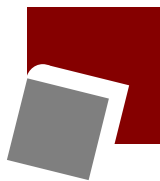


وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ - زنجان



قیمت گذاری و پوشش ریسک اختیارات مالی مبتنی بر شکاف قیمت

پایان نامه کارشناسی ارشد

فاطمه قاسمی

استاد راهنما: دکتر علی فروش باستانی

اسفند ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیمی ناقابل بہ

پدر و مادر عزیزم
و
ہمسفر مہربانم

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف‌اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای او حد و مرزی وجود ندارد و تعریف کاملی نمی‌توان یافت و برای خدا وقتی معین و سرآمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد.

در ابتدا مراتب قدردانی و تشکر خود را از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی فروش باستانی ابراز می‌دارم که در به انجام رساندن این پایان‌نامه مرا یاری داده‌اند. همچنین از اساتید ارجمند در طول این دوره، جناب آقایان دکتر حسن داداشی (مدعو داخلی) و دکتر آرش فهیم کمال تشکر دارم و از آقایان دکتر رشید زارع نهندی (مدعو داخلی) و دکتر کسری علیشاهی (مدعو خارجی) و سرکار خانم دکتر الهام صفائی (نماینده دانشگاه) که نظارت علمی این پایان‌نامه را به عهده داشتند کمال امتنان دارم.

از خانواده خوبم به خصوص پدر و مادر عزیزم که همواره در تمام مراحل تحصیل پشتیبان من بوده‌اند تشکر ویژه دارم و از همسر مهربانم که مشوقم در مراحل تدوین این پایان‌نامه بودند بسیار سپاسگزارم. از دوستان عزیزم که با حمایت‌های بی‌دریغشان در طول دوران تحصیل برای من خاطرات زیبا آفریدند صمیمانه تشکر نموده و برایشان آرزوی سلامتی و پیروزی دارم.

چکیده

در بازارهای مالی، رویداد یا خبر ناگهانی ممکن است باعث کاهش شدید قیمت دارایی شود که به شکاف قیمت معروف است. این شکاف، باعث ایجاد ریسک در سبد سرمایه‌گذاری می‌گردد که آن را ریسک شکاف می‌نامیم. ریسک شکاف اغلب در بیمه سبد با نسبت ثابت مطرح می‌شود. اختیارات مالی مبتنی بر شکاف قیمت که به اختصار به اختیارات شکاف معروفند، رده‌ای از ابزارهای مشتقه پیچیده محسوب می‌شوند که دارنده آن را در برابر حرکت سریع و نزولی بازار، مورد حمایت قرار می‌دهند. در این پایان‌نامه، ابتدا به بررسی قیمت دقیق و تقریبی اختیار شکاف می‌پردازیم. سپس اثرات نرخ بهره تصادفی و نوسانات تصادفی را روی قیمت اختیار شکاف تحلیل می‌کنیم. در پایان، پوشش ریسک اختیارات به روش پوشش ریسک مرتبه دوم را توضیح می‌دهیم و پوشش ریسک اختیار شکاف که به وسیله اختیار فروش اروپایی کوتاه مدت انجام می‌شود را نیز بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ریسک شکاف، اختیار شکاف، مدل لوی نمایی، نوسانات تصادفی، پوشش ریسک مرتبه دوم، بیمه سبد با نسبت ثابت.

فهرست

پنج	چکیده
۱	پیش‌گفتار
۳	۱ مفاهیم اولیه
۳	۱.۱ مارتینگل
۶	۲.۱ فرآیند لوی
۷	۱.۲.۱ ساختار مسیرهای فرآیند لوی
۹	۲.۲.۱ مثال‌هایی از فرآیند لوی
۱۱	۳.۱ اختیار معامله
۱۴	۱.۳.۱ قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ
۱۸	۲ بیمه سبد سرمایه‌گذاری
۱۹	۱.۲ بیمه سبد بر پایه اختیار معامله
۲۰	۲.۲ بیمه سبد با نسبت ثابت
۲۳	۱.۲.۲ بیمه سبد با نسبت ثابت در مدل بلک - شولز
۲۵	۲.۲.۲ قیمت پرش‌ها و ریسک شکاف
۲۶	۳.۲.۲ مدل‌بندی

۲۸	اندازه‌گیری ریسک شکاف استراتژی CPPI	۳.۲
۲۸	احتمال ضرر	۱.۳.۲
۳۰	ضرر مورد انتظار	۲.۳.۲
۳۲	توزیع ضرر	۳.۳.۲
۳۳	قیمت‌گذاری و پوشش ریسک شکاف	۴.۲
۳۷	مثال	۵.۲
۳۸	احتمال ضرر	۱.۵.۲
۳۸	ضرر مورد انتظار	۲.۵.۲
۳۹	توزیع ضرر	۳.۵.۲
۴۰	قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیارات مالی مبتنی بر شکاف قیمت	۳
۴۲	قیمت‌گذاری اختیارات شکاف بر روی یک دارایی	۱.۳
۴۳	ارزیابی عددی قیمت‌ها	۱.۱.۳
۴۵	تقریب فرمول قیمت‌گذاری	۲.۱.۳
۴۷	تحلیل خطا برای تقریب فرمول قیمت‌گذاری	۳.۱.۳
۵۰	اختیار شکاف اصلاح شده	۲.۳
۵۱	نرخ بهره تصادفی	۱.۲.۳
۵۲	ساب‌اردینیشن	۳.۳
۵۴	تغییر زمان	۱.۳.۳
۵۴	مدل قیمت‌گذاری با نوسانات تصادفی	۴.۳
۵۵	فرآیند لوی تغییر زمان یافته	۱.۴.۳
۵۶	نوسانات تصادفی	۵.۳
۵۹	پوشش ریسک	۴

۶۱	پوشش ریسک در بازار کامل	۱.۴
۶۲	پوشش ریسک در بازار ناکامل	۲.۴
۶۴	ابر پوشش ریسک	۱.۲.۴
۶۶	ماکزیمم مطلوبیت	۲.۲.۴
۶۶	پوشش ریسک مرتبه دوم	۳.۲.۴
۷۷	مینیمم‌ساز موضعی ریسک در مقابل سراسری	۴.۲.۴
۸۱	پوشش ریسک با اختیارات مالی	۵.۲.۴
۸۲	پوشش ریسک اختیارات شکاف با اختیار کوتاه مدت اروپایی	۳.۴

آ پیوست ۸۷

۸۷	قیمت‌گذاری اختیار با روش تبدیل فوریه	۱.آ
۸۸	روش کار و مادان	۱.۱.آ
۹۰	رابطه بین توزیع تجمعی و تابع مشخصه دو متغیر تصادفی	۲.آ
۹۲	عبارت نمایی تصادفی در مقابل عبارت نمایی معمولی در فرآیند لوی	۳.آ
۹۳	عبارت نمایی یک فرآیند لوی	۱.۳.آ
۹۴	رابطه بین نمایی معمولی و نمایی تصادفی	۲.۳.آ
۱۰۲	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

پیش‌گفتار

فعالیت اقتصادی معمولاً با ریسک و مخاطره مواجه است. مؤسسه‌ها و شرکت‌های مالی و بانک‌ها در جهت سود بیشتر و ضرر کمتر، سبد سرمایه‌گذاری تشکیل می‌دهند. از جمله اجزا جدانشدنی این سبدها دارایی‌های ریسکی هستند. در نتیجه همین ساختار موجب به وجود آمدن ریسک‌هایی برای مؤسسه‌های سرمایه‌گذاری می‌شود. عدم اطمینان نسبت به آینده و وضعیت قیمت‌ها و نوسان آن‌ها باعث شده که فعالان اقتصادی به دنبال یافتن راه‌های متعدد مدیریت ریسک و کاهش یا کنترل ریسک باشند. ابزارهای مشتقه از مهمترین اهرم‌های مالی هستند که برای مدیریت ریسک بکار می‌روند. اختیارات از جمله مهمترین ابزارهای مشتقه هستند که دو نوع معروف و استاندارد آن‌ها، اختیارات آمریکایی و اروپایی می‌باشند. اما با توجه به پیشرفت بازارهای مالی، نیاز به انواع جدیدی از اختیارات مالی حس می‌شود. نمونه‌ای از این نوع اختیارات، اختیارات مالی مبتنی بر شکاف قیمت هستند که به اختصار به اختیارات شکاف معروفند، که هدف آن‌ها این است که دارنده اختیارات را در برابر حرکت سریع و نزولی بازار سرمایه، مورد حمایت قرار دهند. در نتیجه می‌توان گفت که اختیارات شکاف به منظور کاهش ریسک پرش‌های منفی و بزرگ قیمت دارایی پایه طراحی شده‌اند. واضح است این اختیارات در مدل‌های با مسیر پیوسته نمی‌توانند مدل‌بندی شوند. لذا از مدل‌های ناپیوسته برای قیمت‌گذاری آن‌ها استفاده می‌کنیم.

در این پایان‌نامه، در فصل اول به مفاهیم پایه‌ای از جمله فرآیند تصادفی، فرآیند لوی و قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ می‌پردازیم. یکی از تکنیک‌های مدیریت سبد سرمایه‌گذاری، بیمه سبد با نسبت ثابت است که ریسک مربوط به آن را می‌توان با اختیارات شکاف کاهش داد، که در فصل دوم این تکنیک را توضیح می‌دهیم. در فصل سوم به قیمت‌گذاری اختیارات شکاف می‌پردازیم و اثرات نرخ بهره تصادفی و نوسانات تصادفی را روی قیمت آن‌ها بررسی می‌کنیم. فصل چهارم مربوط به پوشش ریسک بازارهای

ناکامل است که در بخش آخر آن نیز پوشش ریسک اختیارات شکاف توضیح داده می‌شود. در پایان در فصل پیوست آ، لم‌ها و گزاره‌های مهمی که مکرراً در فصول این پایان‌نامه استفاده می‌شوند، قرار داده شده است.

لازم به ذکر است که مقاله‌های [۱] و [۲] جز مراجع اصلی این پایان‌نامه محسوب می‌شوند.

فصل اول

مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی برخی از مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. این فصل شامل سه قسمت است که بخش اول به مفاهیم اولیه فرآیند تصادفی، بخش دوم به فرآیند لوی و بخش سوم به معرفی اوراق مشتقه و قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ اختصاص دارد.

۱.۱ مارتینگل

تعریف ۱.۱.۱. سیگما - میدان^۱

فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی باشد. یک σ - میدان \mathcal{F} روی Ω ، خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Ω است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$۱. \emptyset \in \mathcal{F}$$

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه متمم آن، مجموعه $\Omega \setminus A$ متعلق به \mathcal{F} است،

^۱ σ - Field

۳. اگر A_1, A_2, \dots دنباله‌ای از مجموعه‌ها در \mathcal{F} باشند آنگاه $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ نیز متعلق به \mathcal{F} است.

تعریف ۱.۲.۱. اندازه احتمال

فرض کنید \mathcal{F} ، یک σ - میدان روی Ω باشد. اندازه احتمال P ، تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

به طوریکه

$$P(\Omega) = 1 \text{ و } P(\emptyset) = 0. \quad ۱.$$

۲. اگر A_1, A_2, \dots مجموعه‌های دو به دو مجزای متعلق به \mathcal{F} باشند آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

سه‌تایی (Ω, \mathcal{F}, P) فضای احتمال^۱ نامیده می‌شود. مجموعه‌های متعلق به \mathcal{F} را پیشامد می‌گویند.

پیشامد A را تقریباً حتمی^۲ گوئیم هرگاه $P(A) = 1$.

تعریف ۱.۳.۱. متغیر تصادفی $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر مربعی است هرگاه $\int_{\Omega} |X|^2 dP < \infty$.

خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر مربعی را با $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یا به طور ساده‌تر با L^2 نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱. فیلتر (پالایه)^۳

یک فیلتر پیوسته روی (Ω, \mathcal{F}) ، مجموعه‌ای از σ - میدان‌های \mathcal{F}_t است که برای هر $t < s$ داریم:

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$$

مجموعه Ω ، مجموعه همه نتایج ممکن آزمایش است، در حالیکه σ - میدان \mathcal{F} ، مجموعه همه پیشامدهای

^۱ Probability Space

^۲ Almost Sure، به اختصار a.s.

^۳ Filtration

مشاهده شده در اجرای آزمایش می‌باشد. به عبارت دیگر \mathcal{F} اطلاعات به دست آمده در انجام آزمایش است.

تعریف ۱.۵.۱. تابع $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ -اندازه‌پذیر است اگر برای هر زیر مجموعه برل^۱ $B \in \beta(\mathbb{R})$ ، $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

تعریف ۱.۶.۱. **مارتینگل**^۲

فرض کنید X_t یک متغیر تصادفی روی (Ω, \mathcal{F}, P) با در نظر گرفتن فیلتر \mathcal{F}_t باشد. آنگاه X_t مارتینگل است اگر

$$1. \quad E[|X_t|] < \infty \text{ یعنی } X_t \text{ انتگرال‌پذیر باشد}$$

$$2. \quad X_t, \mathcal{F}_t \text{ -اندازه‌پذیر باشد.}$$

$$3. \quad E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ برای هر } s \leq t$$

تعریف ۱.۷.۱. **مارتینگل موضعی**^۳

فرآیند سازگار X_t یک مارتینگل موضعی است هرگاه دنباله صعودی از زمان‌های توقف τ_n وجود داشته باشد که تقریباً حتمی $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ ، به طوریکه $X_{t \wedge \tau_n} |_{\tau_n > 0}$ برای هر n ، به طور یکنواخت انتگرال‌پذیر باشد.

هر مارتینگل، یک مارتینگل موضعی است اما مارتینگل‌های موضعی وجود دارند که مارتینگل نیستند.

تعریف ۱.۸.۱. **نیم مارتینگل**^۴

فرآیند X_t را نیم مارتینگل گویند هرگاه بتوان آن را به صورت مجموع دو فرآیند M_t و A_t نوشت به

^۱ Borel Set

^۲ Martingale

^۳ Local Martingale

^۴ Semi-Martingale

طوریکه

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M_0 = A_0 = 0,$$

که در آن M_t یک مارتینگل موضعی و A_t یک فرآیند با تغییر متناهی است.

تعریف ۱.۹.۱. فرمول ایتو^۱

فرض کنید $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ و $F(t, X_t)$ تابع حقیقی مقدار با مشتقات جزئی پیوسته $F'_t(t, x)$ ، $F'_x(t, x)$ و $F''_{xx}(t, x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $t \geq 0$ باشد. آنگاه $F(t, X_t)$ یک فرآیند ایتو است و در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dF(t, X_t) = \left(F'_t(t, X_t) + F'_x(t, X_t)a(t) + \frac{1}{2} F''_{xx}(t, X_t)b^2(t) \right) dt + F'_x(t, X_t)b(t)dW_t$$

صدق می کند.

۲.۱ فرآیند لوی

تعریف ۲.۱.۱. فرآیند لوی

یک فرآیند تصادفی کادلگ^۲ حقیقی مقدار X_t در \mathbb{R}^d ، روی فضای احتمالاتی (Ω, \mathcal{F}, P) با $X_0 = 0$ ، یک فرآیند لوی^۳ است اگر در ویژگی های زیر صدق کند:

۱. X_t دارای نمو های مستقل است یعنی برای هر دنباله صعودی از زمان های t_0, \dots, t_n ، متغیرهای

تصادفی $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ مستقل باشند.

۲. نمو های X_t مانا هستند یعنی توزیع $X_{t+h} - X_t$ وابسته به t نیست.

^۱ Itô - Formula

^۲ Cadlag یعنی از راست پیوسته و دارای حد چپ.

^۳ Lévy Process

۳. به طور تصادفی پیوسته باشد یعنی:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0.$$

حرکت براونی و فرآیند پواسن نمونه‌هایی از فرآیند لوی هستند.

تعریف ۲.۲.۱. فرآیند پواسن^۱

فرض کنید $(\tau_i)_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر λ باشند و $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. آنگاه فرآیند

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{t \geq T_n},$$

یک فرآیند پواسن با پارامتر λ نامیده می‌شود.

۱.۲.۱ ساختار مسیرهای فرآیند لوی

تعریف ۲.۳.۱. اندازه رادون^۲

فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^d$. اندازه رادون روی (E, β) اندازه μ است، به طوری که برای هر مجموعه اندازه‌پذیر فشرده $B \in \beta$ ، داشته باشیم $\mu(B) < \infty$.

تعریف ۲.۴.۱. اندازه تصادفی پواسن^۳

فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) یک فضای احتمال، $E \subset \mathbb{R}^d$ و μ اندازه رادون مثبت روی (E, ε) باشد. یک اندازه تصادفی پواسن روی E با اندازه شدت^۴ μ ، اندازه تصادفی صحیح-مقداری چون

$$M : \Omega \times \varepsilon \rightarrow \mathbb{N}$$

^۱ Poisson Process

^۲ Radon Measure

^۳ Poisson Random Measure

^۴ Intensity

است به طوریکه

۱. برای (تقریباً هر) $\omega \in \Omega$ ، $M(\omega, \cdot)$ یک اندازه رادون صحیح مقدار روی E است. یعنی برای

هر $A \subset E$ اندازه‌پذیر کراندار، $M(A) < \infty$ یک متغیر تصادفی صحیح مقدار است.

۲. برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \subset E$ ، $M(\cdot, A) = M(A)$ ، یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\mu(A)$ است.

۳. برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزای $A_1, \dots, A_n \in \varepsilon$ ، متغیرهای تصادفی $M(A_1), \dots, M(A_n)$ مستقل هستند.

تعریف ۲.۵.۱. اندازه پرش^۱

فرض کنید X_t یک فرآیند کادلگ روی \mathbb{R}^d باشد. اندازه پرش X_t به عنوان یک اندازه رادون روی $\mathcal{B}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_X(A) = \# \left[t : \Delta X_t \neq 0, (t, \Delta X_t) \in A \right].$$

اندازه پرش یک مجموعه به شکل $[s, t] \times A$ ، تعداد پرش‌های X_t را بین زمان‌های s و t که طول آن‌ها متعلق به A باشد را می‌شمارد.

تعریف ۲.۶.۱. اندازه لوی^۲

فرض کنید X_t یک فرآیند لوی روی \mathbb{R}^d باشد. در این صورت اندازه لوی ν به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nu(A) = E \left[\# \{ t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A \} \right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

به عبارت دیگر اندازه لوی، میانگین تعداد پرش‌هایی با طول متعلق به A در هر واحد زمانی است.

قضیه ۲.۷.۱. تجزیه لوی - ایتو^۳

^۱ Jump Measure

^۲ Lévy Measure

^۳ Lévy-Itô Decomposition

فرض کنید X_t یک فرآیند لوی روی \mathbb{R}^d با اندازه لوی ν باشد. در این صورت:

۱. اندازه پرش J_X ، یک اندازه تصادفی پواسن روی $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ با شدت $dt \times \nu(dx)$ است.

۲. اندازه لوی در رابطه $\int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ صدق می‌کند.

۳. بردار $\gamma \in \mathbb{R}^d$ و حرکت براونی d بعدی با ماتریس واریانس - کواریانس A وجود دارد به طوریکه:

$$X_t = \gamma t + B_t + N_t + M_t,$$

که در آن

$$N_t = \int_{|x| > 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx)$$

و

$$M_t = \int_{0 \leq |x| \leq 1, s \in [0, t]} x \left\{ J_X(ds \times dx) - \nu(dx) ds \right\} = \int_{0 \leq |x| \leq 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx).$$

سه‌تایی $^1 (A, \nu, \gamma)$ ، مشخصه فرآیند لوی نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۸.۱. نمایش لوی - خینچین^۲

فرض کنید X_t یک فرآیند لوی با مشخصه سه‌تایی (A, ν, γ) باشد. در این صورت تابع مشخصه آن

دارای نمایش زیر است:

$$E[e^{iuX_t}] = \exp \left\{ t \left(i\gamma u - \frac{Au^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \right) \right\}.$$

۲.۲.۱ مثال‌هایی از فرآیند لوی

فرآیند لوی از نوع پخش - پرش، به شکل زیر است:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

^۱ Triple

^۲ Lévy-Khintchine Representation

که در رابطه فوق N_t یک فرآیند پواسن است که تعداد پرش‌های X_t را می‌شمارد و Y_i طول پرش‌ها است. یک نمونه از این مدل، مدل مرتون^۱ [۳] است که در آن دارای توزیع نرمال $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$ می‌باشد. نمونه دیگر از مدل پخش - پرش، مدل کو^۲ [۴] است که در زیر توضیح می‌دهیم.

فرض کنید دینامیک قیمت به صورت زیر باشد:

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1)\right), \quad (1.1)$$

که در آن W_t یک حرکت براونی، N_t یک فرآیند پواسن با شدت λ و V_i دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع و نامنفی باشند که $Y = \log(V)$ دارای توزیع دوگانه نمایی^۳ متقارن با چگالی به شکل

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbb{1}_{y \geq 0} + q\eta_2 e^{-\eta_2 y} \mathbb{1}_{y < 0}, \quad \eta_1 > 1, \eta_2 > 0$$

است که در آن $p, q > 0$ ($p + q = 1$)، به ترتیب احتمال‌های پرش رو به بالا و رو به پایین را نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$\log(V) = Y \triangleq \begin{cases} \xi^+ & \text{با احتمال } p \\ \xi^- & \text{با احتمال } q \end{cases}$$

که در آن ξ^+ و ξ^- متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\eta_1}$ و $\frac{1}{\eta_2}$ هستند. علامت \triangleq به این معنی است که دو متغیر تصادفی در توزیع با هم برابر هستند.

با حل معادله دیفرانسیل (۱.۱)، دینامیک دارایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} + \prod_{i=1}^{N_t} V_i.$$

^۱ Merton Model

^۲ Kou's Model

^۳ Double Exponential Distribution

یکی از ساده‌ترین نمونه از یک فرآیند لوی که در آن شدت پرش‌ها نامتناهی باشد، فرآیند گاما با

نمونه‌های مستقل و مانا است که چگالی احتمال آن برابر است با

$$p_t(x) = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x}.$$

فرآیند گاما یک فرآیند لوی با تابع مشخصه $E[e^{iuX_t}] = (1 - iu/\lambda)^{-ct}$ و با اندازه لوی

$$\nu(x) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x} \mathbb{1}_{x>0}.$$

است. با استفاده از فرآیند گاما، یک مدل مشهور دارای پرش یعنی فرآیند واریانس گاما را می‌توان ساخت. برای این کار از تغییر مقیاس زمانی حرکت براونی با رانش که در فصل سوم توضیح می‌دهیم، استفاده می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$Y_t = \mu X_t + \sigma B_{X_t},$$

که در آن X_t یک فرآیند گاما و B یک فرآیند وینر است.

فرآیند واریانس گاما مثال دیگری از فرآیندهای لوی با شدت نامتناهی است که اندازه لوی و تابع مشخصه آن با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\nu(x) = \frac{1}{k|x|} e^{Ax - B|x|},$$

که در آن $A = \frac{\theta}{\sigma^2}$ و $B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/k}}{\sigma^2}$ و

$$E[e^{iuY_t}] = \left(1 + \frac{k\sigma^2 u^2}{2} - i\theta k u\right)^{-kt}.$$

۳.۱ اختیار معامله

فعالیت اقتصادی معمولاً با ریسک و مخاطره مواجه است. هر چه انتظار سود و بازده بیشتری داشته باشیم، باید پذیرای ریسک بالاتری نیز باشیم. عدم اطمینان نسبت به آینده و وضعیت قیمت‌ها و نوسان آن باعث شده که فعالان اقتصادی به دنبال یافتن راه‌های متعدد مدیریت ریسک و کاهش یا کنترل ریسک باشند. با گسترش بازارها از بازار کالا به بازار اوراق بهادار و سهام، مدیریت ریسک اهمیت

بیشتری پیدا کرده است. سلف^۱ از اولین شیوه های کنترل ریسک و عدم اطمینان بود. مشکلات و محدودیت های آن باعث ظهور بازار معاملات قرارداد آتی^۲ گشت، ولی نوع اخیر نتوانست تمامی ریسک و عدم اطمینان را از بین ببرد. اختیار^۳ معامله از جمله شیوه های مدیریت ریسک و کنترل آن است و توانسته است مشکلات بسیاری را در بازارهای مالی مرتفع سازد. تمامی این اوراق تحت عنوان اوراق مشتقه قرار می گیرند. عنوان مذکور به مجموعه ای از ابزارهای قابل معامله در بورس یا خارج از آن دلالت دارد که مرتبط با معامله اوراق بهادار، ارز، نرخ بهره، کالا و مانند این ها است و ارزش آنها از قیمت دارایی پایه مشتق می شود. تغییرات قیمت هر یک از مشتقات، تابعی از تغییرات قیمت دارایی پایه آنهاست. مثلاً تغییر قیمت در قرارداد آتی نفت خام تابع تغییر قیمت نفت خام است. گسترش بازارهای مالی به گسترش حضور اوراق مشتقه وابسته است. در این قسمت هریک از قراردادهای ذکر شده در بالا و قرارداد تاخت^۴ را توضیح می دهیم.

قرارداد سلف: توافقی است بین دو طرف که خارج از بورس منعقد می شود و به منظور خرید یا فروش یک دارایی در تاریخ آینده، با قیمت مورد توافق دو طرف که هنگام امضاء قرارداد تعیین می گردد.

قرارداد آتی: توافقی است بین دو طرف که در بورس منعقد می شود و به منظور خرید یا فروش مقداری معین و با کیفیتی مشخص از یک دارایی در زمان مشخصی در آینده، با قیمت مورد توافق دو طرف که هنگام امضاء قرارداد تعیین می گردد. همچنین برای جلوگیری از امتناع طرفین از انجام قرارداد، طرفین طی شرط ضمن عقد متعهد می شوند، مبلغی را به عنوان وجه تضمین نزد اتاق پایاپای بگذارند و متعهد می شوند متناسب با تغییرات قیمت آتی، وجه تضمین را تعدیل کنند و اتاق پایاپای از طرف آنان وکالت دارد متناسب با تغییرات قیمت، بخشی از وجه تضمین هر یک از طرفین را به عنوان اباحه تصرف، در اختیار دیگری قرار دهد و او حق استفاده از آن را خواهد داشت تا در سررسید با هم تسویه کنند.

^۱ Forward

^۲ Futuer

^۳ Option

^۴ Swap