بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **الهه بنی اسدی** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه/رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است.

نام و نام خانوادگی دانشجو

الهه بنی اسدی

امضاء

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

محاسبه ضرایب لاپلاسی درخت‌ها، گراف های تک دور، دو دور و سه دور

نگارش:

الهه بنی اسدی

استاد راهنما:دکتر مجتبی قربانی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضیات محض

مهر ۱۳۹۲

شماره: ۳۸۳/۱۴
تاریخ: ۱۳۹۲/۸/۴
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد خانم الهه بنی اسدی رشته ریاضی محض تحت عنوان «محاسبه ضرایب لاپلاسی درخت ها،گراف های تک دور،دو دور و سه دور» در تاریخ ۱۳۹۲/۰۷/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☑ قبول (با درجه عالی امتیاز ۲۰) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

بیست تمام

1. عالی (۲۰-۱۹)
2. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)
3. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)
4. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)
5. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر مجتبی قربانی	مدرس	
داور داخلی	دکتر علی زعیم باشی تاج آبادی	استادیار	
داور خارجی	دکتر علیرضا اشرفی	استاد	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر علی زعیم باشی تاج آبادی	استادیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

همسر بزرگوارم که در محبت و صداقت نمونه است

و

فرزندان عزیزم که درنهایت پاکی ومهروجودیشان اوقات

مختص به خود را دراختیار بنده قراردادند و ...

سپاس گزاری...

بنام خداوند بخشنده مهربان

ستایش و سپاس مخصوص خداوندی است که فراگیری و طلب علم را فطرتاً در وجود آدمی نهاد. بی تردید تهیه این مجموعه را مرهون تلاش و زحمات استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر مجتبی قربانی می‌دانم که در نهایت صبر و شکیبایی، مرا تشویق و راهنمایی نموده و در تمام مراحل مورد لطف و محبت خودشان قرار دادند. به همین لحاظ از این استاد گران‌قدر، خالصانه و از صمیم قلب سپاسگزارم. وظیفه خود می‌دانم به اساتید بزرگوار جناب آقای پرفسور سید علی رضا اشرفی و آقای دکتر علی زعیم باشی که این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار دادند، مراتب تشکر و امتنان را تقدیم دارم و ضمن دعای خیر برای همه آن ها طلب عفو و بخشش تقصیر می نمایم.

چکیده

فرض کنید G یک گراف با ماتریس مجاورت A و D یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن همگی درجات رئوس G اند. در اینصورت ماتریس $L = D - A$ را ماتریس لاپلاسین G نامیده و ریشه‌های چندجمله ای

$$\mu(G, x) = det(xI - L)$$

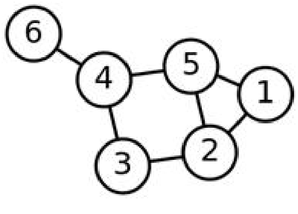
را مقادیر ویژه لاپلاسی گراف G می‌نامیم. ضرایب این چند جمله‌ای را ضرایب لاپلاسی گراف G می‌نامیم. محاسبه ضرایب لاپلاسی با تعداد درخت‌های فراگیر گراف G رابطه‌ی مستقیم دارد. در این پایان نامه ضرایب لاپلاسی گراف‌های تک دور، دو دور و سه دور را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین برخی از ویژگی‌های ضرایب چندجمله ای لاپلاسی درخت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت، تعداد درخت‌های فراگیر گراف‌هایی با اعداد دوری ۰ ، ۱، ۲ و ۳ را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

ماتریس مجاورت – مقادیر ویژه لاپلاسی – چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسی – تطابق کامل – درخت – عدد دوری گراف.

مقدمه

بسیاری از وضعیتهای دنیای واقعی را می‌توان به راحتی به وسیله نموداری متشکل از مجموعه ای از نقاط و خطوطی که زوجهای معیینی از این نقاط را بهم وصل می کند، توصیف کرد. مثلا نقاط می تواند معرف افراد باشند، خطوط واصل بین زوجها می توانند معرف دوستها باشند و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباطی و خطوط، معرف ارتباطهای بین آنها باشند. توجه کنید در چنین نمودارهایی آنچه بیشتر مورد توجه است، آن است که آیا دونقطه‌ی مفروض بوسیله یک خط بهم وصل شده اند یا نه؟ شیوه وصل نقاط بهم مهم نیست. وضعیتهایی ازاین نوع به پیدایش مفهوم گراف منجر شده است. باآنکه ریاضیات قدمت هزارساله دارد عمرگراف کمتراز سیصد سال می باشد. نظریه گراف شاخه‌ای از ریاضیات است که دربارهٔ گراف‌ها بحث می‌کند. این مبحث در واقع، شاخه‌ای از توپولوژی است که با جبر و نظریه ماتریس‌ها پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد. نظریهٔ گراف برخلاف شاخه‌های دیگر ریاضیات نقطهٔ آغاز مشخصی دارد و آن انتشار مقاله‌ای از لئونارد اویلر، ریاضیدان سوئیسی، برای حل مسئله پل‌های کونیگسبرگ در سال ۱۷۳۶ است. پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به ویژه در کاربردهای آن موجب گسترش چشمگیر نظریهٔ گراف شده است به گونه‌ای که هم‌اکنون نظریهٔ گراف ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند **نظریه کدگذاری**، **تحقیق در عملیات**، **آمار**، **شبکه‌های الکتریکی**، **علوم رایانه**، **شیمی**، **زیست‌شناسی**، **علوم اجتماعی** و سایر زمینه‌ها گردیده است. هرشکل یا ساختاری را می‌توان به یک گراف نسبت داد، شکل ۱ را ببینید



شکل ۱: نمونه یک گراف.

هر گراف را می‌توان با n رأس و ماتریس مجاورت A نمایش داد. در این‌صورت چند جمله‌ای

مشخصه گراف G، $\chi(G;x)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(G;x) = det(x\boldsymbol{I} - A(G)) = \prod_{i=۱}^{n}(x-\lambda_i) = \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k c_k \lambda^{n-k}$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ و λ_i، $۱ \leq i \leq n$، مقادیر ویژه G هستند. محاسبه ضرایب از دیرباز از اهمیت ویژه‌ایی برخوردار بوده است .

در این پایان نامه به بررسی این ضرایب می‌پردازیم. در فصل اول که از مراجع [۳ − ۱] استفاده شده است، ابتدا به معرفی برخی مقدمات پرداخته سپس در فصل دوم با استفاده از مرجع [۱۹] به بررسی مقادیر ویژه لاپلاسی درخت‌ها و در فصل سوم با استفاده از مراجع [۲۳، ۲۴] به بررسی مقادیر ویژه لاپلاسی گراف‌های با عدد دوری ۰ و ۱ می‌پردازیم. در نهایت در فصل چهارم توسط نرم افزار $Matlab$ فرمول هایی را برای تعداد درخت‌های فراگیر گراف‌های با عدد دوری ۰، ۱، ۲، ۳ به دست می‌آوریم، همچنین ضرایب چند جمله‌ای مشخصه و مشخصه لاپلاسی برخی از گرافها را محاسبه کرده و درجداولی مجزا نمایش می‌دهیم. مطالب این فصل، حاصل کار نویسنده است.

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

فهرست پیوست

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول، برخی مفاهیم مقدماتی نظریه گراف را بیان می‌کنیم. دربخش دوم، مفاهیم مقادیر ویژه لاپلاسی و چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسی را معرفی می‌کنیم. برای نگارش مطالب این فصل از مراجع [۳ − ۱] استفاده شده است.

۱.۱ مطالبی از نظریه گراف

گراف عبارت است از یک دوتایی مثل $G = (V(G), E(G))$ که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی و متناهی به نام رأس‌ها و $E(G)$ مجموعه‌ای متناهی به نام یال‌هاست. هریال با دو رأس متمایز مشخص می‌شود و دو رأس u و v را مجاور می‌گوییم، هرگاه یک یال آن‌ها را به هم وصل کند. همچنین دو یال e و f را مجاور می‌نامیم، هرگاه در یک رأس مشترک باشند. یال بین دو رأس u و v را با نماد uv و یا $\{u, v\}$ نشان می‌دهیم. همچنین برای سادگی مجموعه رئوس و یال‌ها را به ترتیب با V و E نشان می‌دهیم.

در یک گراف، منظور از **درجه** یک رأس، تعداد یال‌هایی است که آن رأس روی آنها قرار دارد. **مرتبه** یک گراف را تعداد اعضای مجموعه رأس‌ها و **اندازه** گراف را تعداد اعضای مجموعه یال‌ها تعریف کرده و به ترتیب با n و m نشان می‌دهیم. گراف با مرتبه ۰ یا ۱ **بدیهی** و سایر گراف‌ها غیربدیهی‌اند. یک گراف با مجموعه یال‌های تهی را **گراف تهی** می‌نامند. همچنین گراف G را **متناهی** می‌نامیم هرگاه تعداد رأس‌ها و یال‌ها، اعدادی متناهی باشند.

نماد گذاری. در یک گراف مینیمم و ماکسیمم درجه رئوس را به ترتیب با δ و Δ نشان داده و برای هر رأس دلخواه $u \in V$ داریم:

$$\delta \leq deg(u) \leq \Delta.$$

همچنین هر رأس از درجه ۱ را **رأس آویزان** می‌نامند. یال $e = uv$ را آویزان یا برگ می‌نامیم هرگاه $deg(u) = 1$ یا $deg(v) = 1$. **میانگین درجات** رئوس یک گراف n رأسی عبارت است از $\frac{1}{n}\sum_{u\in V} deg(u)$. **طوقه** یعنی یالی که ابتدا و انتهای آن یک رأس باشد. به عبارت دیگر، هرگاه رأس u با خودش مجاور باشد، آن‌گاه uu را یک طوقه می‌نامند.

دو یال با هم **مجاور** اند هرگاه یکی از رأس‌های دو سر یال‌ها با هم برابر باشند. دو یال با هم **موازی** اند هرگاه رأس‌های دو سر یال‌ها با هم برابر باشند. **گراف ساده** $G = (V, E)$ نیز عبارت

است از گرافی که در آن طوقه و یال موازی وجود نداشته باشد. در سراسر این پایان‌نامه، منظور از یک گراف، گرافی ساده و متناهی است.

قضیه ۱.۱.۱. ***(اویلر)*** *فرض کنید G یک گراف با n رأس و m یال باشد. در این‌صورت:*

$$\sum_{i=۱}^{n} deg(v_i) = ۲m.$$

تعریف ۲.۱.۱. گراف G با n راس و m یال را در نظر بگیرید. **ماتریس مجاورت** گراف G ماتریسی $n \times n$ است که درایه‌های آن صفر و یک بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

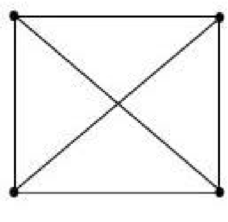
فرض کنید مجموعه رأس‌های گراف G عبارت است از $V(G) = \{\nu_۰, \nu_۱, \ldots, \nu_{n-۱}\}$. در اینصورت ماتریس مجاورت $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ برابر است با:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور باشند} \\ ۰ & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}.$$

بنابراین ماتریس مجاورت گراف G یک ماتریس متقارن است که عناصر روی قطر اصلی آن صفر اند. برای گراف G ماتریس دیگری به نام **ماتریس وقوع** وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_j \text{ واقع بریال } e_i \text{ باشد} \\ ۰ & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}.$$

ماتریس همانی، ماتریسی $n \times n$ است که درایه‌های قطر اصلی یعنی a_{ii} ها $(۰ \leq i \leq n-۱)$ برابر یک و سایر درایه‌ها برابر صفر اند. ماتریس همانی از مرتبه‌ی n را با I_n نشان می‌دهند. همچنین $D(G)$ یک **ماتریس قطری** است که در آن درایه‌های روی قطر اصلی درجه‌های رئوس گراف و سایر درایه‌ها صفراند. گراف ساده‌ای که در آن تمام رئوس دو به دو مجاورند را **گراف کامل** می‌نامند. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهند، شکل ۱.۱ را ببینید.



شکل ۱.۱: گراف کامل $K_۴$.

تعریف ۳.۱.۱. اگر در گراف G درجه همه رئوس برابر k باشد، آنگاه گراف G را k**-منظم** می‌نامیم. منظور از **گراف مکعبی**، گرافی است که درجه رئوس آن ۳ باشد.

برای رأس دلخواه u مجموعه رئوس مجاور با u را با نماد $N_G(u)$ نشان داده و آن را همسایگی باز u می نامیم. همچنین همسایگی بسته u رابا $N_G[u]$ نشان داده و داریم :

$$N_G[u] = \{u\} \cup N_G(u).$$

تعریف ۴.۱.۱. گراف $H = (V(H), E(H))$ را یک **زیرگراف** می‌نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر H زیرگرافی از G باشد که $V(G) = V(H)$ آن گاه H را یک زیرگراف فراگیر G می‌نامیم.

همچنین زیرگراف H از G را **زیر گراف سره‌ی** G گوییم هرگاه $E(H) \neq E(G)$ و $V(H) \neq V(G)$. فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. منظور از گراف $G + uv$ گراف حاصل از افزودن یال جدید uv به G است. همچنین دو زیر گراف H_1 و H_2 از گراف G را **رأس- مجزا** می‌نامیم، هرگاه

$$V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف باشند. **اجتماع دو گراف** G_1 و G_2، گرافی است که در آن $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ و $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$.اجتماع دو گراف G_1 و G_2 را با $G = G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهند.

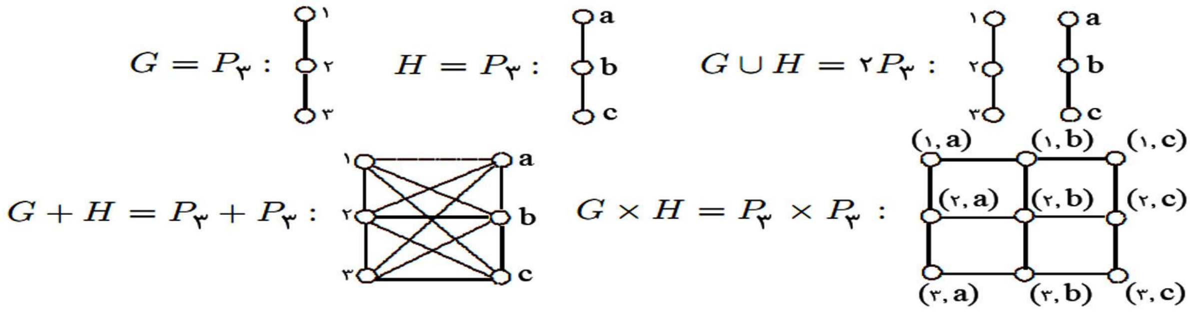
همچنین **الحاق دو گراف** G و H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
فرض کنید G و H دو گراف باشند بطوریکه $E(G) \cap E(H) = V(G) \cap V(H) = \emptyset$. در این‌صورت :

$$V(G + H) = V(G) \cup V(H),$$

$$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy : x \in V(G), y \in V(H)\}.$$

حاصل ضرب دکارتی دو گراف G و H را با $G \times H$ نشان می‌دهیم که در آن مجموعه‌ی رأس‌ها عبارت است از $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ و دو رأس (a, x) و (b, y) مجاورند اگر و فقط اگر $a = b$ و $xy \in E(H)$ یا $x = y$ و $ab \in E(G)$.

مثال ۶.۱.۱. در شکل ۲.۱ به ترتیب اجتماع، الحاق و حاصلضرب دو گراف P_3 و P_3 نمایش داده شده است.



شکل ۲.۱: اجتماع و الحاق و حاصلضرب دو گراف $P_۳$ و $P_۳$.

تعریف ۷.۱.۱. یک **گشت**، عبارت است از دنباله $W := v_۰e_۱v_۱ \dots v_{l-۱}e_lv_l$ به‌طوری‌که جملات دنباله، یک در میان رئوس و یال‌های G بوده و برای $۱ \leq i \leq l$، v_i و$v_{i-۱}$ رئوس انتهایی e_i هستند.

عدد صحیح l را طول گشت w نامیده، رئوس $v_۰$ وv_l رئوس انتهایی و سایر رئوس را رئوس درونی گشت می‌نامند. گشت بدون یال تکراری را **گذر** می‌نامند. اگر رئوس ابتدا و انتهای یک گشت یکی باشند، گشت را **بسته** می‌نامیم. یک **مسیر**، گشتی است که در آن هیچ رأسی تکرار نمی‌شود. همچنین یک مسیر بسته را **دور** می‌نامیم. تعداد یال‌های یک مسیر را **طول آن مسیر** می‌نامیم. همچنین**گراف ستاره** S_n،گرافی با یک راس از درجه $n - ۱$ و سایر رئوس از درجه ۱ است. یک **دور** با $n \geq ۳$ راس، گراف ساده‌ای است که می‌توان رئوس آن را در یک دنباله طوری مرتب کرد که در آن دو راس مجاورند هرگاه عناصر متوالی دنباله باشند، در غیر این‌صورت آن دو راس غیرمجاورند. تعداد یال‌های یک مسیر یا دور، طول مسیر یا دور را مشخص می‌کند. یک دور یا مسیر به طول k را به ترتیب k -دور یا k -مسیرمی‌نامند. ۳- دور را اغلب مثلث و ۴- دور را چهارضلعی می‌نامند. مسیر ودور از مرتبه n را با P_n و C_n نشان می‌دهند.

تعریف ۸.۱.۱. **گراف همبند،** گرافی است که در آن هر دو رأس به وسیله حداقل یک مسیر به هم متصل شده باشند.

همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس گراف G است. به‌عبارت دیگر G همبند است، هرگاه برای هر افراز از مجموعه رئوس G به دو مجموعه ناتهی X و Y، حداقل یک یال با یک انتها در X و انتهای دیگر در Y موجود باشد، در غیر این صورت G **ناهمبند** است.

منظور از **کمر** یک گراف طول کوتاه‌ترین دور در آن گراف است (اگرگراف شامل دور نباشد کمر آن را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم). **فاصله** بین دو رأس u و v طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است و چنانچه مسیری بین این دو رأس نباشد (گراف ناهمبند باشد) فاصله بین دو رأس، بی‌نهایت تعریف می‌شود. برای دو راس دلخواه u و v از گراف G، **طول کوتاه ترین مسیر** بین u و v را با $d(u,v)$

نشان می‌دهیم. مجموع فاصله رأس v با سایر رئوس گراف G را **سهم** v نامیده و با $d_G(v)$ نشان می‌دهند. همچنین **خروج از مرکز** رأس v از گراف همبند G، را با $\varepsilon(v)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(v) = \max_{w \in V(G)} \{d(v, w)\}. \tag{۱.۱}$$

به‌عبارتی خروج از مرکز $\varepsilon(u)$ برای هر رأس u از گراف G برابر با ماکسیمم فاصله رأس u از سایر رئوس گراف است. همچنین **قطر** و **شعاع** یک گراف را به ترتیب با $d(G)$ و $r(G)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d(G) = max\{\varepsilon(u) : u \in V(G)\}$$

و

$$r(G) = min\{\varepsilon(u) : u \in V(G)\}.$$

تعریف ۹.۱.۱. هر زیر گراف بدون دور در گراف را یک **جنگل** و هر جنگل همبند را یک **درخت** می‌نامیم. همچنین منظور از **درخت فراگیر** ، زیرگراف فراگیری است که درخت باشد.
اگر T یک درخت فراگیر G باشد، هر یال از گراف G که در T نباشد را یک **وتر** می‌نامیم.

مثال ۱۰.۱.۱. در شکل ۳.۱ گراف G و زیرگراف‌های فراگیر آن آمده اند.

فرض کنید T یک درخت باشد، T' را درختی می‌گیریم که با حذف رئوس آویزان T به‌دست می‌آید، مطابق شکل ۴.۱، با ادامه این فرآیند، به یک رأس تنها یا دو رأس مجاور می‌رسیم که رأس تنها را **رأس مرکزی** و رئوس مجاور را **رئوس مجاور مرکزی** می‌نامیم. همچنین **رئوس مرکزی** گراف G را با $C(G)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(G) = \{v : \varepsilon(G) = r(G)\}.$$

قضیه ۱۱.۱.۱. *مرکز یک درخت شامل یک رأس تنها یا یک جفت رأس مجاور است.*

برهان. استدلال برای گراف‌های کامل $K_۱$ و $K_۲$ بدیهی است. بنابراین فرض کنید که T درختی با بیش از دو رأس باشد، نشان می‌دهیم مرکزهای T و T' با هم برابراند. به وضوح برای هر رأس v از T فقط یک رأس آویزان می‌تواند خروج از مرکز را بسازد. خروج از مرکز رأس v در گراف T' از