فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم وقضایای اولیه ۴

۱.۱ نگاشت شعاعی ۶

۲.۱ توابع تحلیلی ۱۲

۳.۱ اپراتورهای جابه جا شونده ۱۴

۲ ویژگی های اصلی برد وشعاع عددی در قالب قضایا ۱۹

۳ شبه ضربهای داخلی ۳۴

۴ ارتباط شبه ضربهای داخلی با سایر مفاهیم ۵۲

۱.۴ نامساوی های معکوس از نرم عملگری ۵۳

۵ نامساوی های معکوس در شرایطی از شعاع های عددی ۷۱

چکیده :

در این پایان نامه بعضی نامساوی های مربوط به شعاع عددی نرم عملگرها و ماکزیمم قسمت حقیقی، برای عملگرهای خطی کراندار در فضاهای هیلبرت و تحت شرایط مناسب برای عملگرهای مشمول و همچنین بعضی از نامساوی های ابتدایی برای یافتن کرانهای بالای اختلاف نرم و شعاع عددی برای عملگرهای خطی کراندار با شرایط ویژه در فضاهای هیلبرت آورده شده اند.

کلمات کلیدی : شعاع عددی، نرم عملگر، شبه ضربهای داخلی، ماکزیمم و مینیمم قسمت حقیقی عملگرهای خطی کراندار، جبر باناخ،

مقدمه:

بحث بر روی فضاهای ضرب داخلی همواره مورد توجه دانشمندان علم ریاضی بوده است به گونه ای که پس از سالها تلاش رهیافت های مهمی در این زمینه حاصل شد و دانشمندان توانستند با بررسی بیشتر ومطالعه عمیق تر فضاهای ضرب داخلی خاص را هم شناسایی کنند از جمله اینکه دانشمندی فرانسوی به نام هیلبرت[1] برای اولین بار فضاهای ضرب داخلی با این ویژگی که هر دنباله کشی در آن همگرا می شد را مطرح کرد وبه احترام هیلبرت این فضاها، فضای هیلبرت نامگذاری شد با توجه به کاربرد اساسی این فضاها، فضاهای هیلبرت در راس بسیاری از مقالات علمی جهان قرار گرفت و پاسخگوی بسیاری از مشکلات دانشمندان در این زمینه گردید و حتی بسیاری از آنان پیدایش فضای هیلبرت را انقلابی در علم ریاضی قلمداد می کنند و معتقدند اساس بسیاری از نتایج مهم و معتبر علمی بر فضای هیلبرت و مفاهیم وابسته به آن استوار است.

چندی پس از کشف فضای هیلبرت مفاهیمی همچون برد و شعاع عددی و نرم عملگر متولد شد و در کانون توجه صاحبان اندیشه قرار گرفت و به این ترتیب اهمیت افزون تر فضاهای هیلبرت روشن گردید.

بعدها دانشمندان توانستند پی به وجود فضای شبه ضرب داخلی با ویژگی های اندکی متمایز ببرند و از آنها در مسائل مربوط به عملگرها بهره بگیرند. مطالعات عمیق دانشمندان در این زمینه همچنان ادامه یافت و آنان موفق به کشف زوایای پنهان دیگر مفاهیم ناشی از فضاهای ضرب داخلی هم شدند . گفتنی است هنوز هم این مطالعات ادامه دارد و مبنای پاسخگویی به بسیاری از سوالات می باشد.

اهمیت و جذابیت ویژه این بحث و رویکرد وسیع اندیشمندان و اصحاب علم ریاضی ما را بر آن داشت تا با نگارش این رساله اندک سهمی از مطالعه بر روی مفاهیم مربوط به فضاهای ضرب داخلی و به خصوص مفهوم برد عددی وشعاع عددی داشته باشیم .

این نوشتار بر آن است تا ابتدا با مطرح نمودن مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به عملگرهای تعریف شده بر روی فضاهای ضرب داخلی، مفهوم برد عددی، شعاع عددی، طیف عملگر و نیز ماکزیمم و مینیمم قسمت حقیقی عملگر تعریف شده بر فضای مختلط را به طور کامل شرح دهد سپس در فصل دوم به قضایای کاربردی در این خصوص می پردازد.

در فصل سوم به طور اخص به شبه ضربهای داخلی اشاره شده و نامساوی های معکوس از نرم عملگری مورد

[1] Hilbert

فهرست مندرجات

مطالعه قرار گرفته است در فصل چهارم ارتباط شبه ضربهای داخلی با مفاهیم دیگر بررسی شده است و در نهایت از نامساوی های معکوس در شرایطی از شعاع عددی سخن به میان آمده است .

سکینه امامی

مهر ۱۳۸۹

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم وقضایای اولیه

ابتدا چند مفهوم مهم را بازگو می‌کنیم:

تعریف ۱.۰.۱ فرض کنید $(H, <.,.>)$ یک فضای هیلبرت مختلط باشد برد عددی عملگر A که زیر مجموعه ای از اعداد مختلط می باشد و با $\mathrm{W(A)}$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف ۲.۰.۱

$$W(A) = \{< Ax, x >;\ x \in H\ ,\ \|X\| = ۱\}$$

ویژگیهای اساسی برد عددی:

$$W(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W(A) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$W(A^*) = \{\bar{\lambda};\ \lambda \in W(A)\}$$

$$W(U^*AU) = W(A)$$

که در آن U عملگر یکانی‌است.

تعریف ۳.۰.۱ عملگرU را یکانی گوییم هرگاه

$$UU^* = U^*U = I$$

حال باتوجه به تعریف برد عددی، شعاع عددی یک عملگر راتعریف می کنیم

تعریف ۴.۰.۱ شعاع عددی عملگر A که با$w(A)$ آن را نمایش میدهیم به صورت زیرتعریف می شود

$$w(A) = \sup\{|\lambda| \quad \lambda \in W(A)\} = \sup\{| < Ax, x > |, \quad \| x \| = ۱\}$$

تعریف ۵.۰.۱ طیف عملگر A در قالب مجموعه ای مانند مجوعه مقابل قابل تعریف است:

$\sigma(A) = \{\lambda : \quad \lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I)$ وارون ناپذیر باشد $\}$

تعریف ۶.۰.۱ طیف نقطه تقریبی عملگر A هم که با $\sigma_{app}(A)$ نمایش داده می شود متشکل از اعداد مختلطی چون λ است به طوری که دنباله‌ای از بردارهای یکه f_n موجود باشد که $\| (A - \lambda I)f_n \| \to ۰$ و از آنجا که $W(A)$ محدب است پس داریم $\sigma_{app}(A) \subset W(A)$.

حال فرصت خوبی است که قضایای ابتدایی مربوط به برد عددی و شعاع عددی را مطرح کنیم و کاربرد نتایج حاصل از آنها را در قالب مثال هایی مشاهده کنیم. ذکر این نکته ضروری است که قضایای نگاشت برای برد عددی مشابه قضیه نگاشت طیفی است واین شباهت در بسیاری موارد به محدب بودن برد عددی مربوط می شود . در ادامه با توجه به‌برد و شعاع عددی عملگر A، برد و شعاع عددی $f(A)$ را برای تابع داده شده f محاسبه می کنیم. تاکید می کنیم که بهترین نتایج زمانی حاصل می شود که $f(A)=A^n$ تعریف شود و n عددی طبیعی باشد.

نکته ۷.۰.۱ ذکر این نکته ضروری است که برد عددی توان های مختلف A هرگز به روش مستقیم به هم وابسته نیست مثلاً ممکن است $W(A)$ مشمول در قطاع $\{-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\}$ باشد درحالی که $W(A^2)$ در $\{-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$ واقع نباشد.

۱.۱ نگاشت شعاعی

روابط بسیار ساده ای میان $w(A)$ و$w(f(A))$ در حالت های خاص حاصل می شود، بهترین مثال از این روابط نامساوی توانی می باشد که در قالب قضیه ای به آن می پردازیم.

قضیه ۱.۱.۱ [1] فرض کنید A یک عملگر باشد و $w(A)\leq 1$ آنگاه $w(A^n)\leq 1$ برای $n=1,2,3,\ldots$.

اثبات:ابتدا توجه کنید از آنجا که $w(A)\leq 1$ برای هر $z\in\mathbb{C}$ با شرط$|z|<1$ داریم:

$$Re<(I-zA)x,x>=\|x\|^2-Re<zAx,x>\geq\|x\|^2(1-|z|)\geq 0$$

از طرف دیگر وقتی که $Re<(I-zA)x,x>\geq 0$ برای هر $z\in\mathbb{C}$، $|z|<1$ می توانیم z را $te^{i\alpha}$ فرض کنیم و نیز با فرض $t\to 1$، $Re<e^{i\alpha}Ax,x>\leq\|x\|^2$ و بنابراین $w(A)\leq 1$.(با توجه به رابطه $|<Ax,x>|\leq w(A)\|x\|^2$) در نتیجه هرگاه $I-zA$ وارون پذیر باشد، داریم:

$$Re<(I-zA)x,x>\geq 0,\quad\forall x\in H\Longleftrightarrow Re<(I-zA)^{-1}y,y>\geq 0,\quad\forall y\in H$$

این رابطه هم با استفاده از$x=(I-zA)^{-1}y$ حاصل می شود به این ترتیب که

$$Re<(I-zA)x,x>\geq 0,\quad\forall x\in H\Longleftrightarrow Re<y,(I-zA)^{-1}y>\geq 0$$

[1] power inequality

$$\Longleftrightarrow Re\overline{< (I-zA)^{-1}y, y >} \geq 0 \Longleftrightarrow Re < (I-zA)^{-1}y, y > \geq 0$$

توجه کنید $r(A) \leq 1$ و $I - zA$ وارون پذیر است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که برای هر x متعلق به H

$$Re < (I - z^n A^n)^{-1}x, x > \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$$

با استفاده از اتحاد زیر داریم

$$(I - z^n A^n)^{-1} = \frac{1}{n}[(I - zA)^{-1} + (I - wzA)^{-1} + ... + (I - w^{n-1}zA)^{-1}]$$

که در آن w ریشه nام ۱ می باشد و از آنجا که برای هر عملگر $(I - w^k zA)^{-1}$ داریم:

$$Re < (I - w^k zA)^{-1}x, x > \geq 0, \quad \forall x \in H$$

نتیجه می گیریم که

$$Re < (I - z^n A^n)^{-1}x, x > \geq 0, \quad \forall x \in H$$

و بنابراین

$$Re < (I - z^n A^n)x, x > \geq 0, \quad \forall x \in H, |z| < 1$$

ونهایتاً $w(A^n) \leq 1$.

بنابراین شرایط معادل برای $w(A) \leq 1$ با توجه به اثبات بالا به شکل زیر حاصل می شود

$$w(A) \leq 1 \Longleftrightarrow Re(I - zA)x, x > \geq 0 \Longleftrightarrow Re < (I - zA)^{-1}x, x > \geq 0 \qquad (1)$$

برای $x \in H, |z| \leq 1$.

دوشرط معادل دیگر به قرار زیر است:

$$Re < (I + zA)x, x > \geq 0, \quad \forall x \in H, |z| < 1$$

.

$$Re < zA(I-zA)^{-1}x, x > \geq 0, \quad \forall x \in H, |z| < 1$$

قضیه ای که در اینجا مطرح می کنیم به قضیه گسترش توانی [2] معروف است

قضیه ۲.۱.۱ اگر U عملگر یکانی روی فضای هیلبرت K بوده و P تصویر K روی H باشد و $H \subset K$ در این صورت

$$w(A) \leq 1 \iff A^n = 2PU^nP \quad n = 1, 2, \cdots$$

.

قبل از اثبات یاد آور می شویم که عملگر U را یکانی می نامیم هرگاه داشته باشیم $U^*U = UU^*$.

اثبات : با فرض $w(A) \leq 1$ و از آنجا که $r(A) \leq w(A)$ داریم $r(A) \leq 1$، عملگر $(I-zA)^{-1}$ برای $|z| < 1$ موجود است. عملگر تابع مقدار $F(z) = (I-zA)^{-1}$ را در نظر می‌گیریم که روی دیسک $\{|z| < 1\}$ تحلیلی $F(0) = I,$ $ReF(z) \geq 0$ و(با توجه به قضیه ریس) یک فضای هیلبرت $H \subset K$ وهمچنین عملگر یکانی U چنان موجوداست که:

$$F(z) = P(I_k + zU)(I_k - zU)^{-1} \quad |z| < 1$$

که با بسط سری داریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= P[(I_k + zU)\sum_{n=0}^{\infty}(zU)^n] \\
&= P[\sum_{n=0}^{\infty}(zU)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(zU)^n] \\
&= P[I + \sum_{n=1}^{\infty}(zU)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(zU)^n \\
&= P[I + \sum_{n=1}^{\infty} 2(zU)^n]
\end{aligned}$$

---

[2] power dilation

$$= P[I_k + 2zU + 2z^2U^2 + \cdots]$$
$$= I_H + zA + z^2A^2 + \cdots$$

(در صورتی که در سطر بالا P را از راست ترکیب کنیم) با برابر قرار دادن ضرایب به رابطه $A^n = 2PU^nP$ می رسیم.

سری $I_H + zA + z^2A^2 + ...$ برای $|z| < 1$ همگراست و مساوی با $(I_H - zA)^{-1}$ از طرف دیگر وجود فضای هیلبرت K وعملگر یکانی U روی K بطوریکه $A^n = 2PU^nP$ نتیجه می دهد که سری $I_k + 2zU + 2z^2U^2 + ...$ برای $|z| < 1$ همگراست وبنابراین سری $I_H + zA + z^2A^2 + ...$ برای $|z| < 1$ همگرا در نرم است و برابر با $(I - zA)^{-1}$.
حال عبارت $< (I_k + zU)(I_K - zU)^{-1}y, y >$ را با فرض $y = (I_K - zU)x$ محاسبه‌می کنیم، در این صورت داریم:

$$Re < (I_k + zU)(I_K - zU)^{-1}y, y >= Re < (I_k + zU)x, (I_K - zU)x >= (1 - |z|^2) \parallel x \parallel^2 \geq 0$$

برای $|z| < 1$.

بنابراین برای $|z| < 1$ داریم $0 \leq < (I - zA)^{-1}x, x >$ (با توجه به تعریف $(F(z)$) و با توجه به رابطه ای که قبلاً معرفی شد $w(A) \leq 1$.

یکی از فوری ترین کاربردهای قضیه قبل ارتباط میان $w(A)$ و$w(f(A))$ است، وقتی که f تحلیلی باشد. حال در قالب قضیه ای به این ارتباط می پردازیم.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید f روی $|z| < 1$ تحلیلی و روی مرز $|z| = 1$ پیوسته باشد. همچنین $f(0) = 0$ باشد هرگاه $|f(z)| \leq 1$ برای $|z| \leq 1$ و $w(A) \leq 1$ آن گاه $w(f(A)) \leq 1$.

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم که $\lim_{r\to 1} f(rA)$ موجود است .

قرار دهید $U = \int e^{i\lambda} dE(\lambda)$ و $A^n = ۲PU^nP$ برای $n = ۱, ۲, ...$ آنگاه

$$\begin{aligned} f(rA) = \sum a_n r^n A^n &= ۲P(\sum a_n r^n U^n)P \\ &= ۲P[\int \sum a_n r^n e^{in\lambda} dE(\lambda)]P \\ &= ۲P[\int f(re^{i\lambda} dE(\lambda)]P \end{aligned}$$

با استفاده از پیوستگی f می توانیم نتیجه بگیریم که

$$\lim f(rA) = ۲P[\int f(e^{i\lambda}) dE(\lambda)]P = ۲Pf(U)P$$

$$[f(A)]^n = ۲P[(fU)^n]P$$

که $f(U)$ انقباض بوده و گسترش یکانی دارد بنابر این با توجه به قضیه گسترش توانی $w(f(A)) \leq ۱$.

در این بخش بعضی از قضایای نگاشت مربوط به برد عددی را مطرح می کنیم و به بررسی ارتباط بین $W(A)$،$W(f(A))$، در حالتی که f تحلیلی باشد، می پردازیم .

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید $f(z)$ روی ناحیه $D = \{z : |z| \leq ۱\}$ تحلیلی باشد و f نگاشتی از D به توی $P = \{z : Rez \geq ۰\}$ باشد، اگر $W(A) \subset D$ باشد آنگاه $W(f(A)) \subset P - Ref(۰)$.

ابزار اساسی که در اثبات این قضیه از آن بهره می گیریم تعریفی است که به صورت زیر برای $f(z)$ ارائه می دهیم:

$$f(z) = iImf(۰) + \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} [Ref(e^{it})] \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

با یک محاسبه ساده داریم:

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{۲e^{it} + z - e^{it}}{e^{it} - z} = \frac{۲e^{it}}{e^{it} - z} - ۱ =$$

$$۲(۱-e^{-it}z)^{-۱}-۱$$

بنابر این داریم

$$f(z)=iImf(\circ)+\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}[Ref(e^{it}[۲(۱-e^{-it}z)^{-۱}-۱]dt$$
$$=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}[Ref(e^{it})](۱-e^{-it})z)^{-۱})dt-f(\circ)$$

(توجه کنید که طبق قضیه‌ای در توابع مختلط داریم $(\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}f(e^{it})dt=f(\circ)$)

با جاگذاری عملگر A به جای z وبا $Real$ گرفتن از رابطه قبل به تساوی زیر می رسیم:

$$Ref(A)=-Ref(\circ)+\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}[Ref(e^{it}][I-e^{-it}A]^{-۱}] \quad (۲)$$

با استفاده از (۱)داریم $Re(I-e^{-it}A)^{-۱}\geq\circ$ واز آنجا که f تابعی از D به توی P می باشد (بنا بر تعریف P) داریم $Ref(e^{it})\geq\circ$، بنابر این انتگرال سمت راست رابطه(۲) مثبت و در نتیجه $Ref(A)\geq-Ref(\circ)$ و از آنجا

$$W(f(A))\subset P-Ref(\circ)$$

زیرا

$$Re(f(A)+f(\circ))\geq\circ$$

$$W(f(A)+f(\circ))\subset W(f(A)+W(f(\circ))\subset P\Rightarrow W(f(A))\subset P-Ref(\circ)$$

نتیجه ۵.۱.۱ فرض کنید $f(z)$ روی $D=\{z:Rez\geq\circ\}$ تحلیلی باشد و نگاشت f از D به توی D تعریف شده‌باشد، اگر $f(\circ)=\circ$ و$W(A)\subset D$ آنگاه $W(f(A))\subset D$.

اثبات : براحتی می توانیم تحقیق کنیم که $g(z)=\frac{۱+af(z)}{۱-af(z)}$ برای هر$a\in\mathbb{C}$ و$|a|<۱$ نگاشتی از D به توی D می باشد. علاوه بر این $g(\circ)=۱$ بنابر این با استفاده از قضیه قبل داریم $W(g(A))\subset P-۱$ بنابراین

$Re[g(A)+1] \geq 0$، اما $g(A)+1 = 2[I-af(A)]^{-1}$ و بنابراین $Re[I-af(A)] \geq 0$ واز آنجا که a دلخواه می باشد می توانیم نتیجه بگیریم که

$$Re[I-e^{i\theta}f(A)] \geq 0, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

.

۲.۱ توابع تحلیلی

پیشتر دیدیم که شعاع عددی تحت نگاشت بهتر از برد عددی رفتار می کند حال دو عملگر جبری اساسی جمع وضرب ورفتار برد و شعاع عددی با این دو را بیشتر مورد توجه قرار می دهیم. برد عددی زیر جمعی است، یعنی رابطه شمول به صورت زیر برقرار است:

$$W(A+B) \subset W(A)+W(B)$$

قضیه ۱.۲.۱ اگر $0 \notin \overline{W(A)} \Rightarrow \sigma(A^{-1}B) \subset \frac{\overline{W(B)}}{\overline{W(A)}} = \{\frac{\lambda}{\mu}; \quad \lambda \in \overline{W(B)},\ \mu \in \overline{W(A)}\}$

اثبات: از آنجا که $0 \notin \overline{W(A)}$ و $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ بنابر این $0 \notin \sigma(A)$ و این یعنی A معکوس پذیر است. حال فرض کنیم $\lambda \in \sigma(A^{-1}B)$ بنابر این $0 \in \sigma(A^{-1}B-\lambda I)$ و چون $A^{-1}B-\lambda I = A^{-1}(B-\lambda A)$، بنابر این اگر $0 \in \sigma(A^{-1}B)$ آنگاه $0 \in \sigma(B-\lambda A)$ و در نتیجه $0 \in \overline{W(B-\lambda A)}$ یا معادلا $\lambda \in \frac{\overline{W(B)}}{\overline{W(A)}}$ (زیرا برای یک x داریم
$(<(B-\lambda A)x,x>=0 \Rightarrow <Bx,x>-\lambda<Ax,x>=0 \Rightarrow B<x,x>=\lambda<Ax,x> \Rightarrow \lambda = \frac{<Bx,x>}{<Ax,x>}$
وبه این ترتیب حکم ثابت می شود.

تعریف ۲.۲.۱ یک اپراتور راپایا به طور مثبت نامیم، هرگاه همه عناصر متعلق به طیف آن در نیم صفحه راست باشد. در حالت خاص یک اپراتور خود الحاق پایاست هرگاه معین مثبت باشد (یعنی برای هر x داشته باشیم $<Ax,x> > 0$).

قضیه ۳.۲.۱ هرگاه P معین مثبت و A پایا باشد آنگاه PA پایاست .

اثبات : با استفاده از قضیه قبل $\sigma(PA)=\sigma[(P^{-1})^{-1}A]\subset\frac{\overline{W(A)}}{\overline{W(P^{-1})}}$ واز آنجا که $\overline{W(P^{-1})}=(\overline{W(P)})^{-1}$ فقط عناصر مثبت حقیقی را دارد، $W(A)$ هم عناصری با قسمت حقیقی مثبت را دارد. بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم PA پایاست و از آنجاکه P و A وارون پذیر ند بنابراین PA وارون پذیر است.

برای مطالعه و بررسی بیشتر تجزیه قطبی اپراتور A را به صورت $A=UP$ در نظر می گیریم که درآن هرگاه A وارون پذیرباشد، آنگاه U یکانی و P معین مثبت است.

تعریف ۴.۲.۱ اپراتوریکانی U محصور (مقید) نامیده می شود، هرگاه‌طیف آن مشمول در کمانی از دایره یکه با زاویه مرکزی کمتر از π باشد.

قضیه ۵.۲.۱ اگر $0\notin\overline{W(A)}$ آن گاه قسمت یکانی A محصور می باشد.

اثبات : فرض کنید $A=UP$ و$0\notin\overline{W(A)}$ نتیجه می گیریم که مجموعه محدب $W(A)$ مشمول در قطاعی چون S از دایره یکه می باشد و داریم :

$$S=\{re^{i\theta};\ r>0;\ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2\}$$

به طوری که اختلاف θ_1 وθ_2 کمتر از π باشد یعنی $\theta_2-\theta_1<\pi$، بنابراین $U=AP^{-1}$ و بنابراین $0\notin\overline{W(A^{-1})}$ (زیرا اگر $0\in\overline{W(A^{-1})}$ آنگاه دنباله ای از عناصر $W(A^{-1})$ موجود است که به صفر میل می کند و داریم $<A^{-1}x,x>\to 0$ قرار می دهیم $A^{-1}x=y$ بنابراین $x=Ay$ در نتیجه $<y,Ay>\to 0$ و از آنج اکه $<Ay,y>=\overline{<y,Ay>}$ واین متناقض با اینکه $0\notin\overline{W}(A)$. حال با استفاده از قضیه ابتدای این بخش داریم :

$$\sigma(U)\subset\frac{\overline{W(P^{-1})}}{\overline{W(A^{-1})}}$$

توجه کنید که $\overline{W(P^{-1})}$ یک بازه بسته روی $\mathbb{R}$ می باشد(ازآنجا که برد عددی محدب می باشد و محدب ها در $\mathbb{R}$ به شکل بازه می باشند و نیز با توجه به اینکه $<P^{-1}x,x>=<y,Py>=\overline{<Py,y>}$ چون P معین مثبت می باشد $<Py,y>>0$ می توان صحت این گفته را به اثبات رساند.)

اگر $Z\in W(A^{-1})$ داریم $Z=<A^{-1}x,x>$ برای بعضی از x ها با $\|x\|=1$ ، بنابراین $Z=<y,Ay>$ که $y=Ax$. می دانیم که $\arg<y,Ay>=-\arg<Ay,y>$ بنابر این $\frac{W(P^{-1})}{W(A^{-1})}$ مشول در یک قطاع از دایره باشند $\theta_1\subset\theta\subset\theta_2$. بنا بر این $\sigma(U)$ مشمول در مجموعه $S=\{e^{i\theta}:\ \ \theta_1\subset\theta\subset\theta_2\}$ می باشد.

در ادامه خواهیم گفت در حالتی که A وB یکانی هستند می توانیم $\overline{W(AB)}$ را به طور دقیق محاسبه کنیم، به این ترتیب که می توان فرض کرد $0\notin W(A)\cap W(B)$ که معادل با این است که یکی از اپراتورها طیفی با طول کمان کمتر ازπ دارد یا یکی از اپراتورها محصور می باشد.

۳.۱ اپراتورهای جابه جا شونده

در این بخش بعضی از نتایج مربوط به $W(AB)$ و $w(AB)$ را در حالتی که$AB=BA$ ارایه می کنیم. مثال هایی وجود دارند که نشان می دهند نمی توانیم یک روش کلی و عمومی برای برد عددی ضرب عملگرها داشته باشیم اما در حالت خاص می توان برد عددی ضرب عملگرها را تعیین نمود.

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنید A عمگری خود الحاقی و نامنفی باشد وداشته باشیم $AB=BA$، آنگاه

$$W(AB)\subset W(A)W(B)$$

$<ABx,x>=<BA^{\frac{1}{2}}x,A^{\frac{1}{2}}x>$ که $A^{\frac{1}{2}}$ جذر نامنفی A است، بنابراین

$$<ABx,x>=<Bg,g>\|A^{\frac{1}{2}}x\|^{2}=<Bg,g><A^{\frac{1}{2}}x,A^{\frac{1}{2}}x>=<Bg,g><Ax,x>$$

که $g=\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}$ یکه است و $A^{\frac{1}{2}}x$ مخالف صفر می باشد.

بسیاری از نتایج حاصل از قضیه نامساوی توانی برای شعاع عددی ضرب عملگرها مورد انتظار هستند.

مثال های ساده ای هستند که نشان می دهند گاهی $w(AB)$ می تواند از $w(A)$ $w(B)$ فراتر رود، یکی از حالت هایی که این فرایند در مورد آن اتفاق می افتد زمانی است که A وB با هم جا به جا شوند.

مثال ۵ فرض کنید A ماتریسی به شکل زیر باشد

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

با استفاده از رابطه ای که قبلاً معرفی شد، داریم:

$$w(A) = \cos(\frac{\pi}{۵}) = ۰.۸۰۹۰۱۶۹۹$$

از طرفی یک محاسبه ساده نشان می دهد که $w(A^۲) = w(A^۳) = ۰.۵$ به این ترتیب داریم:

$$۰.۵ = w(A.A^۲) > w(A)w(A^۲) = ۰.۴۰۴۵۰۸۵$$.

قضیه ۲.۳.۱ فرض کنید A و B دو عملگر دلخواه باشند، همواره داریم:

$$w(AB) =\leq ۴w(A)w(B)$$

و چنانچه $AB = BA$ داریم :

$$w(AB) \leq ۲w(A)w(B)$$

اثبات : از هم ارزی نرم در قضیه‌ای که بعداً آن را آورده ایم $w(T) \leq\| T \|\leq ۲w(T)$ داریم:

$$w(AB) \leq\| A \|\| B \|\leq ۴w(A)w(B)$$

در حالت جا به جایی می توانیم فرض کنیم $w(A) = w(B) = ۱$ و نشان می دهیم $w(AB) \leq ۲$، زیرا از همان قضیه می دانیم که شعاع عددی یک نرم است. بنابر این با استفاده از نامساوی مثلثی و قضیه نامساوی توانی و زیر جمعی بودن w داریم:

$$w(AB) = w(\tfrac{1}{4}[(A+B)^2-(A-B)^2]) \leq \tfrac{1}{4}[w((A+B)^2)+w((A-B)^2)]$$
$$\leq \tfrac{1}{4}[(w(A+B))^2+(w(A-B))^2]$$
$$\leq \tfrac{1}{4}[(w(A)+w(B))^2+(w(A)+w(B))^2] = 2$$

در قسمت بعدی حالت هایی را که در آن A وB دوبل جا به جایی هستند رابررسی خواهیم کرد.

تعریف ۳.۳.۱ A وB دوبل جا به جایی نامیده می شوند، هرگاه $AB = BA$ و $AB^* = B^*A$. با درنظر گرفتن وابستگی ها B وA هم دوبل جا به جایی هستند. تحت این فرضیات ممکن است تصور کنیم که همواره $w(AB) \leq w(A)w(B)$ می باشد، اما این تصور تصوری نادرست و فریبنده است و می توان ثابت کرد تحت شرایط فوق الذکر داریم: $w(AB) \leq w(A) \parallel B \parallel$.

حال پیش از اثبات این گفته، دو لم مهم را مطرح می کنیم .

لم ۴.۳.۱ فرض کنید A عملگری یکانی باشد که با اپراتور دیگر جا به جا می شود، آنگاه داریم:

$$w(AB) \leq w(B)$$

.

اثبات : فر ض کنید $w(B) = 1$ داریم:

$$< (I - zB)f, f > \geq 0 : |z| \leq 1$$

(زیرا ،

$$< (I - zB)f, f > = < f, f > - z < Bf, f > = \parallel f \parallel^2 - z < Bf, f >$$

و همچنین $< Bf, f > \leq w(B)$ و $\parallel f \parallel = 1$) و در حالت خاص $< (I - e^{i\theta}B)f, f > \geq 0$ برای $\theta \in [0, 2\pi]$، بنابر این

$$\int_0^{2\pi} < (I - e^{i\theta}B)f, f > dE_\theta \geq 0$$

که در آن $\{E_\theta\}$ خانواده طیفی برای A روی پاره خط $0 \leq \theta \leq 2\pi$ می باشد. می توان خانواده E_θ را با دنباله ای از چند جمله ای ها در A و A^* تقریب زد. از آنجا که A و A^* با B جا به جا می شوند و انتگرال و ضرب داخلی (نسبت به زاویه هادی خود) پیوسته هستند، داریم:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} < (I - e^{i\theta}B)f, f > dE_\theta$$
$$=< (I - AB)f, f >= (< f, f > - < ABf, f >$$
$$=\| f \|^2 - < ABf, f >, \| f \|= 1)$$

وبه این ترتیب حکم ثابت می شود.

لم ۵.۳.۱ فرض کنید A یک ایزومتری (حافظ نرم) باشد و $AB = BA$ آنگاه $w(AB) \leq w(B)$.

اثبات: $A^*A = I$ وبنابر این $< ABf, f >=< A^*AABf, f >=< ABAf, Af >$، بنابر این لازم است که ما تحدید به $R(A)$ را در نظر بگیریم که $R(A)$ بسته است. یادآوری می کنیم که روی برد A، A یکانی است زیرا $A^*A = I$ وبرای هر $f = Ag \in R(A)$ داریم: $AA^*f = AA^*Ag = Ag = f$ بنابراین $AA^* = I$ روی $R(A)$ از آنجاکه A روی $R(A)$، یکانی است بنابر لم قبلی $w(AB) \leq w(B)$ روی $R(A)$.

قضیه ۶.۳.۱ [3] هرگاه عملگرهای A و B دوبل جا به جایی باشند، آن گاه

$$w(AB) \leq w(B) \| A \|$$

اثبات : بدون آن که از کلیت کاسته شود می توانیم در نظر بگیریم ، $\| A \| < 1$، آن گاه کافی است ثابت کنیم که $w(AB) \leq w(B)$، قرار دهید $D = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$ که D جذر مثبت می باشد حال عملگرهای S و T را روی $K = H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus ...$ به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$S(f_1, f_2, f_3, ...) = (Af_1, Df_1, f_2, f_3, ...)$$

$$T(f_1, f_2, f_3, ...) = (Bf_1, DBD^{-1}f_2, DBD^{-1}f_3, ...)$$

[3] DOUBLE COMMUTE

که S و T جا به جا می شوند و S یک ایزومتری است D^{-1} هم با B جا به جامی شود، از آن جا که $D^{2} = I - A^*A$

$$\| sf \|_k^{2} = \| Af_{1} \|^{2} + \| Df_{1} \|^{2} + \| f \|_k^{2} - \| f_{1} \|^{2} = \| f \|_k^{2}$$

با استفاده از لم دوم داریم :

$$w_k(ST) \leq w_k(T)$$

(S و T توسیعی از A و B می باشند). ازآن جا که برد عددی عملگر جمع مستقیم پوش محدب جمعوند بردهای عددی است، داریم:

$$w(AB) \leq w_k(ST)$$

و ST گسترش AB می باشد وعلاوه بر این

$$w_k(T) = \max\{w(B), w(DBD^{-1})\} = w(B)$$

.

نتیجه ۷.۳.۱ فرض کنید A عملگری نرمال باشد که با B هم جا به جا می شود، آن گاه

$$w(AB) \leq w(A)w(B)$$

.

پیش از اثبات تعریف عملگر نرمال را یاد آوری می کنیم

عملگر A که دامنه آن بطور چگالی تعریف شده است را روی فضای هیلبرت H نرمال گوییم هرگاه $D(T) = D(T^*)$ و برای هر $f \in D(T)$، $\| Tf \| = \| T^*f \|$.

اثبات: با استفاده از قضیه A با B و B^* جا به جا می شود و وقتی که A نرمال باشد $w(A) = \| A \|$. بنا بر این حکم اثبات می شود.

فصل ۲

ویژگی های اصلی برد وشعاع عددی در قالب قضایا

برد عددی ویژگی های بسیاری دارد که بحث بر روی تمامی این ویژگی ها فرایندی بسیط وگسترده است و نمی توان همه آنها را در این مبحث برشمرد با این وجود در ادامه هر جا که لازم باشد به بیان این ویژگی ها خواهیم پرداخت. در اینجا چند ویژگی مهم دیگر برد عددی را در قالب قضایایی کاربردی بازگو می کنیم. پیش از آنکه ویژگی اول را مطرح کنیم یک لم مهم را با عنوان لم بیضی بیان می کنیم:

لم ۸.۰.۲ (لم بیضی) [۱] فرض کنید A عملگری روی یک فضای دو بعدی باشد آنگاه $W(A)$ بیضی خواهد بود که کانونهایش مقادیر ویژه A هستند.

برهان . بدون اینکه از کلیت کاسته شود می توانیم A را یک ماتریس بالا مثلثی به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

---

[۱] Ellipse Lemma