دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در فیزیک پلاسما

عنوان:

بررسی اثرات حرارتی در برانگیختگی امواج عادی و غیر عادی در برهمکنش باریکه الکترونی و پلاسمای مغناطیده

استاد راهنما:

دکتر سید محمد خراشادی زاده

تحقیق و نگارش:

سارا نوربخش رستمی

مرداد ۱۳۸۸

چکیده:

در این پایان‌نامه با مروری بر مبانی عمومی امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های بیم الکترونی- پلاسما، معادله‌ی پاشندگی سیستم بیم الکترونی چرخنده وپلاسمای مغناطیده گرم به دست آورده شده و از آنالیز معادله‌ی پاشندگی، طیف فرکانسی، آهنگ رشد ناپایداری‌ها استخراج شده است و با استفاده از آنها ناپایداری برانگیختن امواج عادی و غیرعادی در سیستم پلاسمای گرم مغناطیده- بیم الکترونی چرخشی، در دو حالت $\delta \ll \nu$ و $\delta \gg \nu$ مورد تحقیق قرار گرفته است و نتایج زیر حاصل شده است:

۱- افزایش سرعت حرارتی در هر دو حالت عادی و غیرعادی باعث کاهش فرکانس امواج می‌شود.
۲- در حالت $\delta \ll \nu$، به علت زیاد بودن پارامتر اتلاف، اثرات حرارتی مشاهده نمی‌شود.
۳- در حالت $\delta \gg \nu$، افزایش سرعت حرارتی در حالت عادی باعث کاهش نرخ رشد ناپایداری و در حالت غیرعادی باعث افزایش نرخ رشد ناپایداری می‌شود.

همچنین مشاهده کردیم که افزایش سرعت طولی و عرضی بیم و چگالی بیم باعث افزایش نرخ رشد ناپایداری و افزایش پارامتر اتلاف باعث کاهش نرخ رشد ناپایداری می‌شود.

کلمات کلیدی: اثرات حرارتی- موج عادی- موج غیرعادی- بیم الکترونی- پلاسمای مغناطیده

مقدمه:

امروزه سیستم های باریکه- پلاسما یا باریکه- باریکه الکترونی به شدت حالت توجه فیزیکدانان اتمی مولکولی و پلاسما قرار گرفته است؛ زیرا انرژی آزاد نسبی بین دو نوع ذرات می تواند سبب ایجاد ناپایداری های پارامتریک مختلفی در محیطهای پلاسما گردد. در نتیجه این سیستم ها موضوعی اساسی در فیزیک اتمی و پلاسما به حساب می آیند. به عبارت دیگر، وقتی یک باریکه الکترونی با انواع مختلف پلاسما یا با باریکه الکترونی دیگری برهم کنش می کند فرایندهای اساسی زیادی (از قبیل برانگیختن و تقویت امواج الکترومغناطیسی، شتاب د ادن ذرات و...) در این برهم‌کنش روی می دهد که این فرایندها نتیجه ناپایداری‌های پارامتریک مختلف ایجاد شده در سیستم های حالت نظر می باشند.

اثرات برهم کنش و ناپایداری های فوق می تواند باعث فعالیت های زیادی برای کاربرد وسیع و مشهور آنها در انواع پلاسماهای آزمایشگاهی، مگنتوسفری و آستروفیزیکی (اختر فیزیکی) تولید موج، برهمکنش‌های لیزر- پلاسما، شتاب دادن ذرات و گرم کردن پلاسما شوند.

با استفاده از مبانی عمومی نظریه‌ی امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های پلاسما و باریکه- پلاسما و جواب معادله‌ی جنبشی و تانسور گذردهی دی الکتریک برای محیط‌های پلاسمای مختلف (همگن، سرد، برخوردی و غیر برخوردی، مغناطیده و نیمه کران دار، مستقیم و چرخشی و ...)، معادله ی پاشندگی حاکم بر سیستم حالتنظر استخراج شده و سپس با بررسی معادله‌ی پاشندگی به دست آمده، طیف فرکانسی، آهنگ رشد، آستانه‌ی لازم برای توسعه‌ی ناپایداری سیستم به دست آورده شده است. علاوه بر آن نتایج و بحث لازم در هر فصل ذکر گردیده است.

فصل اول، تحت عنوان" مبانی عمومی نظریه‌ی امواج الکترومغناطیسی در محیط های پلاسما و باریکه- پلاسما" می باشد. که در آن معادله‌ی پاشندگی عمومی و تانسور گذردهی دی الکتریک برای انواع مختلف پلاسما: (همگن، سرد، برخوردی و غیربرخوردی، مغناطیده، باریکه الکترونی مستقیم و چرخشی) و انواع ناپایداری حالت مطالعه قرار گرفته است.

در فصل دوم به توصیف برهمکنش باریکه الکترونی مستقیم – پلاسمای سرد در دو حالت مغناطیده و غیرمغناطیده و برانگیختگی امواج در این سیستم پرداخته‌ایم. در فصل سوم برانگیختن امواج عادی و غیرعادی در سیستم باریکه الکترونی چرخشی- پلاسمای مغناطیده‌ی سرد، مطرح شده است.

در فصل چهارم بررسی اثرات حرارتی در برانگیختن امواج عادی و غیرعادی در سیستم باریکه الکترونی چرخشی- پلاسمای مغناطیده‌ی گرم، مطرح شده است. و در فصل پنجم به تجزیه و تحلیل نتایج پرداخته ایم.

فصل اول :

مبانی عمومی نظریه‌ی امواج الکترو مغناطیسی در محیط های پلاسما و باریکه- پلاسما

مقدمه :

در این فصل، با به دست آوردن معادله پاشندگی عمومی، به بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های پلاسمایی مختلف می‌پردازیم. سپس با بررسی الکترودینامیک محیط‌های پلاسمایی مختلف ، تانسور گذردهی دی‌الکتریک را برای انواع مختلف پلاسما:(همگن، سرد، برخوردی و غیربرخوردی، مغناطیده، باریکه الکترونی مستقیم و چرخشی) به دست می‌آوریم و در آخر به توصیف انواع ناپایداری‌ها می پردازیم.

۱-۱ معادله پاشندگی عمومی امواج الکترومغناطیسی در پلاسمای همگن

معادلات ماکسول توصیف کننده‌ی میدان الکترومغناطیسی در پلاسما به صورت زیر می‌باشد [۱-۲]:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{J}_0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \qquad (۱-۱)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0$$

که در آن $\vec{J}_0$ چگالی جریان خارجی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی، $\vec{E}$ میدان الکتریکی، $\vec{D}$ بردار جابجایی الکتریکی است. در الکترودینامیک خطی $\vec{J}_0$ و $\vec{D}$ با $\vec{E}$ میدان الکتریکی در محیط با معادلات مادی زیر مرتبط می باشند [۱]:

$$J_i(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r'\sigma_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})E_j(t',\vec{r}') \qquad (۲-۱)$$

$$D_i(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r'\varepsilon_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})E_j(t',\vec{r}')$$

اندیس‌های i و j معرف فضای سه بعدی می باشند.

این معادلات، معادلات مادی در الکترودینامیک خطی نام دارند که وابستگی جریان ها و بارهای القایی در محیط را در یک لحظه t و مکان $\vec{r}$ به مقادیر میدان‌های زمان های قبل در هر نقطه از محیط را بیان می کنند. توابع $\sigma_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})$ و $\varepsilon_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})$ توابع پاسخ محیط نامیده می شوند[۱].

تعبیر فیزیکی (۱-۲) به این ترتیب است که با صرف اطلاعات از وضعیت میدان الکتریکی در زمان t و مکان $\vec{r}$، تعیین مولفه های بردار جابجایی الکتریک $\vec{D}$ و چگالی جریان $\vec{J}$ در هر زمان و در هر مکان امکان پذیر نیست و تاریخچه‌ی زمان – مکانی میدان های الکتریکی سیستم در رسیدن به مقادیر کمیت فیزیکی در زمان t و مکان $\vec{r}$، نیز موثر می باشد. برای یک محیط همگن بستگی $\sigma_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})$ و $\varepsilon_{ij}(t,t',\vec{r}',\vec{r})$ به $\vec{r}'$ و $\vec{r}$ فقط به صورت $|t-t'|$ در معادله‌ی (۱-۲) ظاهر می گردد. اثر پذیری‌های سیستم به مکان‌های مختلف را پاشندگی فضایی و اثرپذیری سیستم به زمان های قبل را پاشندگی زمانی در سیستم می شناسیم[۱]:

در الکترو دینامیک خلاء مشخص شده است که در غیاب چشمه های خارجی امواج هارمونیکی تخت تک فرکانسی $\exp(-i\omega t + i\vec{k}.\vec{r})$ می توانند وجود داشته باشند. فرکانس ω و بردار موج $\vec{k}$ در خلاء مقادیر حقیقی دارند و با رابطه ی زیر با یکدیگر مربوط اند[۲-۱]:

$$\omega = kc \tag{۳-۱}$$

معادله‌ی ارتباط دهنده ی بین فرکانس با بردار موج را معادله‌ی پاشندگی می نامند. معادله‌ی $\omega = kc$ مثالی معتبر برای امواج الکترومغناطیسی در خلاء می باشد.

با کاربرد بسط فوریه $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\omega,\vec{k})\exp(-i\omega t + i\vec{k}.\vec{r})$ رابطه‌ی بین دامنه‌های $J_i(\omega,\vec{k})$ و $D_i(\omega,\vec{k})$ با $E_j(\omega,\vec{k})$ به صورت زیر بیان می شود [۲-۱]:

$$J_i(\omega,\vec{k}) = \sigma_{ij}(\omega,\vec{k})E_j(\omega,\vec{k}), \tag{۴-۱}$$

$$D_i(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})E_j(\omega,\vec{k}),$$

در رابطه‌ی (۱-۴)، کمیت $\sigma_{ij}(\omega,\vec{k})$ تانسور رسانایی مختلط محیط و کمیت $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ تانسور دی الکتریک مختلط نامیده می شوند و طبق فرمول زیر به یکدیگر ارتباط دارند[۲-۱]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\vec{k}) \tag{۵-۱}$$

اگر محیط غیر جاذب باشد، فرکانس ω و بردار موج $\vec{k}$ کمیت های حقیقی هستند. در این حالت تانسور گذردهی دی الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ هرمیتی است.

در محیط های جاذب تانسور دی الکتریک غیرهرمیتی است. با بررسی جواب های غیربدیهی معادلات میدان(۱-۱) هنگامی که چشمه های خارجی حضور ندارند و با فرض بستگی میدان به زمان و مکان به

صورت موج های هارمونیک تخت تک فرکانسی $\exp(-i\omega t + i\vec{k}.\vec{r})$، می توانیم معادلات (۱-۱) را به صورت زیر بنویسیم [۲-۱]:

$$(\vec{k}\times\vec{B})_i = \frac{\omega}{c}\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})E_j$$

$$(\vec{k}\cdot\vec{B}) = 0 \qquad (۱-۶)$$

$$(\vec{k}\times\vec{E}) = -\frac{\omega}{c}\vec{B}$$

$$k_i\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})E_j = 0.$$

با حذف $\vec{B}$ یک دستگاه سه معادله ای همگن برای مؤلفه‌های میدان الکتریکی به سادگی به صورت زیر بیان می شود[۲-۱]:

$$\left(k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})\right)E_j = 0\,. \qquad (۱-۷)$$

جواب‌های غیر بدیهی این دستگاه معادلات (۱-۷) هنگامی وجود دارد که معادله‌ی زیر برقرار باشد[۲-۱]:

$$\Lambda(\omega,\vec{k}) = \left|k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})\right| = 0 \qquad .(۱-۸)$$

معادله‌ی (۱-۸) دترمینان تانسور (۱-۷) می باشد. معادله ی (۱-۸) معادله ی پاشندگی نام دارد که ارتباط بین، فرکانس ω و بردار موج $\vec{k}$ را بیان می کنند.

$\omega_n(k)$ ریشه‌های معادله‌ی پاشندگی(۱-۸) می باشد که در نتیجه‌ی آن، وابستگی میدان الکتریکی به زمان به صورت زیر در می آید:

$$\vec{E}(\omega,\vec{k}) \propto \sum_n c_n \exp[-i\omega_n(k)t], \qquad (۱-۹)$$

یعنی میدان برهم نهی امواج تخت با فرکانس‌های تعریف شده به وسیله ی معادله‌ی (۱-۸) می‌باشد. به طور کلی$\omega_n(k)$ ریشه های معادله‌ی پاشندگی مختلط هستند. علامت جزء مرهومی نشان می دهد که دامنه‌ی نوسانات مربوط به فرکانس‌های $\mathrm{Re}\omega_n(k)$ با زمان، کاهش یا افزایش می یابند. هنگامی که سیستم پایدار است همه‌ی قسمت‌های موهومی $\mathrm{Im}\{\omega_n(k)\}$ منفی هستند، در نتیجه همه جملات معادله‌ی (۱-۹) با زمان کاهش می یابند. کمیت $\delta_n = \mathrm{Im}|\{\omega_n(k)\}|$ کاهندگی میرایی (نرخ میرایش) اختلالات هارمونیک تک فرکانس مربوطه نامیده می شود[۲]:

اگر در میان ریشه های معادله پاشندگی ریشه ای که با $\mathrm{Im}\{\omega_n(k)\} = 0$ وجود داشته باشد، جمله ی مربوط به آن در معادله‌ی (۱-۹) نوسانات طبیعی محیط را توصیف می کند. اگر ریشه $\mathrm{Im}\{\omega_n(k)\} > 0$ وجود داشته باشد، مد مربوط به آن با زمان افزایش خواهد یافت. در این حالت محیط ناپایدار است. البته باید توجه داشته باشیم که وجود ریشه هایی با جزء موهومی مثبت یک شرط کافی برای ناپایداری می باشد در نتیجه به طور مختصر میرایی یا رشد موج در محیط‌های جاذب (تقویت کننده)به صورت زیر است:

در محیط‌های جاذب ضعیف جزءپاد هرمیتی تانسور گذردهی دی الکتریک در مقایسه با جزء هرمیتی کوچک است، در نتیجه در معادله‌ی (۱-۸) جزء موهومی در مقابل جزء حقیقی بسیار کوچک می باشد. [۱-۲]:

$$\mathrm{Im}\{\Lambda(\omega,\vec{k})\} \ll \mathrm{Re}\{\Lambda(\omega,\vec{k}).\qquad (۱۰-۱)$$

برای بررسی کردن رفتار میدان موج نسبت به زمان، می توانیم جواب‌های تقریبی معادله ی (۱-۸) را به صورت زیر در نظر بگیریم: [۲-۱]:

$$\omega \to \omega(\vec{k}) + i\delta(\vec{k}),\qquad (۱۱-۱)$$

در رابطه ی (۱-۱۱) $\omega(\vec{k})$ ریشه های حقیقی معادله ی (۱-۸) است.[۳۴-۳۳]:

$$\mathrm{Re}\{\Lambda(\omega,\vec{k})\} = 0\qquad (۱۲-۱)$$

$$\Lambda(\omega,\vec{k})=R_e\Lambda(\omega,\vec{k}) + i\,\mathrm{Im}\Lambda(\omega,\vec{k})\qquad (۱۳-۱)$$

طبق رابطه‌ی (۱-۸) $\Lambda(\omega,\vec{k})= 0$ می باشد لذا داریم:

$$R_e\Lambda(\omega_n + i\delta) + i\mathrm{Im}\Lambda(\omega_n + i\delta)=0\qquad (۱۴-۱)$$

قسمت حقیقی و قسمت موهومی $\Lambda(\omega,\vec{k})$ را بر حسب ω بسط می دهیم :

$$\mathrm{Re}\Lambda(\omega,\vec{k})+i\delta\,\frac{\partial \mathrm{Re}\Lambda(\omega,\vec{k})}{\partial\omega} + i\mathrm{Im}\Lambda(\omega,\vec{k})+i\delta\frac{\partial \mathrm{Im}\Lambda(\omega,\vec{k})}{\partial\omega}=0\qquad (۱۵-۱)$$

جمله اول در سمت چپ رابطه (۱-۱۵) صفر می شود و جمله آخر نیز به دلیل کوچک بودن حذف می شود، لذا داریم:

$$\delta(\vec{k}) = \frac{-\mathrm{Im}\{\Lambda(\omega,k)\}}{\frac{\partial \mathrm{Re}\Lambda(\omega,k)}{\partial\omega}} \qquad (۱۶-۱)$$

۱-۲ گذردهی دی الکتریک یک پلاسمای همگن همسانگرد غیربرخوردی

با دانستن دستگاه معادلات جنبشی برای ذرات باردار، مطالعه خصوصیات الکترومغناطیسی پلاسما امکان پذیر می گردد. در این بخش با ساده ترین حالت یعنی پلاسمایی که از نظر فضایی همگن و همسانگرد است شروع می کنیم، علاوه بر آن از برخورد در پلاسما صرف نظر می کنیم و از معادله ی جنبشی با میدان خود سازگار(معادله ی ولاسوف) برای به دست آوردن گذردهی دی الکتریک پلاسما استفاده می کنیم. چنین تقریبی برای توصیف فرایندهایی که در مقیاس زمانی کوتاه- در مقابل زمان آزاد میانگین- یا فرآیندهایی که در مقیاس فضایی کوچکتر از مسافت آزاد میانگین می باشند معتبر است. در این حالت پلاسما را همگن، همسانگرد غیر برخوردی می نامند. معادله ولاسوف به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e_\alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right).\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (۱۷-۱)$$

در غیاب میدان های مغناطیسی، در پلاسماهای غیر برخوردی که از نظر فضایی همگن و همسانگرد هستند، توابع توزیع ذرات می توانند توابع دلخواهی از اندازه حرکت $|\vec{p}| = p$ باشند . در نتیجه، در پلاسمای همگن فرض می کنیم توزیع ذرات با دمای T_α و چگالی N_α برای ذرات نوع α ماکسولی است که به صورت زیر بیان می شود:

$$f_{0\alpha}(p) = f_{M\alpha}$$

برای تعیین گذردهی دی الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega,k)$ باید اختلالی در تابع توزیع تعادلی$f_{0\alpha}(p)$ ایجاد کنیم، چنین تغییری توسط افت و خیزهای کوچک میدان های الکتریکی$\vec{E}(\bar{r},t)$ و مغناطیسی $\vec{B}(\bar{r},t)$ به وجود می آید. تابع توزیع مختل شده به صورت زیر داده می شود:

$$f_\alpha(\vec{p},\vec{r},t) = f_{0\alpha}(\vec{P}) + \delta f_\alpha(\vec{p},\vec{r},t) \qquad (۱۹-۱)$$

فرض می شود اختلال$\delta f_\alpha(\vec{p},\vec{r},t)$ و مقادیر میدان های $\vec{E}(\bar{r},t)$ و $\vec{B}(\bar{r},t)$ مختل شده کوچک هستند. با جایگذاری $f_\alpha(\vec{p},\vec{r},t)$ در معادله‌ی ولاسوف و حذف جملات مرتبه دوم، معادله‌ی ولاسوف خطی شده برای تابع توزیع مختل شده به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e_\alpha \vec{E}.\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (۲۰-۱)$$

در حالت غیر مختل شده (تعادلی) پلاسما شبه خنثی است و چگالی های جریان و بار حذف شده اند. اما در حالت مختل شده، بارها و جریان های القایی در پلاسما توسط میدان‌های اختلالی $\vec{E}(\bar{r},t)$ و $\vec{B}(\bar{r},t)$ ایجاد می شوند که به صورت زیر می باشند:

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\vec{p},\vec{r},t)\, d\vec{P} = \sum_\alpha e_\alpha \int \delta f_\alpha\, d\vec{P} \qquad (۲۱-۱)$$

$$\vec{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{v}\, \delta f_\alpha d\vec{p}.$$

به عبارت دیگر میدان‌های خود سازگار $\vec{E}(\bar{r},t)$ و $\vec{B}(\bar{r},t)$ توسط $\vec{j}$ و ρ با توجه به معادلات ماکسولی (۱-۱) تولید می شوند. به دلیل خطی بودن معادله ی (۱-۲۰) و معادلات میدان هیچ جفت شدگی بین اختلالات بسط داده شده فوریه وجود ندارد؛ در نتیجه با فرض اینکه فازور $\exp(-i\omega t + i\vec{k}.\vec{r})$ باشد، جواب معادله ی (۱-۲۰) به آسانی به صورت زیر به دست می آید.

$$-i\omega\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) + i\vec{v}.\vec{k}\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) + e_\alpha \vec{E}(\bar{r},t)\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}} = 0 \qquad (۲۲-۱)$$

و در نتیجه [۲-۱]:

$$\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) = -i\frac{e_\alpha \vec{E}(\omega,\vec{K}).\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}}}{\omega - \vec{k}.\vec{v}} \qquad (۲۳-۱)$$

با جایگذاری مقدار δf_α معادله ی (۱-۲۳) در داخل معادلات (۱-۲۱)، چگالی جریان القایی به دست می آید [۲-۱]:

$$J_i(\omega,\vec{k}) = -i\sum_\alpha e_\alpha^2 \int d\vec{P}\frac{v_i E_j \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}}}{\omega - \vec{k}.\vec{v}} = \sigma_{ij}(\omega,\vec{k})E_j(\omega,\vec{k}) \qquad (۲۴-۱)$$

که در معادله بالا تانسور رسانندگی $\sigma_{ij}(\omega,\vec{k})$ عبارت است از:

$$\sigma_{ij}(\omega,\vec{k}) = -i\sum_\alpha e_\alpha^2 \int d\vec{p}\frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}}}{\omega - \vec{k}.\vec{v}} \qquad (۲۵-۱)$$

نهایتاً با استفاده از رابطه ی بین گذردهی دی الکتریک مختلط و رسانندگی مختلط و رابطه ی (۱-۵) می توان تانسور گذردهی دی الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ را به دست آورد که به صورت زیر بیان می شود [۱-۲]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha}\frac{4\pi e_{\alpha}^{2}}{\omega^{2}}\int d\vec{P}\,\frac{v_i}{\omega - \vec{k}.\vec{v}}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial P_j} \qquad (۲۶-۱)$$

در معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۶) جمع اندیس روی همه نمونه های ذرات بسته می شود. در پلاسمای غیر برخوردی به طور واضح ذرات خنثی در پدیده های الکترومغناطیسی سهیم نیستند. در یک پلاسمای همسانگرد تانسور گذردهی دی الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ به صورت زیر نوشته می شود[۲-۱]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega,\vec{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon^{l}(\omega,\vec{k}) = 0 \qquad (۲۷-۱)$$

که در رابطه‌ی فوق [۲-۱]:

$$\varepsilon^{l}(\omega,\vec{k}) = 1 + \sum_{\alpha}\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{k^2 v_{Te}^{2}}\left[1 - I_{+}(\frac{\omega}{kv_{Te}})\right] \qquad (۲۸-۱)$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega,\vec{k}) = 1 - \sum_{\alpha}\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega^{2}}\left[I_{+}(\frac{\omega}{kv_{Te}})\right] \qquad (۲۹-۱)$$

بیان می شود. فرم‌های مجانبی I_+ به صورت زیر داده می شود [۲-۱]:

$$I_{+}(x) = 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^4} \ldots + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ,\ldots |x| \gg 1 ,\ldots |Re(x)| \gg |Im(x)| \quad (۳۰-۱)$$

$$I_{+}(x) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots |x| \ll 1 \ldots |Im(x)| \gg |Re(x)|$$

$$I_{+}(x) = -i\sqrt{2\pi}\,x e^{-\frac{x^2}{2}}, \ldots\ldots |x| \gg 1 \ldots |Im(x)| \ll |Re(x)| \quad , |Im(x)| \ll 0$$

۱-۳ تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای مغناطیده غیر برخوردی همگن

در این بخش یک پلاسمای در تعادل ترمودینامیکی تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی ثابت و همگن $\vec{B}_0$ را در نظر می گیریم. تابع توزیع تعادلی ذرات باردار چنین سیستمی به صورت ماکسولی معادله ی (۱- ۱۸) فرض می شود.

همانند بخش قبل، در حالت غیر برخوردی می توان از معادله ی ولاسوف استفاده کرد. برای تعیین گذردهی دی الکتریک که پاسخ یک سیستم به عامل خارجی است، اجازه می دهیم سیستم از حالت تعادل خارج و مختل شود، سپس پاسخ سیستم را به اختلال پیدا می کنیم. معادله ی ولاسوف خطی شده برای انحرافات کوچک تابع توزیع ذرات از حالت تعادل به صورت زیر به دست می آید [۲-۱]:

$$-i(\omega + i\vec{k}.\vec{v})\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) + e_\alpha \vec{E}(\omega,\vec{K}).\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}} + e_\alpha\left(\frac{1}{c}\,\vec{v}\,\times\,\vec{B}\right).\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \overrightarrow{p_\alpha}} = 0 \qquad (۳۱-۱)$$

در حقیقت معادله ی (۱-۳۱) معادله ی دیفرانسیلی برای δf_α می باشد که باید حل گردد. بدون هیچ کاستی از عمومیت مسئله، چنانچه میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_0$ را در راستای محور z در نظر بگیریم. می توانیم از مختصات استوانه‌ای($P_\perp$، Φ، P_z) استفاده‌کنیم، که $P_x = P_\perp \cos\Phi$ و $P_y = P_\perp \sin\Phi$ خواهد بود. باید توجه داشت که $\vec{P} = m\vec{v}\gamma$ تعریف می شود که در آن $\gamma = (1-\frac{V^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ است ، و $P_\perp$ و P_z به ترتیب مؤلفه های اندازه حرکت $\vec{P}$ در راستای عمود و موازی راستای میدان مغناطیسی خارجی می باشند. با توجه به شرایط فوق، معادله ی (۱-۳۱) به صورت زیر تبدیل می شود [۱-۲]:

$$-i(\omega + i\vec{k}.\vec{v})\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) + e_\alpha \vec{E}(\omega,\vec{K}).\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}} + \frac{\Omega_\alpha}{\gamma}\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \Phi} = 0 \qquad (۳۲-۱)$$

در رابطه ی بالا، $\Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}$ فرکانس سیکلو ترونی (لارمور) ذره ی نوع α می باشد. معادله‌ی (۱-۳۱) معادله ی دیفرانسیلی خطی غیر همگن است که جواب عمومی آن برابر است با [۱]:

$$\delta f_\alpha(\omega,\vec{k}) = \frac{e_\alpha\gamma}{\Omega_e}\int_\infty^\Phi d\Phi'\left(\vec{E}.\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}}\right)_{\Phi'} \exp(\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha}\int_\Phi^{\Phi'} d\Phi''\,(\omega-\vec{k}.\vec{v})_{\Phi''} \qquad (۳۳-۱)$$

با استفاده از رابطه ی (۱-۳۳) می توان چگالی جریان J_i و تانسور رسانایی $\sigma_{ij}(\omega,\vec{k})$ و نهایتاً تانسور دی الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ را تعیین کرد [۱].

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{i4\pi e_\alpha^2}{\Omega_\alpha\omega}\int dp_\alpha\gamma\, v_i\,\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial P_j}\exp(\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha}\int_\Phi^{\Phi'} d\Phi''\,(\omega-\vec{k}.\vec{v})_{\Phi''} \quad (۳۴-۱)$$

با توجه به همسانگردی تابع توزیع تعادلی می توانیم بنویسیم، $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{P}} = \vec{v}\,\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}$ که در آن $\vec{P} = m\vec{v}\gamma$ و $\epsilon = \sqrt{m^2c^4 + P^2c^2}$ می باشند، در نتیجه تانسور دی الکتریک به شکل زیر بدست می آید[۱]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} \qquad (۳۵-۱)$$

$$+i\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\Omega_\alpha\omega}\int dp_\alpha\,\gamma v_i\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon}\int_\infty^\Phi d\Phi' v_j(\Phi')\exp(\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha}\int_\Phi^{\Phi'} d\Phi''\,(\omega-\vec{k}.\vec{v})_{\Phi''}.$$

بدون هیچ کاستی از کلیت مسئله می توان بردار $\vec{k}$ را در صفحه xz در نظر گرفت؛ یعنی $\vec{k}=(k_{\perp},0,k_z)$. با انتگرال گیری روی Φ'' عامل نمایی در معادله ی (۱-۳۵) گذردهی دی الکتریک به صورت زیر در می آید [۱]:

$$\exp\left(\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha}\int_{\Phi}^{\Phi'} d\Phi''\,(\omega-\vec{k}.\vec{v})_{\Phi''}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b_\alpha)e^{in\Phi} \qquad (۳۶-۱)$$

که در معادله ی فوق J_n تابع بسل مرتبه ی nام است و آرگومان آن $b_\alpha=\frac{\gamma k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}$ می باشد. با استفاده از رابطه ی (۱-۳۶) و معادله ی (۱-۳۵) گذردهی دی الکتریک به صورت زیر در می آید[۱]:

(۱-۳۷)

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})=\delta_{ij}+\sum_\alpha\frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega}\int dp_\alpha\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial\varepsilon}\Sigma_{-\infty}^{\infty}\prod_{ij}^{n}\left\{p\frac{1}{\omega-k_zv_z-\frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}}-i\pi\delta\left(\omega-k_zv_z-\frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}\right)\right\}$$

علامت P درمعادله ی (۱-۳۷) نشان می دهد که مقدار اصلی انتگرال باید گرفته شود و تانسور Π_{ij}^{n} به صورت زیر داده می شود[۱]:

$$\Pi_{ij}^{(n)}=\begin{pmatrix} v_\perp^2\left(\frac{nJ_n}{b_\alpha}\right)^2 & iv_\perp^2 n\frac{J_n\acute{J}_n}{b_\alpha} & v_\perp v_z\frac{nJ_n^2}{b_\alpha}\\ -v_\perp^2 n\frac{J_n\acute{J}_n}{b_\alpha} & v_\perp^2\acute{J}_n^{\,2} & -v_\perp v_z J_n\acute{J}_n\\ v_\perp v_z n\frac{J_n^2}{b_\alpha} & iv_\perp v_z J_n\acute{J}_n & v_z^2J_n^2\end{pmatrix} \qquad (۳۸-۱)$$

در رابطه‌ی (۱-۳۸)، J_n و J_n' تابع بسل و مشتق آن نسبت به آرگومان $b_\alpha=\frac{\gamma k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}$ می‌باشند. این نمایش تانسور دی الکتریک پلاسمای مغناطیده به طور صریح نشان می دهد که تشدید سیکلوترونی وابسته به صفرهای $\omega=k_zv_z-\frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}$ در مخرج کسر می باشد. مقدار اصلی انتگرال ها، قسمت حقیقی (هرمیتی) تانسور $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ ، جمله های عامل تابع δ سهم قسمت موهومی (غیر هرمیتی) مسئول جذب

موج را نمایش می دهد. بنابراین در پلاسمای مغناطیده غیر برخوردی فقط ذراتی که واجد شرایط ذیل باشند می توانند امواج را جذب کنند [۱]،

$$\omega = k_z v_z - \frac{n\Omega_\alpha}{\gamma} = 0 \qquad (۳۹-۱)$$

معادله ی (۱-۳۹) جایگزین شرط تشدید $\omega = k_z v_z$ پلاسمای غیر مغناطیده شده است. مکانیک جذب رابه سادگی می توان درک کرد. حرکت هر ذره ی باردار را به دو حرکت تجزیه می کنیم:

۱. جریان بدون نیرو در راستای خطوط میدان مغناطیسی با سرعت v_z.
۲. حرکت چرخشی سیکلوترونی عمود بر خطوط میدان مغناطیسی با فرکانس $\frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}$.

بنابراین با توجه به حرکات ذکر شده، ذرات باردار می توانند تشعشع امواج سیکلوترونی بر اثر شتاب چرخشی و امواج چرنکوفی به دلیل حرکت مستقیم موازی با میدان مغناطیسی انتشار دهند.

فرکانس های امواج تابشی را می توان از شرط (۱-۳۹) تعیین کرد[۱]:

$$\omega = k_z v_z + \frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}, \ldots\ldots\ldots n = 0 \pm 1, \pm 2 \pm \ \ldots \qquad (۴۰-۱)$$

برای $n = 0$ شرط (۱-۳۹)، مربوط به تابش چرنکوف می باشد و برای $n \neq ۰$ ، برای تابش سیکلوترونی می باشد.

برای پلاسمای ماکسولی شبه تعادلی، با استفاده از تابع توزیع معادله ی (۱-۱۸)، تانسور گذردهی در الکتریک $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ را بر حسب توابع جدول بندی شده $I_+(X)$ یعنی معادلات(۱-۳۰) به صورت زیر در می آیند[۲-۱]:

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_\alpha \sum_n \frac{n^2 \omega_{pe}^2}{\omega(\omega - n\Omega_\alpha)} \frac{A_n(z_\alpha)}{z_\alpha} I_+(\beta_{n\alpha})$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} + 2 \sum_\alpha \sum_n \frac{\omega_{pe}^2 z_\alpha}{(\omega - n\Omega_\alpha)} A_n'(z_\alpha) I_+(\beta_{n\alpha})$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -i \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{pe}^2}{(\omega - n\Omega_\alpha)} A_n'(z_\alpha) I_+(\beta_{n\alpha}) \qquad (۴۱-۱)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = - \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_\alpha} \frac{k_\perp}{k_z} \frac{A_n(z_\alpha)}{z_\alpha} I_+(\beta_{n\alpha})$$

$$\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = i\sum_{\alpha}\sum_{n}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_\alpha}\frac{k_\perp}{k_z}\ A_n'(z_\alpha)I_+(\beta_{n\alpha})$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha}\sum_{n}\frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{T\alpha}^2}\ \ [1-\frac{n\Omega_\alpha}{\omega}]A_n(z_\alpha)[1-I_+\,(\beta_{n\alpha})]$$

در معادلات فوق داریم[۲-۱]:

$$A_n(z_\alpha) = \exp(-z_\alpha)\, J_n(z_\alpha) \qquad (۴۲-۱)$$

$$z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_\perp^2}{\Omega_\alpha^2}$$

$$\beta_{n\alpha} = \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}}.$$

در بیشتر موارد کافی است که فقط نوسانات الکتروستاتیک (طولی) را بررسی کنیم، در این صورت گذردهی طولی می نامیم و به صورت زیر تعریف می شود[۱]:

$$\varepsilon(\omega,\vec{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$$

$$= 1 - \sum_{\alpha}\frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2}\int d\vec{p}_\alpha\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \in}\left(1 - \sum_{n}\frac{\omega J_n^2(b_\alpha)}{\omega - k_z v_z - \frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}}\right) \qquad (۴۳-۱)$$

که برای تابع توزیع ماکسولی معادله ی (۱-۱۸) گذردهی دی الکتریک طولی به صورت زیر در می آید[۱]:

$$\varepsilon(\omega,\vec{k}) = \sum_{\alpha}\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2}\left(1 - \sum_{n}\frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha}A_n(z_\alpha)I_+(\beta_{n\alpha})\right) \qquad (۴۴-۱)$$

۱-۳-۱ تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای سرد مغناطیده غیر برخوردی

در این بخش برای بدست آوردن تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای سرد مغناطیده غیر برخوردی کافی است از اثرات حرکت حرارتی ذرات چشم پوشی کنیم. در چنین حالتی تقریب های زیر برقرار است[۱]:

$$\frac{k_\perp v_{T\alpha}}{\omega} \ll 1$$

$$\frac{k_\perp v_{0\alpha}}{\Omega_\alpha} \ll 1 \qquad (۴۵-۱)$$

$$\beta_{n\alpha} = \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}} \gg 1.$$

دراینجا $V_{T\alpha} = V_{0\alpha}$ می باشد. بر طبق شرایط فوق، معادلات (۱-۴۱) تانسور گذردهی دی الکتریک به صورت زیر در می آید[۱]:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad (۴۶-۱)$$

این تانسور دی الکتریک برای پلاسمای سرد هنگامی که حرکت حرارتی قابل چشم‌پوشی باشد، معتبر است. عناصر $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ عبارتند از [۱]:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2}$$

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_{zz} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \qquad (۴۷-۱)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = ig = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega(\omega^2 - \Omega_\alpha^2)}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

۱-۳-۲ تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای مغناطیده برخوردی یونیزه ضعیف

تانسور دی الکتریک پلاسمای مغناطیده یونیزه کم با احتساب برخوردها براساس مدل BGK، محاسبه می شود که با توجه به تابع توزیع ماکسولی و معادله‌ی ولاسوف به صورت زیر می باشد[۱]:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_\alpha \left[\delta_{i\mu} + i\frac{\nu_{\alpha n} G_{\alpha i} k_\mu}{\omega - i\nu_{\alpha n}\vec{k}.\overrightarrow{G_\alpha}}\right] \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega} \left[\varepsilon_{\mu j}^\alpha(\omega + i\nu_{\alpha n}, \vec{k}) - \delta_{\mu j}\right] \qquad (۴۸-۱)$$

تانسور $(\varepsilon_{ij}^\alpha(\omega + i\nu_{\alpha n}, \vec{k}))$ ، همان تانسور دی الکتریک (۱-۴۱) پلاسمای مغناطیده غیر برخوردی با شیفت آرگومان $\omega \to \omega + i\nu_{\alpha n}$ ، می‌باشد. بردار $\vec{G}_\alpha$ در معادله‌ی فوق دارای مولفه ی زیر می باشد[۱]:

$$\vec{G}_\alpha = \begin{Bmatrix} \dfrac{\Omega_\alpha}{k_\perp}\sum_n \dfrac{nA_n(z_\alpha)}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha} I_+(\beta_{n\alpha}) \\ -i\dfrac{\Omega_\alpha}{k_\perp}\sum_n \dfrac{z_\alpha \acute{A}_n(z_\alpha)}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha} I_+(\beta_{n\alpha}) \\ -\dfrac{1}{k_\perp}\sum_n A_n(z_n)[1 - I_+(\beta_{\alpha n})] \end{Bmatrix} \qquad (۴۹-۱)$$

که در آن:

$$z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}$$

(۵۰-۱)

$$\beta_{n\alpha} = \frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}}$$

می باشد. در معادله ی (۱-۴۸) جمع روی همه انواع ذرات باردار نوع α می باشد. گذر دهی دی الکتریک طولی پلاسمای کم یونیزه غیر تبهگن برای نوسانات الکتروستاتیک به دست آمده از معادله ی (۱-۴۸) به صورت زیر است[۱]:

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$$
$$= 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha} A_n(z_\alpha) I_+(\beta_{\alpha n})}{1 - \sum_n \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha} A_n(z_\alpha) I_+(\beta_{\alpha n})} \qquad (۵۱-۱).$$

۴-۱ تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای غیر تعادلی ناهمسانگرد

در این بخش تانسور گذردهی دی الکتریک سیستم های باریکه- پلاسمایی را که در تعادل ترمودینامیکی نیستند، با استفاده از تابع توزیع ناهمسانگرد ذرات برای پلاسمای مغناطیده حالت مطالعه قرار می دهیم. در بخش های قبل تانسور دی الکتریک پلاسمای در حال تعادل ترمودینامیکی حالت بررسی قرار گرفت. جایی که ذرات باردار براساس تابع توزیع سرعت ماکسولی توزیع شده بودند. پلاسمای واقعی (حقیقی) معمولا در تعادل نیست، به طوری که حالت غیر تعادل پلاسما بستگی به روش تولید آن دارد، مثلاً تخلیه ی الکتریکی در گازها یا در سطح یک جامد یا به وسیله ی پودر کردن ذرات باردار به داخل گاز خنثی و یونیزه کردن آن. می دانیم برخوردها حالت غیر متعادل اولیه پلاسما را به تعادل تبدیل می کنند.

حالت نهایی پلاسمای غیر تعادلی ناشی از ناپایداری های گوناگون را به طور کامل فقط براساس تئوری غیر خطی می توان توصیف کرد. به هر حال مرحله ی اولیه ی گسترش ناپایداری ها در الکترودینامیک خطی مطابق با آهنگ رشد اختلالات کوچک را می توان با معادله ی (۱-۸) معرفی کرد[۱]:

$$\left|k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\left(\omega, \vec{k}\right)\right| = 0 \qquad (۵۲-۱)$$

در این جا $\varepsilon_{ij}\left(\omega, \vec{k}\right)$ تانسور گذردهی دی الکتریک پلاسمای غیرتعادلی همگن فضایی می‌باشد. $\omega_n(\vec{k})$ ریشه های این معادله توسعه اختلالات کوچک پلاسما را تعیین می‌کند.

$$\Phi_k(t) = \sum_n \Phi_{nk}(0)\exp\left[-i\omega_n\left(\vec{k}\right)t\right] \qquad (۵۳-۱)$$

اگر فقط یکی از ریشه‌های مجموعه $\omega_n(\vec{k})$، یک جزء موهومی مثبت داشته باشد؛ یعنی: $\mathrm{Im}\{\omega_n(\vec{k})\} > 0$ اختلال مربوط به آن در پلاسما با زمان افزایش می یابد و پلاسما ناپایدار است. تابع توزیع پلاسمای غیرتعادلی غیر همسانگرد بر اثر میدان مغناطیسی خارجی را می‌توان با توابع توزیع ناهمسانگرد ذرات نوع آلفا به شکل زیر بیان کرد [۲-۱]:

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(P_\perp, P_\parallel) \qquad (۵۴-۱)$$

میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_0$ در راستای محور z اعمال می گردد. مثال هایی از پلاسمای غیر تعادلی: پلاسمایی با ناهمسانگردی دمایی، پلاسما با یک باریکه الکترونی ذرات باردار متحرک موازی با میدان مغناطیسی خارجی یا باریکه الکترونی چرخنده در اطراف میدان مغناطیسی خارجی می‌باشند. تابع توزیع (۱-۵۴) در معادله ی جنبشی همگن فضایی$(\frac{\partial}{\partial r})$ و زمانی $(\frac{\partial}{\partial t})$ صدق می کند[۱]:

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}_0\right).\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{P}} = 0 \qquad (۵۵-۱)$$

اگر میدان های الکتریکی و مغناطیسی متغیر وجود داشته باشند و بتوان از برخوردهای ذرات صرف نظر کرد، معادله جنبشی ولاسوف برای یک انحراف کوچک $\partial f_\alpha(\vec{p}, t)$ که توسط میدان متغیر $\vec{E}(\vec{r}, t)$ و $\vec{B}(\vec{r}, t)$ به وجود آمده است، به صورت زیر می باشد[۱]:

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{e_\alpha}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}_0\right).\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \vec{p}} = -e_\alpha\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right].\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \vec{p}} \qquad (۵۶-۱)$$

همانند بخش های قبل فرض می کنیم که وابستگی زمانی و فضایی کمیت های اختلالی به صورت $\exp(-i\omega t + i\vec{k}.\vec{r})$ باشند و محور x در امتداد بردار $\vec{k}$ باشد، در این صورت با استفاده از $\delta f_\alpha(\vec{p},t)$ ، چگالی بار و جریان القایی برابر است با [۱]:

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\vec{p},t)d\vec{p} = \sum_\alpha e_\alpha \int \delta f_\alpha(\vec{p},t)d\vec{p}, \qquad (۵۷-۱)$$

$$\vec{J} = \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{v}\delta f_\alpha(\vec{p},t)d\vec{p}.$$

نهایتاً تانسور گذردهی دی الکتریک حالت پلاسمای غیر تعادلی مشخص شده در فوق به صورت زیر به دست می آید[۱]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + i\sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\Omega_\alpha\omega}\int d\,\vec{p}_\alpha\gamma v_j \int_\infty^\Phi d\,\acute{\Phi}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}\left(\frac{\omega-\vec{k}.\vec{v}}{\omega}\delta_{ij}+\frac{k_i v_j}{\omega}\right) \qquad (۵۸-۱)$$
$$\times \exp\left\{\frac{i\gamma}{\Omega_e}\left[(\omega-k_z v_z)(\acute{\Phi}-\Phi)-k_\perp v_\perp(\sin\acute{\Phi}-\sin\Phi)\right]\right\}.$$

که در معادله فوق $\gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ و $\Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}$ می باشد. با در نظر گرفتن شکل تابع توزیع مختل نشده (۱-۵۴) و انتگرال گیری از معادله ی (۱-۵۸) روی همه ی زوایا، $\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})$ به صورت زیر به دست می آید[۱]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega^2}\int d\,\vec{p}\sum_n \frac{(\omega-k_z v_z)\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}+k_z v_z\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\left(\omega-k_z v_z-\frac{n\Omega_\alpha}{\gamma}\right)v_\perp}\Pi_{ij}^{(n)} \qquad (۵۹-۱)$$

که در رابطه ی فوق $\Pi_{ij}^{(n)}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\Pi_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} v_\perp^2\left(\frac{n^2 J_n(x)}{x}\right)^2 & iv_\perp^2 n\,\frac{J_n(x)\ \acute{J}_n(x)}{x} & v_\perp v_z\frac{nJ_n^2(x)}{x} \\ -v_\perp^2 n\frac{J_n(x)\acute{J}_n(x)}{x} & v_\perp^2\acute{J}_{(x)n}^2 & -v_\perp v_z J_{n(x)}\acute{J}_n(x) \\ v_\perp v_z n\frac{J_n^2(x)}{x} & iv_\perp v_z J_n(x)\acute{J}_n(x) & v_z^2 J_n^2(x) \end{pmatrix} \qquad (۶۰-۱)$$