بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

ساختار فضاهای تابع سزارو

استاد راهنما

دکتر علی ایلون کشکولی

پژوهشگر

محمد رحیم رنجبر

۱۳۹۲

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** است که در ۱۳۹۲ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر علی ایلون کشکولی** و مشاورهٔ **دکتر حمید رضا گودرزی** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

ساختار فضاهای تابع سزارو

به وسیلهٔ

محمد رحیم رنجبر

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی محض

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر علی ایلون کشکولی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر حمید رضا گودرزی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه:	دکتر مهدی شریف زاده	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه:	دکتر بهمن یوسفی	با مرتبهٔ علمی استاد	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر زهرا رفیعی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء

تقدیم به :

خانواده و دوستان عزیزم

قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وام‌دار وجودشان است، و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی ایلون کشکولی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حمید رضا گودرزی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن این‌جانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر بهمن یوسفی و جناب آقای دکتر مهدی شریف زاده که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم به پاس عاطفه سرشار و وجود پرثمرشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند، آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند، حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم به آنان....

محمد رحیم رنجبر

۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به خواص مقدماتی فضاهای تابع سزارو می‌پردازیم؛ ساختار تابع سزارو بنام Ces_p را روی بازه‌های $[0,1]$ و $[0,\infty)$؛ به ازای $1 < p \le \infty$ بررسی می‌کنیم و در ادامه موضوع ثابت می‌کنیم فضاهای تابع سزارو، فضای باناخ هستند. سپس جدایی‌پذیر بودن آنها و بعد پایا و انعکاسی بودن این فضاها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که فضاهای Ces_p به ازای $1 \le p < \infty$ بازگشتی نیستند اما مطلقاً واگرا هستند. فضای تابع سزارو شامل یک کپی یکریخت از l^1 است. همچنین فضاهای تابع سزارو با فضای L^q، $1 \le q < \infty$ ایزومورف نیستند. در پایان فضای دوگانی با نرم‌های هم‌ارزی که دارای توصیف متفاوتی روی $[0,1]$ و $[0,\infty)$ می‌باشد، را بیان می‌کنیم. بنابراین موضوعات اصلی این پایان‌نامه بر حسب فصول به شرح زیر می‌باشد.

فصل اول شامل تعاریف، مفاهیم و قضایای پیش نیاز در فصل‌های آینده خواهد بود.

در **فصل دوم** خواص مقدماتی فضاهای تابع سزارو را بررسی می‌کنیم.

در **فصل سوم** به مطالعه‌ی فضای دوگان و دوگان کوته برای فضاهای تابع سزارو می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: فضاهای تابع سزارو، فضای دوگان، فضاهای L^p، غوطه‌وری

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

سزارو	Ces
تقریباً همه جا	$a.e$
نرم	$\|.\|$
بستار X	$\overline{X}$
یکریختی	$\simeq$
غوطه‌وری	$\hookrightarrow$
محمل	$supp$
صعودی	$\nearrow$
قدرمطلق	$\vert.\vert$
فضای دوگان X	X^*
دوگان کوتهX	X'
سوپرمم	sup
اینفیمم	inf
سوپرمم اساسی	$ess\ sup$

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

۱-۱ تاریخچه‌ی فضاهای دنباله‌ای سزارو

فضای دنباله‌ای سزارو Ces_p و Ces_∞ در سال ۱۹۶۸ میلادی مطرح شد، در سال ۱۹۷۰ میلادی تحقیقاتی در مورد Ces_p توسط شیو[۱] انجام شد [۱۹]. سپس لیبووایتز[۲] [۱۴] و جاگرز[۳] [۹] ثابت کردند که $Ces_1 = \{0\}$ و مجموعه‌ی Ces_p برای $1 < p < \infty$؛ فضاهای باناخ جدایی‌پذیر و انعکاسی هستند. همچنین برای $1 < p \leq \infty$؛ فضای l^p بطور پیوسته و سره در Ces_p غوطه‌ور می‌شود. به‌طور دقیق‌تر برای هر $x \in l^p$ داریم؛

$$\|x\|_{c(p)} \leq p'\|x\|_p,$$

که در آن اگر $1 < p < \infty$ آنگاه $p' = \frac{p}{p-1}$ و اگر $p = \infty$ آنگاه $p' = 1$. علاوه بر این اگر $1 < p < q \leq \infty$ آنگاه $Ces_p \subset Ces_q$، با تابع غوطه‌وری پیوسته. بنت [۴] ثابت کرد که برای $1 < p < \infty$؛ فضای Ces_p با هیچ یک از فضاهای l^q؛ برای $1 \leq q \leq \infty$ یکریخت نیستند

---

[۱] shiue

[۲] Leibowitz

[۳] Jagers

[۴] Bennett

[۳]. سپس در سال‌های ۲۰۰۰ – ۱۹۹۹ میلادی سیو [۵] و هادزیک [۶] در [۴] و همین دو با لی [۷] در [۵] و سیو، مینگ [۸] و پلوی‌نیک [۹] در [۶] ثابت کردند که فضاهای دنباله‌ای سزارو Ces_p برای $۱ < p < \infty$؛ دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت هستند و همچنین ملی‌گراندا [۱۰] ، پتروت [۱۱] و سانتای [۱۲] ثابت کردند که فضاهای Ces_p برای $۱ < p < \infty$؛ بطور یکنواخت نامربع نیست [۱۷]، بدین معنی که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ روی گوی یکه یافت می‌شوند به‌قسمی که؛

$$\lim_{n\to\infty} min(\|x_n + y_n\|_{c(p)}, \|x_n - y_n\|_{c(p)}) = ۲.$$

نویسندگان ذکر شده حتی اثبات کردند که این فضاها $B-$محدب نیستند. همچنین فضاهای $Ces_\infty[۰,۱]$ در سال ۱۹۴۸ میلادی بنام $\|f\|_{C(\infty)}$ ظاهر شدند. اخیراً ثابت شده است که بر خلاف فضاهای دنباله‌ای سزارو، فضاهای تابعی سزارو $Ces_p(I)$ روی هر دو مجموعه‌ی $I = [۰,۱]$ و $I = [۰,\infty)$ برای $۱ < p < \infty$ انعکاسی نیستند و همچنین دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت نیز نمی‌باشند [۲].

۱–۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

بنا به نیازی که در فصل‌های آینده به مطالب زیر داریم، ذکر مقدماتی از آنها ضروری به نظر می‌رسد.

تعریف ۱–۲–۱. X را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم، درصورتی که X یک فضای برداری روی میدان F باشد و تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ خواص زیر را داشته باشد:

[۵] Cui

[۶] Hudzik

[۷] Li

[۸] Meng

[۹] Plueiennik

[۱۰] Maligranda

[۱۱] Petrot

[۱۲] Suantai

۱) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۲) $\forall a \in F, \forall x \in X; \|ax\| = |a|\|x\|$،

۳) $\forall x, y \in X, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۱-۲-۲. دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ ، در نقطه $x \in X$ همگراست اگر برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $N \in \mathbb{N}$، به‌طوری‌که برای هر $n > N$ داشته باشیم،

$$\|x_n - x\| < \epsilon.$$

مثال ۱-۲-۳. دنباله‌ی $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ با نرم معمولی (نرم قدرمطلق) در $\mathbb{R}$ همگراست.

تعریف ۱-۲-۴. یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ کوشی است اگر برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $N \in \mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم،

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

مثال ۱-۲-۵. دنباله‌ی $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ در $\mathbb{R}$ دنباله‌ی کوشی است. به راحتی می‌توان دید که اگر $\mathbb{R}$ را با نرم معمولی (قدرمطلق) درنظر بگیریم، برای هر $\epsilon > 0$ وجود دارد $N \in \mathbb{N}$، به‌طوری‌که برای هر $m, n \geq N$ داریم،

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

تعریف ۱-۲-۶. فضای نرم‌دار X را کامل گویند هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۱-۲-۷. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ با نرم اقلیدسی هر دنباله‌ی کوشی، همگراست.

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار خطی باشد. برای هر $x \in X$ گوی باز را با شعاع $r > 0$ می‌توان به صورت زیر تعریف کرد،

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}.$$

تعریف ۱-۲-۹. اگر E یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ باشد، دراین صورت قطر E را با $diamE$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم؛

$$diamE = \sup\{\|p-q\| : p, q \in E\}.$$

تعریف ۱-۲-۱۰. یک نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ که $(X, \|.\|)$ و $(Y, \|.\|)$ دو فضای خطی نرم‌دار هستند را در نقطه‌ی $x_\circ \in X$ پیوسته گویند هرگاه برای هر $\epsilon > \circ$ وجود داشته باشد $\delta > \circ$ به‌طوری‌که؛

$$|x - x_\circ| < \delta \Rightarrow |T(x) - T(x_\circ)| < \epsilon.$$

تعریف ۱-۲-۱۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت باشد. در این صورت T یک نگاشت پیوسته دنباله‌ای است اگر برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ که به x در X همگراست، $\{T(x_n)\}$ یک دنباله‌ی همگرا به $T(x)$ در Y باشد.

تعریف ۱-۲-۱۲. زیرمجموعه‌ی P از فضای نرم‌دار خطی $(X, \|.\|)$ بسته است، اگر برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ از P که همگرا به $x \in X$ است بتوان از،

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \circ.$$

نتیجه گرفت $x \in P$.

تعریف ۱-۲-۱۳. (فضای متری): X را یک فضای متری می‌نامیم، هرگاه d یک تابع از $X \times X$ بتوی $\mathbb{R}$ باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر x و y، $\circ \leq d(x,y) < \infty$؛

۲) $d(x,y) = \circ \Leftrightarrow x = y$؛

۳) به ازای هر x و y، $d(x,y) = d(y,x)$؛

۴) به ازای هر x،y و z، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

مثال ۱-۲-۱۴. $d(x,y) = |x-y|$ یک متر است.

نکته ۱-۲-۱۵. در یک فضای متری، گوی باز به مرکز x و شعاع r عبارت است از مجموعه‌ی

$$B_r(x) = \{y : d(x,y) < r\}.$$

به خصوص اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، مجموعه‌های

$$B_1(0) = \{x : \|x\| < 1\},$$

و

$$\bar{B}_1(0) = \{x : \|x\| \leq 1\},$$

به ترتیب گوی یکه‌ی باز و گوی یکه‌ی بسته‌ی X می‌باشند.

تعریف ۱-۲-۱۶. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار خطی باشد. زیرمجموعه‌ی A از X کران‌دار است اگر برای هر $x, y \in A$ ، $N > 0$ چنان وجود داشته باشد که،

$$\|x - y\| \leq N.$$

تعریف ۱-۲-۱۷. (فضای برداری): فرض کنیم F میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا مختلط $\mathbb{C}$ باشد، فضای برداری روی F مجموعه‌ای مانند X با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که از خواص زیر برخوردار است؛

۱) به هر جفت از بردارهای x و y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که $x+y = y+x$ و $x + (y+z) = (x+y) + z$؛
X بردار منحصربفردی مانند 0 (بردار صفر یا مبدا X) دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$؛ و به ازای هر $x \in X$ بردار منحصربفردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x + (-x) = 0$؛

۲) به هر جفت (α, x) با $\alpha, \beta \in F$ و $x \in X$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \qquad 1x = x,$$

و دو قانون پخش‌پذیری $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ و $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ برقرار می‌باشند.

تعریف ۱-۲-۱۸. (فضای توپولوژیک): منظور از یک توپولوژی روی مجموعه‌ی دلخواه X یک خانواده‌ی τ از زیر مجموعه‌های X است ($\tau \subset P(X)$) به‌قسمی‌که؛

۱) $\phi, X \in \tau$؛

۲) اگر $A_۱, A_۲ \in \tau$ آنگاه $A_۱ \cap A_۲ \in \tau$؛

۳) اگر Λ یک خانواده‌ی اندیس باشد و برای هر $\alpha \in \Lambda$، $A_\alpha \in \tau$ آنگاه $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \tau$.

تعریف ۱-۲-۱۹. (فضای باناخ): فضای نرم‌دار X که نسبت به متریک القا شده بوسیله‌ی نرمش تام است یک فضای باناخ نام دارد. یعنی X یک فضای باناخ است، اگر به ازای هر دنباله‌ی کشی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از X عضوی مانند $x \in X$ باشد به‌طوری‌که؛

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰.$$

لذا فضاهای باناخ نمونه‌های خاصی از فضاهای متریک تام است.

مثال ۱-۲-۲۰. فضای مختلط با نرم $\|x\| = |x|$ ساده‌ترین فضای باناخ است.

مثال ۱-۲-۲۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، $C_۰(X)$ با نرم سوپریمم یک فضای باناخ است. که در آن $C_۰(X)$ رده‌ی تمام توابع پیوسته که در بینهایت صفر می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۲۲. (فضای برداری توپولوژیک): فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به‌قسمی‌که؛

۱) هر مجموعه‌ی تک نقطه‌ای از X نسبت به τ بسته باشد یعنی برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $\{x\}^c = X \setminus \{x\} \in \tau$؛

۲) اعمال جمع بردارها و ضرب اسکالر دو بردار نسبت به τ پیوسته باشند؛

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری روی X نامیم و X را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم.

مثال ۱-۲-۲۳. تمام فضاهای برداری نرم‌دار فضای برداری توپولوژیک هستند، بنابراین تمام فضاهای باناخ و فضاهای هیلبرت مثالهایی از فضاهای برداری توپولوژیک هستند.

تعریف ۱-۲-۲۴. (فضای جدائی پذیر): فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و τ توپولوژی حاصل از متریک d باشد دراین صورت E را در X چگال گوییم هر گاه $\bar{E}=X$. حال X را یک فضای جدائی‌پذیر نامیم، هرگاه دارای یک زیر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر چگال باشد.

مثال ۱-۲-۲۵. $\mathbb{R}^k$ جدائی‌پذیر است.

تعریف ۱-۲-۲۶. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. یک تابعک خطی روی X عبارت است از نگاشت پیوسته‌ی l از X به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ به‌قسمی‌که؛

$$\forall x,y\in X,\forall c\in\mathbb{R}\quad l(cx)=cl(x)\ \ ,\quad l(x+y)=l(x)+l(y),$$

اگر فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار خطی روی $\mathbb{R}$ باشد در این صورت تابعک خطی $l:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را کراندار نامیم هر گاه عدد مثبت M موجود باشد به‌قسمی‌که؛

$$|l(x)|\leq M\|x\|\quad \forall x\in X.$$

تعریف ۱-۲-۲۷. (دوگان): مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی روی X را فضای دوگان توپولوژیک X نامیم و آن را با X' نمایش می‌دهیم. توجه کنید که جمع و ضرب اسکالر نیز در X' به صورت زیر قابل تعریف است

$$\forall l_1,l_2\in X'\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ \forall x\in X\ \ (l_1+l_2)(x)=l_1(x)+l_2(x)\ ,\ (\lambda l_1)(x)=\lambda l_1(x).$$

بنابراین واضح است که X' خود به یک فضای برداری تبدیل می‌شود. فرض کنیم $l\in X'$ در این صورت،

$$\|l\|=sup_{x\neq 0}\frac{|l(x)|}{\|x\|},$$

پس یک نرم روی X' تعریف می کند. X' خود یک فضای برداری نرم‌دار است و بنابراین

دوگان برای X' نیز قابل تعریف است که آن را با X'' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۲۸. یک فضای باناخ را انعکاسی نامیم هر گاه $X'' = X$.

تعریف ۱-۲-۲۹. گردایه‌ی m از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک $\sigma-$جبر در X نامیم اگر m از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱) $X \in m$؛

۲) هرگاه $A \in m$ آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳) هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$، $A_n \in m$ آنگاه $A \in m$.

نکته ۱-۲-۳۰. هر گاه m یک $\sigma-$جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۳۱. هر گاه X یک فضای اندازه‌پذیر؛ Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X بتوی Y باشد آنگاه گوییم f اندازه‌پذیر است، اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

مثال ۱-۲-۳۲. اگر $E \subseteq X$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر و

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E, \end{cases} \tag{1-1}$$

آنگاه χ_E اندازه پذیر است.

لم ۱-۲-۳۳. *(لم فاتو): اگر $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، f_n اندازه‌پذیر باشد آنگاه؛*

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_X f_n d\mu.$$

قضیه ۱-۲-۳۴. *فرض کنیم p و q نماهای مزدوج بوده و $1 < p < \infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازه‌ی μ باشد. و نیز f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0, \infty]$ باشند.*

در این صورت

$$\int_X fg d\mu \leq \{\int_X f^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \{\int_X g^q d\mu\}^{\frac{1}{q}} \quad (۱)$$

و

$$\{\int_X (f+g)^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \leq \{\int_X f^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} + \{\int_X g^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \quad (۲)$$

نامساوی (۱) نامساوی هولدر و نامساوی (۲) نامساوی مینکوفسکی است. اگر $p = q = ۲$، نامساوی (۱) به نامساوی شوارتز معروف است.

تعریف ۱-۲-۳۵. اگر p و q نماهای مزدوج باشند

$$g \in L^q(\mu), \quad f \in L^p(\mu), \quad ۱ \leq p \leq \infty, \quad (\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱)$$

آنگاه

$$\|fg\|_۱ \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

و

$$fg \in L^۱(\mu).$$

تعریف ۱-۲-۳۶. اگر $۱ \leq p \leq \infty$ و $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^p(\mu)$ آنگاه

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

و

$$f + g \in L^p(\mu).$$

تعریف ۱-۲-۳۷. (تابع محدب): تابع حقیقی f را بر بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ محدب نامند، هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $۰ < \lambda < ۱$ داشته باشیم؛

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y).$$

مثال ۱-۲-۳۸. تابع نمایی بر $(-\infty, \infty)$ محدب است.

تعریف ۱-۲-۳۹. (فضاهای L^p): اگر $۰ < p < \infty$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر آنگاه تعریف می‌کنیم؛

$$\|f\|_p = \{\int_X |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}},$$

و قرار می‌دهیم؛

$$L^p(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_p < \infty\},$$

$\|f\|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۴۰. (نامساوی هاردی): فرض کنید $1 < p < \infty$ و $f \in L^p = L^p((0, \infty))$ نسبت به اندازه‌ی لبگ بوده و

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad (0 < x < \infty),$$

نامساوی هاردی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

تعریف ۱-۲-۴۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک و $f : X \to \mathbb{C}$، محمل f را بصورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$supp(f) = \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}^-.$$

تعریف ۱-۲-۴۲. گوییم مجموعه‌ی E در یک فضای اندازه (با اندازه‌ی μ) دارای $\sigma-$اندازه‌ی متناهی است اگر E اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های E_i باشد که $\mu(E_i) < \infty$ باشد.

قضیه ۱-۲-۴۳. (قضیه فوبینی): *فرض کنیم (X, G, μ) و (Y, F, λ) دو فضای اندازه‌ی $\sigma-$متناهی بوده و f یک تابع $(G \times F)-$اندازه‌پذیر بر $X \times Y$ باشد. هرگاه $0 \leq f \leq \infty$ و*

$$(y \in Y, x \in X) \;\; \psi(y) = \int_X f^y d\mu \;\; , \;\; \varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda,$$

آنگاه φ، $G-$اندازه‌پذیر و ψ، $F-$اندازه‌پذیر بوده و

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X\times Y} fd(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda.$$

تعریف ۱-۲-۴۴. (تابع علامت): تابع علامت f را با $sgnf(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$sgnf(x) = \begin{cases} ۱ & f(x) > ۰, \\ ۰ & f(x) = ۰, \\ -۱ & f(x) < ۰. \end{cases} \qquad (۲-۱)$$