرو فرکانس، فرآیندهای مارکف ساده و چندگانه، مدل‌های خودبازگشتی متناوب و ... را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دو به ساختار یک فرآیند مارکف همبسته متناوب (PCM) پرداخته شده و یک فرمول بسته برای تابع کوواریانس $R(n,m) = EX_nX_m$ فرآیند مارکف همبسته متناوب با تناوب T ارائه شده‌است. در این فصل مشاهده شده که می‌توان کوواریانس را به‌وسیله مقادیر متناهی $\{R(j,j), R(j,j+۱), j = 0, \ldots, T-۱\}$ مشخص کرد. چگالی طیفی یک فرآیند مارکف همبسته متناوب نیز در انتهای این فصل به‌صورت یک فرمول بسته آورده‌شده‌است.

فصل سوم به بررسی ساختار کلاس فرآیندهای مارکف ضعیف زمان‌گسسته همبسته متناوب و ایستای چندگانه می‌پردازد. این فصل برخی از ویژگی‌های ماتریس‌های کوواریانس، همبستگی و ضرایب انعکاس آنها را نشان می‌دهد. همچنین این فرآیندها را بر حسب مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول مشخصه‌سازی می‌کند. در پایان نیز مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن موضوع آورده‌شده‌است.

فصل اول

مقدمه و مروری بر مفاهیم پایه

۱.۱ اهداف

تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی معمولاً با فرض ایستایی (مانایی) سری صورت می‌گیرد. درحالی که این فرض در بسیاری از موارد برقرار نمی‌باشد. درچند دهه‌ی اخیر کلاسی از فرآیندهای ناایستا به نام فرآیندهای با همبستگی متناوب به خاطر کاربردهای مختلف در علوم و فنون توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده است. این فرآیندها با داشتن بسیاری از خواص فرآیندهای ایستا، دارای نظمی متناوب درمیانگین و کوواریانس می‌باشند. این پایان‌نامه به مطالعه فرآیندهای همبسته متناوب با ویژگی مارکوف و همچنین فرآیندهای ایستای چندمتغیره با این ویژگی می‌پردازد. همچنین تابع کوواریانس این فرآیندها توصیف و بر حسب مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول نیز مشخصه‌سازی شده‌اند.

۲.۱ فرآیندهای همبسته متناوب

ساختار همبستگی بسیاری از سری‌های زمانی وابسته به عامل "فصل" می‌باشد و از این‌رو نمی‌توان از فرض ایستایی برای مدل‌بندی اینگونه سری‌ها استفاده کرد.

برای مثال، در یک رودخانه که در بهار دوره‌های بلند مدت سیلابی و در تابستان طغیان‌های کوتاه مدت همراه با انحراف جریان آب رخ می‌دهند، همبستگی‌های مقادیر طغیان‌ها بین ماه‌های فصل بهار ممکن است با این همبستگی‌ها در بین ماه‌های تابستان متفاوت باشد و در نتیجه استفاده از فرض ایستایی با تردید همراه است.

فرآیندهای همبسته متناوب[۱](PC) کلاسی از فرآیندهای تصادفی هستند که در حالت کلی ناایستا بوده اما تعدادی از ویژگی‌های فرآیند ایستا را دارا هستند. یک فرآیند تصادفی مانند $\{X_t\}$ ساختار متناوب دارد اگر توزیع احتمال توأم $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ و $X_{t_1+kT},\dots,X_{t_n+kT}$ ، برای هر n نقطه‌ی زمان t_i، هرعدد صحیح k و عدد مثبتT، یکسان باشند که T دوره تناوب نامیده می‌شود. یک فرآیند ایستای قوی در یک حالت خاص، توزیع احتمال توأم یکسانی برای هرمقدار T دارد. گلادیشف[۲] (۱۹۶۱) دنباله‌ی تصادفی همبسته‌متناوب را به‌عنوان یک فرآیند که ساختار متناوب در

[۱] Periodically correlated
[۲] Gladyshev

مفهوم ضعیف داراست، تعریف کرد. دراین حالت، فرآیندهای تصادفی همبسته متناوب، فرآیندهایی تصادفی هستند که دارای یک ریتم متناوب بوده که در حالت کلی پیچیده‌تر از تناوب در تابع میانگین هستند.

تعریف۱.۲.۱: یک فرآیند حقیقی مقدار $X = \{X_n, n\epsilon\mathbb{Z}\}$، $\mathbb{Z}$ مجموعه همه‌ی اعداد صحیح، همبسته متناوب (PC) است اگر میانگین $\mu_n = \mathrm{EX_n}$ و تابع کوواریانس $R(n,m) = E(\mathrm{X_n} - \mu_n)(\mathrm{X_m} - \mu_m)$ آن متناهی باشد و یک عدد صحیح T وجود داشته باشد، به‌طوری که μ_n و $R(n,m)$ متناوب با دوره تناوب T باشند به این معنی که

$$\mu_n = \mu_{n+T} \quad \text{و} \quad R(n,m) = R(n+T, m+T) \tag{۱.۲.۱}$$

برای همه‌ی $m, n\epsilon\mathbb{Z}$.

برای رفع ابهام، T کوچکترین عدد مثبت که در رابطه (۱.۲.۱) صدق می‌کند را در نظر می‌گیریم. هنگامی‌که T=۱ سری‌های PC معادل سری‌های ایستاست. عبارت همبسته متناوب به‌وسیله‌ی گلادیشف (۱۹۶۱) برای توصیف ویژگی‌های همبستگی فرآیندهای متناظر با سری‌های PC، به‌کار رفته است. از این‌رو در ارتباط با ویژگی‌های مرتبه دوم فرآیند، بدون از دست دادن حالت کلی، می‌-توان فرض کرد که $\mu_n = 0$ (به‌وسیله‌ی جایگزین کردن $\{\mathrm{X_n} - \mu_\mathrm{n}\}$، یعنی، میانگین نمونه متناوب از هر داده کم می‌شود). بنابراین همبستگی EX_nX_m و کوواریانس همانند هستند.

۳.۱ تئوری قلمرو فرکانس

فرض کنید $\{X_n\}$ فرآیند همبسته متناوب با تناوب T باشد. در روش قلمرو فرکانس برای مطالعه سری‌های زمانی PC، بر این واقعیت که $\{X_n\}$ قابل همساز شدن [در معنای لوو[۱] (۱۹۷۸، بخش ۳۷.۴)]است، بنا نهاده شده و به این معنی که دارای نمایش طیفی زیر است:

$$X_n = \int_0^{2\pi} \exp(in\lambda)\, dZ(\lambda), \quad n\epsilon\mathbb{Z} \tag{۱.۳.۱}$$

جایی‌که $\{Z(\lambda),\ 0 \le \lambda < 2\pi\}$ فرآیند تصادفی مختلط مقدار با میانگین صفر است.

[۱] Loeve

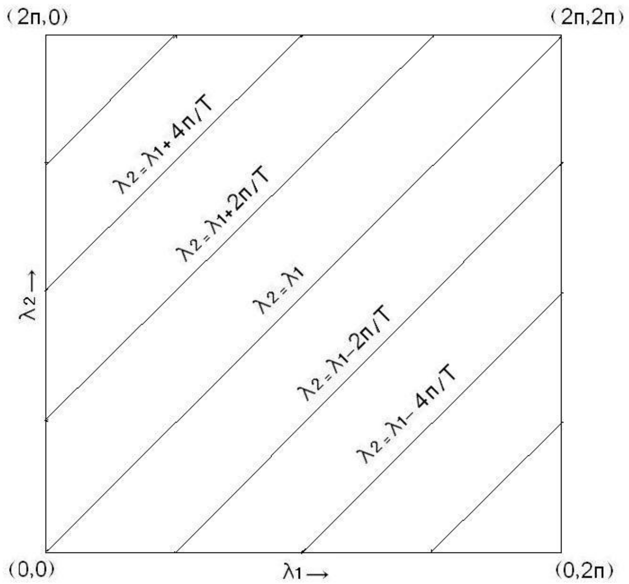
ساختار مرتبه دوم $\{Z(\lambda),\ 0 \le \lambda < ۲\pi\}$ به‌وسیله‌ی تابع اندازه علامت دومتغیره‌ی مختلط مقدار Γ با نمو

$$\Gamma(d\lambda_۱, d\lambda_۲) = E\left[dZ(\lambda_۱)\overline{dZ(\lambda_۲)}\right], \quad (\lambda_۱, \lambda_۲)\epsilon[0, ۲\pi) \times [0, ۲\pi) \qquad (۲.۳.۱)$$

تشریح می‌گردد.

اگر $\{X_n\}$ ایستا باشد، پس $Z(\lambda)$ دارای نمو متعامد است به این معنی که اگر $\lambda_۲ \neq \lambda_۱$ آنگاه $E\left[dZ(\lambda_۱)\overline{dZ(\lambda_۲)}\right] = 0$. در این حالت، Γ روی قطر اصلی مربع $[0, ۲\pi) \times [0, ۲\pi)$ یعنی $\lambda_۱ = \lambda_۲$ متمرکز می‌شود. اگر $\{X_n\}$ فرآیند همبسته متناوب با تناوب T باشد، پس $Z(\lambda)$ دارای نمو همبسته متناوب است: یعنی برای $k \in \{0, \pm۱, \dots, \pm(T-۱)\}$ داریم $E\left[dZ(\lambda_۱)\overline{dZ(\lambda_۲)}\right] = 0$ مگراین‌که $\lambda_۲ = \lambda_۱ + ۲\pi k/T$.

در این حالت، Γ تکیه‌گاهی روی ۲T-۱ خطوط موازی با قطر اصلی $\lambda_۲ = \lambda_۱ + ۲\pi k/T,\ \ k = 0, \pm۱, \dots, \pm(T-۱)$ در مربع $[0, ۲\pi) \times [0, ۲\pi)$خواهد داشت. به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۱: مجموعه تکیه‌گاه یک دنباله تصادفی همبسته متناوب

۴.۱ فرآیندهای مارکف ساده و چندگانه (مرتبه p)

آنالیز تصادفی هنگامی‌که یک فرآیند تصادفی ویژگی مارکف داشته باشد، رفتار تصادفی آن تا حدود زیادی قابل پیش‌بینی است. ویژگی مارکف، ویژگی مهمی است که رابطه بین مقادیر گذشته و مقادیر آینده یک فرآیند تصادفی را شرح می‌دهد. کلاس فرآیندهای مارکف در بین همه‌ی فرآیندهای تصادفی موقعیت ممتازی به‌دست آورده، و از دیدگاه وابستگی بعد از دنباله‌های متغیرهای مستقل قرار گرفته است.

تعریف۱.۴.۱: یک فرآیند $\{X_t,\ t\epsilon\mathcal{T}\}$ فرآیند مارکف است اگر برای هر مجموعه صعودی $t_۱, t_۲, \dots, t_{\rm n}$ در $\mathcal{T}$:

$$P\left(X_{t_n} < x_n \middle| X_{t_v} = x_v, v = ۱, \dots, n-۱\right) = P\left(X_{t_n} < x_n \middle| X_{t_{n-۱}} = x_{n-۱}\right) \quad (۱.۴.۱)$$

(برای تعریف مشابه ضمیمه الف.۲ را ببینید). اگر t_n را به‌عنوان زمان آینده تفسیر کنیم، پس رابطه فوق نشان می‌دهد که رفتار احتمالی در آینده، به شرط همه‌ی رفتار در حال و گذشته، فقط به زمان حال وابسته است. برابری (۱.۴.۱) ویژگی مارکف نامیده می‌شود.

توجه کنید، می‌توانیم همیشه فرض کنیم که $\{X_t,\ t\epsilon\mathcal{T}\}$ دارای میانگین صفر است، زیرا X_t مارکف است اگر و فقط اگر $X_t - \mu_t$ مارکف باشد.

قدیمی‌ترین و بهترین مثال شناخته شده‌ی یک فرآیند مارکف حرکت براونی است. به‌عنوان مثال فرض کنید یک ذره سنگین در یک مایع از مولکول‌های سبک غوطه‌ور می‌شود، که برخورد مولکول‌ها با این ذره به‌صورت تصادفی باشد. به‌عنوان یک نتیجه، سرعت ذره سنگین به‌صورت نزولی تغییر می‌کند و فرضاً به جهش وابسته نیست. برای آسان کردن بحث، رفتار حرکت را یک بعدی در نظر می‌گیریم. هنگامی‌که سرعت یک مقدار معین V را دارد، به‌طور میانگین برخوردهای بیشتری در جلو نسبت به عقب وجود خواهد داشت. بنابراین احتمال یک تغییر خاص برای ΔV از سرعت در Δt بعدی، وابسته به V است، و به مقدار اولیه سرعت بستگی ندارد. بنابراین سرعت ذره سنگین یک فرآیند مارکف است.

به‌عنوان یک نتیجه کلی می‌توان نشان داد که هر فرآیند که دارای نموهای مستقل باشد خاصیت مارکف را داراست (برای اثبات به بیلینزلی (۱۹۹۵) صفحه ۴۳۶رجوع کنید).

بهترین مثال شناخته شده‌ی یک فرآیند گاوسی، ایستا و مارکف، فرآیند اورنشتاین-اولنبگ[1] می‌باشد که در واقع تنها فرآیند با این سه ویژگی اساسی می‌باشد. به‌طور اساسی به این معنی است که باید تبدیلات خطی از X و t نیز در نظر گرفته‌شود. و تبدیل دیگر اگرچه بدیهی است، فرآیندهای تصادفی محض یا IID است.

حالت کلی‌تر فرآیندهای مارکف، فرآیندهای مارکف چندگانه (p-ple یا مرتبه p) هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

فرآیند $\{X_t,\ t\epsilon\mathcal{T}\}$ یک فرآیند مارکف چندگانه است اگر:

$$P\left(X_{t_n} < x_n \middle| X_{t_v} = x_v, v = ۱, \dots, n-۱\right)$$
$$= P\left(X_{t_n} < x_n \middle| X_{t_{n-۱}} = x_{n-۱}, X_{t_{n-۲}} = x_{n-۲}, \dots, X_{t_{n-p}} = x_{n-p}\right),\ \mathrm{n} > p \quad (۲.۴.۱)$$

حافظه این فرآیند به p واحد زمان در گذشته بستگی دارد. همچنین این فرآیند می‌تواند به‌عنوان یک فرآیند تصادفی برداری مرتبه اول (۱-ple) تفسیر شود. در حالت خاص، فرض کنید $\boldsymbol{Y}_n = (X_n, X_{n-۱}, \dots, X_{n-p+۱})',\quad n\epsilon\mathbb{Z}$ تعریف شود، پس با استفاده از (۲.۴.۱)، $\boldsymbol{Y}_n$ در ویژگی مارکف صدق می‌کند:

$$P(\boldsymbol{Y}_n < \boldsymbol{y}_n | \boldsymbol{Y}_v = \boldsymbol{y}_v, v = ۱, \dots, n-۱) = P(\boldsymbol{Y}_n < \boldsymbol{y}_n | \boldsymbol{Y}_{n-۱} = \boldsymbol{y}_{n-۱}) \qquad (۳.۴.۱)$$

علاوه‌براین، می‌توان نشان داد که (۳.۴.۱) تضمین می‌کند که:

$$P\left(\boldsymbol{Y}_{t_n} < \boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{Y}_{t_v} = \boldsymbol{y}_v, v = ۱, \dots, n-۱\right) = P\left(\boldsymbol{Y}_{t_n} < \boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{Y}_{t_{n-۱}} = \boldsymbol{y}_{n-۱}\right) \quad (۴.۴.۱)$$

برای همه‌ی $t_۱, t_۲, \dots, t_{\mathrm{n}}$ در $\mathcal{T}$، که همتای زمان گسسته (۱.۴.۱) است.

در انتهای این بخش، برخی نکات برجسته از رابطه بین فرآیندهای مارکف و فرآیندهای خودبازگشتی را بررسی می‌کنیم. ابتدا، فرآیند خودبازگشتی مرتبه اول (AR(۱)) را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$X_{\mathrm{t}} = \Phi \mathrm{X}_{\mathrm{t}-۱} + \mathrm{Z}_{\mathrm{t}} \qquad (۵.۴.۱)$$

[1] Ornstein-Uhlenbeck

جایی‌که Φ ثابت است، و $\{Z_t\}$ یک فرآیند تصادفی محض (فرآیند نوفه سفید) باشد، به این معنی که $EZ_t = 0$ و $EZ_t^۲ = \sigma_t^۲$ و $EZ_tZ_s = 0,\ t \neq 0$. در اینجا می‌بینیم که X_t به $X_{t-۱}$ و به خطای تصادفی Z_t وابسته است. در حقیقت (۵.۴.۱) ممکن است اینگونه تفسیر شود که X_t روی $X_{t-۱}$ رگرسیون شده و Z_t نقش عبارت خطا را دارد.

این حقیقت که X_t یک رگرسیون روی گذشته‌ی خودش دارد، توسعه‌ای برای مجموعه اصطلاحات فرآیند خودبازگشتی می‌باشد. به‌هرحال، در این حالت وابستگی X_t روی مقدارهای گذشته، فقط روی یک بازه زمانی گسترش یافته است. در حقیقت اگر فرآیند گاوسی باشد (بنابراین ساختار احتمالی آن کاملاً به‌وسیله‌ی ویژگی‌های مرتبه دوم آن اندازه‌گیری می‌شود)، پس، با داشتن یک دنباله از مقدارهای گذشته $X_{t-۱}, X_{t-۲}, X_{t-۳}, \ldots$، توزیع شرطی X_t فقط به $X_{t-۱}$ وابسته است، به-این‌معنی که:

$$P(X_t|X_{t-۱}, X_{t-۲}, \ldots) = P(X_t|X_{t-۱})$$

این‌جا، وابستگی X_t روی $X_{t-۱}$ خطی است، و با وجود اینکه $\{X_t\}$ ممکن است گاوسی نباشد اما بیشتر اوقات یک فرآیند مارکف خطی نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، می‌توانیم فرآیند مارکف خطی چندگانه را تعریف کنیم.

۵.۱ فرآیندهای نوفه سفید متناوب

نوفه سفید ایستا ساده‌ترین فرآیند ایستاست و به‌عنوان یک بلوک ساختاری برای تولید فرآیندهای ایستای دیگر استفاده می‌شود. نقش یکسانی در حالت متناوب، توسط نوفه سفید متناوب تولید می-شود. فرآیند $\{Z_t\}$ نوفه سفید متناوب $PWN(0, \sigma_t^۲, T)$ است اگر ویژگی‌های زیر را دارا باشد:

i) $EZ_t = 0$ برای هر $t\epsilon\mathbb{Z}$.

ii) واریانس متناوب داشته باشد به این معنی که $\sigma_{t+T}^۲ = \sigma_t^۲$ جایی‌که $EZ_t^۲ = \sigma_t^۲$.

iii) برای $s \neq t$ داشته باشیم $EZ_tZ_s = 0$.

هنگامی‌که $\sigma_t^۲$ ثابت باشد (T=۱)، نوفه سفید متناوب، ایستاست.

۶.۱ مدل‌های خودبازگشتی متناوب

هرگاه مدل PC تشخیص مناسبی برای یک سری زمانی تشخیص داده‌شود، سؤال بعدی این است که برازش دادن چنین مدل‌هایی چگونه است. کلاس مدل خودبازگشتی-میانگین متحرک (ARMA) ایستا را می‌توان برای یک کلاس PC به‌وسیله‌ی پارامترهای مدل با تناوب مختلف توسعه داد. یک کلاس مفید در چنین موقعیت‌هایی، مدل‌های خودبازگشتی متناوب (PAR) است. دو راه برای بررسی این مدل‌ها وجود دارد. اول، می‌توانیم یک مدل خودبازگشتی با پارامترهای وابسته زمان که متناوباً تغییر می‌کند و نوفه سفید متناوب به‌عنوان خطا، را در نظر بگیریم. در این‌حالت جواب‌های PC را جستجو می‌کنیم که در ادبیات این رشته به‌عنوان مدل‌های PAR شناخته شده است (ضمیمه الف.۱.۳ و همچنین کار پاگانو[۱] (۱۹۷۸)، بلوم‌فیلد[۲]، هارد و لاند[۳] (۱۹۹۴) و وکچیا[۴](۱۹۸۵a, ۱۹۸۵b) را ببینید). راه دیگر اندکی مشکل‌تر است. از ابتدا به دنبال یک دنباله PC که خودبازگشتی با پارامترهای وابسته زمان و فرآیندهای نوفه سفید به‌عنوان خطا می‌باشد، هستیم.

فرآیند خودبازگشتی از مرتبه p، $\{X_t\}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad (۱.۶.۱)$$

به‌طوری‌که $\{Z_t\}$ یک نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 > 0$ بوده و ϕ_1 و ... وϕ_p پارامترهای خودبازگشتی می‌باشند.

مدل خودبازگشتی (۱.۶.۱) می‌تواند در آنالیز سری‌های زمانی فصلی استفاده شود (باکس و جنکینز[۵] (۱۹۷۰) را ببینید). در سری زمانی فصلی طول بلندترین تناوب مشخص است. برای مثال، یک سری زمانی اقتصادی شامل داده‌های ماهیانه، انتظار می‌رود که یک رفتار متناوب با تناوب ۱۲ داشته باشد. اگر یک مدل نوع (۱.۶.۱) برای چنین سری‌هایی داشته باشیم، ممکن است فرض شود که بردار ϕ از پارامترهای خودبازگشتی در یک سال ثابت نباشد اما تناوب یکسانی مانند T را منعکس کند. در این حالت $\boldsymbol{\Phi}(t) = (\boldsymbol{\phi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\phi}_p(t))'$ را معرفی می‌کنیم و مدل زیر را در نظر می‌-گیریم:

---

۱ Pagano
۲ Bloomfield
۳ Hurd & Lund
۴ Vecchia
۵ Box & Jenkins

$$X_t = \phi_1(t)X_{t-1} + \cdots + \phi_p(t)X_{t-p} + Z_t \qquad (۲.۶.۱)$$

به‌طوری‌که $Z_t \sim PWN(0,\sigma_t^2,T)$ و $\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t+T)$.

۷.۱ وجود و یکتایی

می‌دانیم که همواره یک جواب ایستا مانند X_t برای مدل ARMA(p,q) که به‌صورت زیر معرفی شده‌است:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \qquad (۱.۷.۱)$$

جایی‌که $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$، وجود دارد (و همچنین یکتاست) اگر و فقط اگر

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

برای همه‌ی $|z| = 1$. فرآیند خطی $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ با $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ جواب ایستای یکتای (۱.۷.۱)است. همچنین ARMA(p,q)، تابع کازال (سببی) از $\{Z_t\}$ (یا مستقل از آینده) است، به این معنی‌که ثابت $\{\psi_j\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$، و

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \qquad \forall t$$

به عبارت دیگر X_t (میانگین وزنی از Z_t ها) یا به‌عبارتی $MA(\infty)$ است، به‌این‌معنی که X_t می‌تواند به‌صورت عبارت‌هایی از مقدارهای گذشته‌ی $\{Z_s,\ s < t\}$ بیان شود. همچنین می‌توان نشان داد که X_t کازال است اگر و فقط اگر $\phi(z) \neq 0$ برای همه‌ی $|z| \leq 1$ (قدرمطلق ریشه‌های چندجمله‌ای خودبازگشتی $\phi(z)$ خارج دایره واحد باشند). با کمک کازال بودن، نتیجه می‌گیریم که برای j مثبت، X_{t-j} ناهمبسته با Z_t است و همچنین $\{X_t\}$ ناهمبسته با $\{Z_s,\ s > t\}$ است، که به ما در کاهش مکان‌ها کمک می‌کند (برای مثال برای نوشتن معادله‌های یول-والکر).

به‌طور مشابه، در مدل‌بندی سری‌های زمانی همبسته متناوب، محدود کردن توجه به فرآیندهایی که $\{X_t\}$ کازال از $\{Z_t\}$ است، مرسوم می‌باشد. به‌این‌معنی که:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(t) Z_{t-j} \qquad (۲.۷.۱)$$

جایی‌که

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\psi_j(t)\right| < \infty$$

برای همه‌ی t ها.

مجموعه این دنباله‌ها $\{\psi_j(t)\}$، فیلتر خطی (با ضرایب متغیر با زمان)نامیده می‌شود و $\{X_t\}$ به‌وسیله فیلتر کردن $\{Z_t\}$ به‌دست می‌آید.

مطلقاً جمع‌پذیر بودن ψ تضمین می‌کند که معادله (۲.۷.۱) در میانگین مربعات وجود دارد، به این معنی که وقتی $n \to \infty$ داریم $E\left(\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t)\, Z_{t-j} - X_t\right)^{۲} \to 0$. به‌طور دقیق‌تر، نتیجه‌ای که در ادامه آمده نشان می‌دهد که در موقعیت‌های خاص فرآیند X_t که از این راه به‌دست می‌آید با هر دو تعریف میانگین مربع و تقریباً مطمئن خوش تعریف است که تعمیم درستی از ارتباط نتایج برای فیلترهای ثابت زمان است که در آنها $\psi_j(t) = \psi_j(s)$ برای همه t، s و j می‌باشد. برای اثبات به (بوشناکف[۱](۱۹۹۴)) رجوع کنید.

نتیجه ۱.۷.۱: فرض کنید $\{X_t\}$ را داریم به‌طوری که $sup_t \mathrm{E}|\mathrm{X_t}| < \infty$ و فرض کنید $\{\psi_j(t)\}$ دنباله‌های مطلقاً جمع‌پذیر باشند. پس:

۱. برای هر t سری $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(t) Z_{t-j}$ مطلقاً همگرا با احتمال یک است.
۲. اگر $sup_t \mathrm{E}|\mathrm{X_t}| < \infty$، پس حد میانگین مربع $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(t) Z_{t-j}$ موجود و یکسان در (۱) است.
۳. $P(A) = 0$ جایی‌که

$$A = \{\omega \epsilon \Omega: \text{همگرای مطلق نباشند } X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(t) Z_{t-j} \text{ حداقل یک } t \text{ وجود دارد به‌طوری‌که سری‌های}\}$$

۴. اگر $sup_t \mathrm{E}|\mathrm{X_t}| < \infty$، و سری $\sum_j \left|\psi_j(t)\right| < \infty$، همگرای یکنواخت باشند پس هر دو حد یکنواخت هستند.

[۱] Boshnakov

همچنین فرض می‌کنیم که ضرایب $\{\psi_j(t)\}$ متناوب در t با تناوب T باشند به این معنی که به ازای هر t داشته باشیم:

$$\{\psi_j(t)\} = \{\psi_j(t+T)\}$$

برای شرایط خاص روی نتیجه پارامترهای مدل در همبسته متناوب و کازال بودن (تیاو و گراپ[۱](۱۹۸۰)) و (بوشناکف (۱۹۹۴)) را ببینید.
با اینکه کازال بودن یک ویژگی فرآیند نیست، منطقی است انتظار داشته باشیم فرض کازال بودن ضروری نباشد. در معنای دیگر کلمه، در این پایان‌نامه فرض شده که $\{X_t\}$ همبسته متناوب کازال یکتاست ولی آن را تحقیق نخواهیم کرد.

۸.۱ مروری بر تحقیقات گذشته

به نظر می‌رسد مفهوم فرآیندهای همبسته متناوب توسط.بنت[۲] (۱۹۵۸) که حضورشان را در یک زمینه نظری ارتباطاتی مشاهده کرد و آن‌را ایستای چرخشی[۳] نامید، شروع شده باشد.گادزنکو[۴] (۱۹۵۹) موضوع تجزیه و تحلیل طیفی غیر پارامتری را برای فرآیندهای همبسته متناوب آغاز کرد. بعد از مدت زمان کوتاهی، گلادیشف (۱۹۶۱) اولین تجزیه و تحلیل‌ها و نمایش‌های طیفی بر اساس ارتباط بین دنباله‌های همبسته متناوب و دنباله‌های ایستای چندمتغیره را منتشر کرد. کارهای گلادیشف شروعی برای یک رشته تحقیق در نظریه فرآیندهای مرتبه دوم بود و از اوایل ۱۹۶۰، یک سری تحقیقات قابل توجه در مدل‌بندی‌های متناوب انجام شد. سپس جونز و برلسفورد[۵] (۱۹۶۷) کلاس مدل‌های خودبازگشتی متناوب (PAR) را معرفی کردند. خصوصیات پایه‌ای این مدل‌ها شامل نظریه مجانبی خودهمبستگی برآوردگرهای پایه‌ای، توسط پاگانو (۱۹۷۸) بنا نهاده‌شده‌اند. او یک رابطه یک‌به‌یک بین خودبازگشتی چندمتغیره و خودبازگشتی متناوب یک متغیره پیدا کرد و یک روش برآورد برای مدل چندمتغیره بر اساس مدل یک متغیره که تعداد پارامترهای کمتری را شامل می‌شود، پیشنهاد نمود.

---
[۱] Tiao & Grupe
[۲] E.R.Bennett
[۳] Cyclostationary
[۴] L.I.Gudzenko
[۵] Jonse & Brelsford