دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مضروب‌ها برای فضاهای Lp از یک ابرگروه

نگارش

زهره قاسمی ازغندی

استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

شهریور ماه ۱۳۸۸

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

قدردانی

در آغاز از خداوند بلند مرتبه سپاسگزارم که مرا در وادی علم پروراند، سپس سلام می‌دهم به حاضرترین غایبان عالم، حجت خدا بر روی زمین؛ با این امید که حرکت در راه علم‌مان اسباب خرسندی خاطر عزیزش را فراهم آورد.

همچنین از استاد راهنما دکتر غفاری و استاد مشاور دکتر بیدخام و اساتید گرامی که همواره در طول تحصیل مرا به سوی چشمه‌های علم هادی بودند متشکرم.

در پایان از مادر و پدر عزیز و همسر همراه و مهربانم به خاطر حمایت معنویشان نیز قدردانی می‌کنم.

تقدیم به :

مهر مادر

و

عشق پدر

و

فداکاری همسر

چکیده

فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. ما در این پایان نامه، زیر مجموعه‌ی محدب بسته K از $L_p(G)$ برای $1 \leq p \leq \infty$، که تحت همه انتقال‌های راست یا چپ پایا باشند را مشخص می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که اگر G نافشرده باشد، $K = \{0\}$، تنها زیر مجموعه‌ی پایای محدب فشرده (فشرده‌ی ضعیف) ناتهی از $L_p(G)$ ($L_1(G)$) است. همچنین ما نگاشت‌های آفین پیوسته از $P_1(G)$ به توی زیر مجموعه‌ی پایای کراندار بسته از $L_p(G)$ که با انتقال‌ها جابه‌جا می‌شوند را تعیین می‌کنیم. این پایان نامه شامل تعدادی کاربرد برای مضروب‌ها از $L_p(G)$ به $L_q(G)$ است.

در آخر ما تمام نتایج فوق را به جبر ابرگروه‌ها بسط می‌دهیم. فرض می‌کنیم K یک ابرگروه با اندازه‌ی هار باشد. ما خواصی از زیر مجموعه‌های پایای محدب بسته از $L_p(K)$، $1 \leq p \leq \infty$، را بررسی می‌کنیم و از مطالعه روی مضروب‌ها برای $L_p(K)$ نتایجی را بدست می آوریم. می‌دانیم که مانند مبحث گروه‌ها، میانگین پذیری (توپولوژیکی) چپ با ایستایی (توپولوژیکی) راست روی ابرگروه‌ها هم‌ارزاند. مبنی بر این حقیقت، ما میانگین پذیری روی ابرگروه‌ها را با یک خاصیت ارگودیک که نوع دیگری از شرط ریدر—گلیکس‌برگ از مبحث گروه‌هاست مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

ابرگروه، اندازه هار، ایستایی، پایایی، تابع مدولار، ضرب پیچشی، فضای L_p، میانگین‌پذیری.

مقدمه

این پایان نامه شامل پنج فصل است، که هر فصل به یک یا چند بخش تقسیم شده است.

در فصل اول به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز پرداخته شده است. این مفاهیم و قضایا برگرفته شده از آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک است.

در بخش اول و دوّم از فصل دوّم، به بیان چند لم و نتیجه تکنیکی پرداخته شده است، که به ساده‌تر شدن برهان برخی قضایا کمک می‌کنند.

در بخش سوّم، زیرمجموعه‌های پایا از فضای $L_p(G)$ بررسی شده‌اند. لم ۱.۳.۲ بیان می‌کند که زیر مجموعه‌ی خطی بسته I از $L_1(G)$ یک ایدال چپ (راست) است اگر و تنها اگر پایای چپ (راست) باشد؛ که در قضیه‌ی بعد، خاصیت فوق روی زیر مجموعه‌های محدب بسته از $L_q(G)$ برای $1 \leq q < \infty$ و روی زیر مجموعه‌های محدب ضعیف ستاره بسته از $L_\infty(G)$، با اعمال یک شرط، تعمیم داده شده است. در ادامه با فرض G فشرده و $1 < p < \infty$، ثابت شده است که برای هر $f \in L_p(G)$ عملگر $h \longrightarrow h * f$ ($h \longrightarrow f * h^*$) از $L_1(G)$ به $L_p(G)$ فشرده است. در قضایای آخر نیز بیان شده است که اگر G گروه فشرده‌ی موضعی نافشرده و $1 < p < \infty$؛ آن‌گاه هر زیر مجموعه‌ی پایای راست یا چپ محدب بسته K از $L_p(G)$ لزوماً شامل صفر است و اگر K فشرده باشد، آن‌گاه K باید بدیهی باشد؛ یعنی تنها شامل صفر باشد. همین‌طور نشان داده شده است که مجموعه‌ی $K = \{0\}$ تنها زیر مجموعه‌ی پایای راست یا چپ محدب فشرده‌ی ضعیف ناتهی از $L_1(G)$ است. در این فصل مرجع اصلی [۱۵] است.

در فصل سوم به بررسی نگاشت آفین پیوسته T از زیر مجموعه‌ی پایای چپ (راست) محدب بسته A از $L_q(G)$، $1 \leq q \leq \infty$، به توی یک زیر مجموعه‌ی پایای محدب بسته B از $L_p(G)$، $1 \leq p \leq \infty$، پرداخته شده است. چنین نگاشت‌هایی در حالتی مشخص شده‌اند که A مجموعه‌ی تمام اندازه‌های دلخواه مشمول در $L_1(G)$ و B هر زیر مجموعه‌ی پایای چپ (راست) محدب کراندار بسته از $L_p(G)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ باشد. در این زمینه مرجع اصلی [۱۵] است.

نتایج زیادی در مقدمه‌ی آنالیز هارمونیک روی گروه‌های فشرده‌ی موضعی موجود است که درباره‌ی

مضروب‌ها روی فضاهای دلخواه از توابع بحث کرده‌اند.

بررسی روی مضروب‌ها از $L_1(G)$، در ساختارهای ابتدایی توسط وندل [1] انجام گرفت و ساکای[2] مضروب‌های فشرده روی $L_1(G)$ را مورد مطالعه قرار داد، وی ثابت کرد اگر G نافشرده باشد صفر تنها مضروب فشرده ضعیف روی $L_1(G)$ است. برعکس، آکمان[3] نشان داد، اگر G فشرده باشد آن‌گاه هر مضروب روی $L_1(G)$ فشرده است، و تمامی این نتایج توسط قهرمانی[4] و مدقالچی[5] روی ابرگروه‌ها بسط داده شد. برای $1 \leq p \leq \infty$، مضروب‌ها از $L_1(G)$ به $L_p(G)$ توسط braیند [6] و ادوارد [7] بررسی شدند.

لائو [8] مجموعه‌های محدب بسته از $L_p(G)$ برای $1 \leq p \leq \infty$، را مورد مطالعه قرار داد، که این موضوع در فصل‌های ۲ و ۳ بیان شده است. هم‌چنین وی با دسته بندی کردن یافته‌های خویش و نتایج به‌دست آمده از گذشته درباره‌ی عملگرها روی $L_p(G)$، به نتایج جالبی در مورد نگاشت‌های آفین رسید.

هدف اصلی فصل چهارم، بسط نتایج لائو به مضروب‌ها روی فضاهای L_p از ابرگروه‌هاست. پیشرفت کار روی ابرگروه‌ها با کارهای دانکل [9] و اسپکتور [10] و جویت [11] صورت گرفت. آن‌ها ابرگروه‌ها را به دست راست آنالیز هارمونیک تبدیل کردند. در این پایان نامه، ابرگروه K همواره همراه با اندازه‌ی هار در نظر گرفته شده است. اگر چه هنوز مشخص نیست که یک ابر گروه دلخواه اندازه‌ی هار می‌پذیرد یا نه؛ امّا برای مثال ابرگروه‌های فشرده، ابرگروه‌های گسسته، ابرگروه‌های جابه‌جایی و ابرگروه‌های مرکزی اندازه‌ی هار دارند. از آن‌جا که یک ابرگروه تعمیم یافته‌ی یک گروه فشرده‌ی موضعی است، لذا بسیاری از اصول پایه‌ی آنالیز هارمونیک روی ابرگروه‌ها انتقال داده شده‌اند.

بخش مقدماتی فصل چهارم شامل نکات و چند لم تکنیکی است، که برخی از این لم‌ها در فصل ۲ بیان و اثبات شده‌اند.

---

[1] Wendel
[2] Sakai
[3] Akemann
[4] Ghahramani
[5] Medgalchi
[6] Brained
[7] Edwards
[8] lau
[9] Dunkl
[10] Spector
[11] Jewett

در بخش دوم زیر فضاهای پایای محدب از فضاهای L_p برای $1 \leq p \leq \infty$، روی ابرگروه K مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین نتایجی شبیه نتایج لائو درباره‌ی گروه‌های فشرده‌ی موضعی، برای ابرگروه‌ها به‌دست آمده است. در حقیقت برخی نتایج کلاسیک درباره‌ی مضروب‌ها روی فضاهای L_p از گروه‌های فشرده‌ی موضعی به نتایجی درباره‌ی مضروب‌ها روی فضاهای L_p از ابرگروه‌ها بسط داده شده است. در این فصل برخی از اثبات‌ها با تغییرات لازم برای مفهوم جدید ابرگروه، بیان شده است و برخی نیز به علت شباهت زیاد با قضایای مربوط به گروه‌های فشرده‌ی موضعی حذف شده‌اند.

توصیف اصلی عناصر $\mathbb{M}(L_1(G), L_p(G))$ برای $1 \leq p \leq \infty$، زمانی که G یک گروه فشرده‌ی موضعی است توسط برایند و ادوارد [۳] بیان شده است. در آخر این فصل به توسیع برخی از این نتایج در رابطه با مضروب‌ها از $L_1(K)$ به $L_p(K)$ پرداخته شده است. در این فصل مرجع اصلی [۱۷] است.

اسکانتاراجا[۱۲] در [۲۳] اصول میانگین پذیری گروه‌های فشرده‌ی موضعی را نکته به نکته به ابرگروه‌ها برگردانده است.

در فصل پنجم به بررسی خاصیت میانگین پذیری از ابرگروه‌ها پرداخته شده است. با کمک هم‌ارزی بین میانگین پذیری ابرگروه‌ها و ایستایی آن‌ها، که در [۱۹] توسط پاوُل اثبات شده است، یک شرط معادل برای میانگین پذیری ابرگروه K یافته شده است. در این فصل مرجع اصلی [۱۸] است.

---

[۱۲] Skantharajah

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد.

۲.۱ آنالیز تابعی

در این بخش به بیان چند تعریف و قضیه از آنالیز تابعی می‌پردازیم. قضایای بیان شده بیشتر در فصل دوم مورد استفاده قرار می‌گیرند. مهم‌ترین قضیه‌ی این بخش، قضیه‌ی هان باناخ است که با کاربردهایش بیشترین مورد استفاده را در فصل دوم دارد.

تعریف ۱.۲.۱ یک فضای برداری مختلط X را فضای نرمدار گوئیم، هرگاه به ازای هر عضو x از X یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$، (به نام نرم) به گونه‌ای نظیر شود، برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ،

۳) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

اگر در این فضای نرمدار فاصله‌ی بین دو عنصر فضا را به صورت $d(x,y) = \|x-y\|$ تعریف کنیم، آن‌گاه d یک متر روی فضای نرمدار می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم، هرگاه:

۱) هر مجموعه‌ی تک نقطه‌ای بسته باشد،

۲) عمل جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشد.

هر فضای برداری توپولوژیک را با $T.V.S$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ اگر X یک فضای برداری باشد. $A \subseteq X$ را جاذب گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$، یک $t > 0$ موجود باشد که $x \in tA$.

تعریف ۴.۲.۱ اگر X یک فضای برداری باشد. $A \subseteq X$ را موزون گوییم، هرگاه برای هر اسکالر α که $|\alpha| < 1$، $\alpha A \subseteq A$.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$،

۲) برای هر $x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$، $P(\alpha x) = \mid \alpha \mid P(x)$.

در این‌صورت P یک شبه نرم نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱ یک خانواده از شبه نرم‌ها روی X را جدا کننده گوییم، هرگاه برای هر $x \neq 0$، یک شبه نرم P در این خانواده باشد که $P(x) \neq 0$.

قضیه ۷.۲.۱ اگر P یک شبه نرم روی $T.V.S$، X باشد، آن‌گاه:

۱) $P(0) = 0$،

۲) $P(x) \geq 0$،

۳) $|P(x) - P(y)| \leq P(x-y)$،

۴) مجموعه $A = \{x|\ P(x) < 1\}$ موزون، جاذب و محدب است،

برهان: به قضیه (۳۴.۱) از مرجع [۲۱] رجوع کنید. □

قضیه ۸.۲.۱ اگر P خانواده‌ای از شبه نرم‌های جدا کننده روی فضای برداری X باشد. برای هر $p \in P$ و $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم:

$$V(p,n) = \{x|\ p(x) < 1/n\}$$

و

$$\beta = \{x + \cap_{i=0}^{n} V(p_i, n_i)|\ x \in X, p_i \in P, n_i, n \in \mathbb{N}\}$$

یک پایه برای یک توپولوژی روی X است.

برهان: به قضیه (۳۷.۱) از مرجع [۲۱] رجوع کنید. □

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری روی میدان اسکالر واحدی باشند، نگاشت $\Lambda : X \to Y$ را خطی گوییم هرگاه به ازای هر x و y در X و جمیع اسکالرهای α و β،

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda(x)+\beta\Lambda(y)$$

اگر X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند، $B(X,Y)$ را گردایه‌ی تمام نگاشت‌های خطی کراندار از X به توی Y در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۰.۲.۱ اگر $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$ جبر باشد. تابع $\mu:\mathcal{A}\longrightarrow[0,\infty]$ را یک اندازه گوییم، هرگاه:

۱) $\mu(\emptyset)=0$،

۲) μ شمارا جمعی باشد، یعنی به ازای هر گردایه‌ی شمارا از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{A}$ مانند $\{A_n\}$ داشته باشیم:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

تذکر ۱۱.۲.۱ تابع $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ را یک اندازه‌ی مختلط گوئیم، هرگاه شمارا جمعی و کراندار باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. اندازه μ روی G را منظم گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\mu(E)=\sup\{\mu(K)|\ K\subseteq E; K \text{ فشرده}\}$،

۲) $\mu(E)=\inf\{\mu(V)|\ E\subseteq V; V \text{ باز}\}$.

فضای تمام اندازه‌های بورل منظم کراندار روی G را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱ فضای تمام توابع مختلط مقدار پیوسته‌ی کراندار روی G را با $C_b(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱ تابع f را در بی‌نهایت صفر گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، مجموعه‌ی فشرده K موجود باشد که برای هر $x \notin K$، ϵ $| f(x) |<$.

زیر فضایی از $C_b(G)$ که شامل تمام توابع در بی‌نهایت صفر باشد را با $C_0(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر $f \in C_b(G)$ تابعی دلخواه باشد، بستار مجموعه $K = \{x| \ f(x) \neq 0\}$ را محمل تابع f گوییم.

زیر فضایی از $C_b(G)$ که شامل تمام توابع با محمل فشرده است را با $C_{00}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱ فضای دوگان فضای برداری X عبارت است از فضای برداری X^* که عنصرهایش تابعک‌های خطی پیوسته بر X اند.

توجه کنید که جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱) $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$،

۲) $(\alpha\Lambda)(x) = \alpha.\Lambda(x)$.

واضح است که این اعمال X^* را به یک فضای برداری بدل می‌سازند.

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنیم A یک فضای نرم‌دار و A^* دوگان A باشد. توپولوژی تولید شده توسط A^* روی A را، (ضعیف‌ترین توپولوژی روی A، که هر $x^* \in A^*$ نسبت به آن پیوسته باشد) توپولوژی ضعیف روی A می‌نامیم و آن را با نماد $\sigma(A, A^*)$ یا ω نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱ اگر A یک فضای نرم‌دار و A^* فضای دوگان A باشد. آن‌گاه هر $x \in A$، یک تابعک خطی مانند f_x بر A^* القا می‌کند که با ضابطه‌ی $f_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle$ تعریف می‌شود. خانواده

$\{f_x|\ x \in A\}$ نقاط A^* را جدا می‌کند. زیرا اگر برای $x^*, y^* \in A^*$، داشته باشیم $x^* \neq y^*$، آن‌گاه $x \in A$ موجود است که

$$\langle x^*, x\rangle \neq \langle y^*, x\rangle \longrightarrow \ f_x(x^*) \neq f_x(y^*)$$

توپولوژی تولید شده توسط A^{**} روی A^* در حقیقت همان توپولوژی ضعیف روی A^* است.

توپولوژی تولید شده توسط A روی A^* را، (ضعیف‌ترین توپولوژی روی A^*، که هر $\hat{x} = x^{**} \in A^{**}$ نسبت به آن پیوسته باشد) توپولوژی ضعیف ستاره روی A^* نامیم. تور $\{x_\alpha^*\}$ با توپولوژی ضعیف ستاره به x^* در A^* همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$\lim_{\alpha} \ \langle x_\alpha^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle$$

قضیه ۱۹.۲.۱ (قضیه‌ی هان باناخ) اگر X یک $T.V.S$ و A, B دو زیر مجموعه‌ی محدب و مجزا و A باز باشد؛ در این‌صورت $\gamma \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in X^*$ هست که

$$Re\lambda(x)_{x\in A} < \gamma \leq Re\lambda(y)_{y\in B}.$$

تعریف ۲۰.۲.۱ یک تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده گوییم، هرگاه اگر U گوی باز واحد شامل صفر باشد، $\overline{T(U)}$ فشرده باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱ کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل مجموعه A را غلاف محدب A گوییم و با نماد CoA نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند؛ نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را آفین گوییم، هرگاه برای هر ترکیب خطی $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ از عناصر X که $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$، داشته باشیم:

$$T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i).$$

۳.۱ آنالیز هارمونیک وضرب پیچشی

در این فصل به تعریف انتگرال هار و اندازه‌ی هار می‌پردازیم. هم‌چنین پیچش بین دو تابع، دو اندازه و پیچش بین تابع و اندازه را تعریف می‌کنیم. در این بین چند قضیه‌ی اساسی از آنالیز هارمونیک در رابطه با پیچش‌ها بیان می‌کنیم که در فصل‌های دوم و سوم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد.

۱) اگر $1 \leq p < \infty$ آن‌گاه تعریف می‌کنیم:

$$L_p(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} |\ \int |f|^p(x)dx < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر}\}$$

و

$$\|f\|_p = (\int |f|^p(x)dx)^{1/p}$$

۲) تابع اندازه پذیر $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ را اساساً کراندار گوییم، هرگاه $\alpha \in \mathbb{C}$ ی موجود باشد که $\{x|\ f(x) > \alpha\}$ موضعاً پوچ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی چنین توابعی را با $L_\infty(G)$ نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 |\ \{x|\ |f| > \alpha\} \text{ موضعاً پوچ}\}$$

قضیه ۲.۳.۱ (نمایش ریس). فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و فشرده‌ی موضعی و $\Lambda : C_0(X) \to \mathbb{C}$ تابعک خطی پیوسته باشد، آن‌گاه یک سیگما جبر m از زیر مجموعه‌های X وجود دارد که شامل همه‌ی مجموعه‌های بورل در X است و یک اندازه‌ی مثبت و منحصر به فرد μ موجود است که وابسته به λ است. به این مفهوم که برای هر $f \in C_0(G)$، $\Lambda(f) = \int\ f(x)\ d\mu(x)$ و بالعکس.

برهان: به قضیه‌ی از (۱۱.۳۶) مرجع [۹] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۳.۱ اگر G گروه هاسدورف و فشرده موضعی باشد، آن‌گاه $I : C^{+}_{\circ\circ}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ موجود است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $I(f) \geq \circ$ و اگر $f \neq \circ$ آن‌گاه $I(f) > \circ$،

۲) برای هر $f, g \in C^{+}_{\circ\circ}(G)$، $I(f+g) = I(f) + I(g)$،

۳) برای هر $f \in C^{+}_{\circ\circ}(G)$ و $\alpha > \circ$، داریم $I(\alpha f) = \alpha I(f)$،

۴) برای هر $f \in C^{+}_{\circ\circ}(G)$, $a \in G$، داریم $I(l_a f) = I(f)$.

اگر J تابعی روی $C^{+}_{\circ\circ}(G)$ با چهار ویژگی فوق باشد، در آن‌صورت عدد مختلط $c > \circ$ موجود است که $I = cJ$.

برهان: به قضیه‌ی از (۱۵.۵) مرجع [۹] رجوع کنید. □

تعریف ۴.۳.۱ توسیع یکتائی از تابعک I آورده شده در قضیه‌ی قبل، از $C_{\circ\circ}(G)^{+}$ به $C_{\circ\circ}(G)$ را انتگرال هار چپ بر $C_{\circ\circ}(G)$ می‌نامیم. بنابر قضیه نمایش ریس به ازای تابعک I توصیف شده در قضیه‌ی ۳.۳.۱ روی $C_{\circ\circ}(G)$، اندازه بورل منظم λ موجود است که

$$I(f) = \int_G f \, d\lambda \qquad (f \in C_{\circ\circ}(G))$$

λ را اندازه‌ی هار چپ روی G می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیم G گروه فشرده‌ی موضعی و λ اندازه‌ی هار روی گروه G باشد. اندازه‌ی μ را پیوسته‌ی مطلق گوییم و با نماد $\mu << \lambda$ نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر F فشرده، اگر $\lambda(F) = \circ$ آن‌گاه $|\mu|(F) = \circ$. مجموعه‌ی همه‌ی چنین اندازه‌هایی را با نماد $M_a(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۳.۱ $M_a(G)$ ایدال دو طرفه از $M(G)$ است.

برهان: به قضیه‌ی (۱۹.۱۸) از مرجع [۹] رجوع کنید.

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنیم G گروه فشرده‌ی موضعی و I انتگرال هار چپ روی $C_{\circ\circ}(G)$ باشد. هم‌چنین f را تابع ناصفری از $C_{\circ\circ}(G)^+$ در نظر می‌گیریم، آن‌گاه تابع Δ روی G را با ضابطه‌ی $\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)}$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت تابع Δ، پیوسته و مثبت است و برای هر $x, y \in G$، $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.

برهان: به قضیه (۱۱.۱۵) از مرجع [۹] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۳.۱ تابع Δ تعریف شده در قضیه‌ی ۷.۳.۱ را تابع مدولار بر G می‌نامیم. هرگاه $\Delta = 1$، G را تک مدولی می‌نامیم.

تعریف ۹.۳.۱ فرض کنیم $1 \leq p \leq \infty$، انتقال چپ (راست) در $L_p(G)$ به وسیله $g \in G$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(l_g f)(x) = f(gx) \qquad ((r_g f)(x) = \Delta^{1/p}(g) f(xg)).$$

که در آن x عضوی از G است.

لم ۱۰.۳.۱ برای هر $a, b \in G$ داریم

$$l_a l_b = l_{ba} \qquad\qquad (r_a r_b = r_{ab})$$

و در نتیجه برای هر $a\ ,\ b \in G$، $l_a\ ,\ l_b$ روی $L_p(G)$ ایزومتری خطی هستند.

برهان:

$$\begin{aligned}(l_a l_b)(f)(x) &= l_a(l_b f)(x)\\ &= l_b f(ax)\\ &= f(bax)\\ &= l_{ba}(x).\end{aligned}$$

و هم‌چنین برای $l_a : L_p(G) \longrightarrow L_p(G)$ داریم:

$$\begin{aligned}\|l_a f\|_p &= (\int |l_a f(x)|^p dx)^{۱/p}\\ &= (\int |f(ax)|^p dx)^{۱/p}\\ &= (\int |f(x)|^p dx)^{۱/p}\\ &= \|f\|_p.\end{aligned}$$

اثبات خطی بودن:

$$\begin{aligned}l_a(f+g)(x) &= f+g(ax)\\ &= f(ax)+g(ax).\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\alpha l_a(f)(x) &= \alpha(f(ax))\\ &= \alpha f(ax)\\ &= l_a(\alpha f)(x).\end{aligned}$$

برای r_a به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۱.۳.۱۱ زیر مجموعه‌ی K از $L_p(G)$ را پایای چپ (راست) گوییم هرگاه برای هر $g \in G$،

$$l_g(K) \subseteq K \qquad (r_g(K) \subseteq K).$$