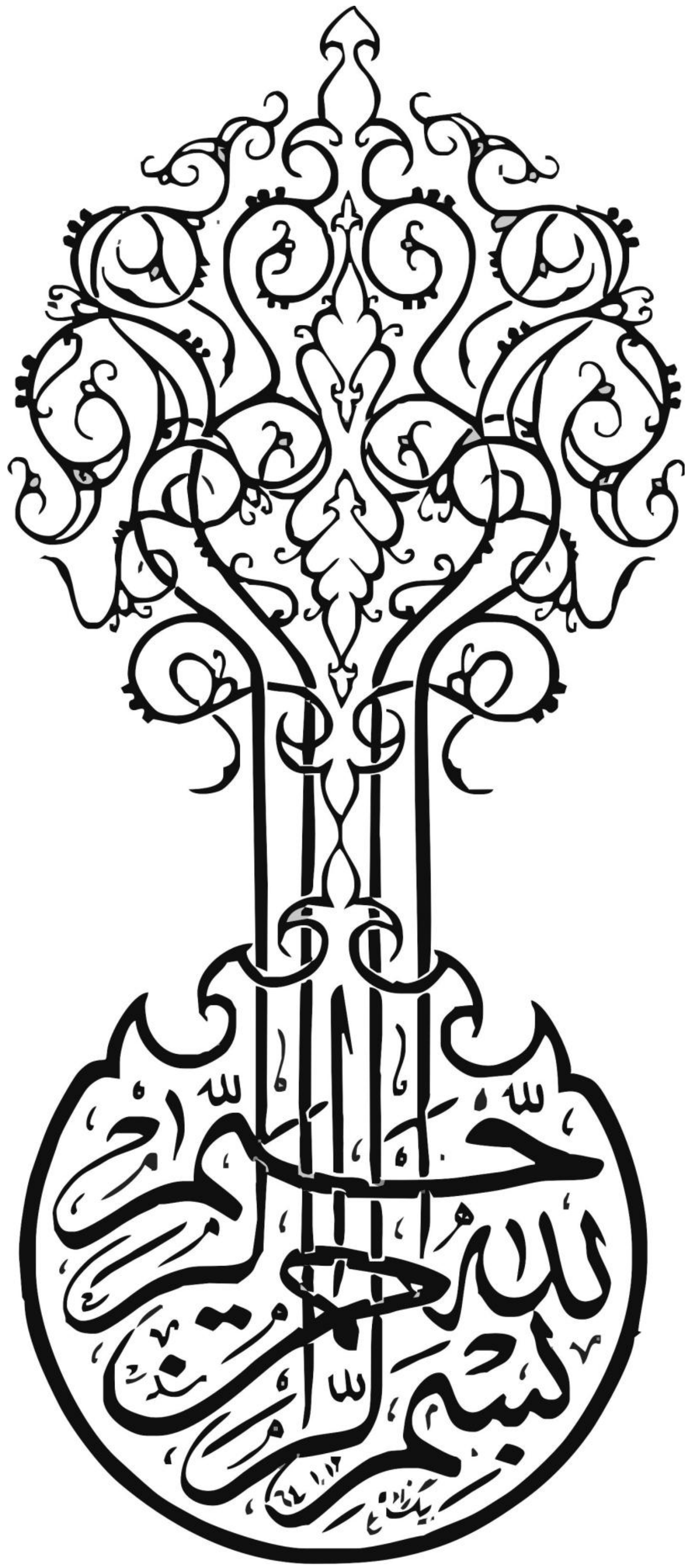
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

قاب های بهینه برای پاک کننده ها

تدوین

علیا دخت سجادی راد

استاد راهنما

دکتر امیر خسروی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم :

اکنون که این پژوهش به بار نشسته و غنچه توفیق به گلبرگ امید شکفته

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

زین روی این اثر را با افتخار و منّت به آن دو نازنین ، **پدرم و مادرم** تقدیم می دارم .

باشد که قطره سپاسی شود در دریای بی کران لطف و مهرشان .

و نیز **خواهر و برادر** عزیزم که یاریشان ، دلگرمی من در این مسیر بود .

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه ابتدا فضاهای توپولوژیک، باناخ و هیلبرت را معرفی می کنیم. سپس مفاهیمی از قاب، گراف و انواع قاب ها را ارائه می دهیم و قاب های دو یکنواخت و استفاده از آن ها برای رمزگذاری بردارهارا معرفی می کنیم.می دانیم که این قاب هابرای حداکثر دو پاک کننده بهینه هستند. در اینجا ما مقادیر عددی گوناگون را برای خطای بازسازی مربوط به یک قاب پیدا می کنیم وقتی یک تعداد دلخواه از ضرایب قاب گم شده باشند. سپس تلاش می کنیم تا قاب های بهینه برای این منظور را پیدا کنیم. در پایان قاب ها را از دیدگاه کد گذاری بررسی می کنیم و به دنبال یافتن یک مقیاس عددی برای بهبود بخشیدن خطای بازسازی مربوط به قاب هستیم. وقتی بعضی ضرایب قاب نظیر بردار گم شده باشند.

رده بندی مو ضوعی ریاضی ۲۰۱۰ : 46L05, 47A20, 46M10, 46H25, 46A22.

کلمات کلیدی : قاب، گراف، پاک کننده، قاب یکنواخت ، قاب دو یکنواخت، ماتریس، کد گذاری ، کد گشایی.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل سعی کرده ایم نمادها و قضایای مورد نیاز در فصول بعد را بیان کنیم.

۱.۱ فضای توپولوژیک

تعریف ۱.۱ . اگر $(X.\tau)$ یک فضای توپولوژیک و $X_\circ \subset X$ یک زیر مجموعه X باشد، آن‌گاه توپولوژی $\tau\mid_{X_\circ}$ که روی $X_\circ$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau \mid_{X_\circ} := \{U \cap X_\circ | U \in \tau\}$$

توپولوژی القایی یا **توپولوژی زیر فضایی** می نامند و فضای توپولوژیک $(X_\circ, \tau\mid_{X_\circ})$ را یک زیر فضای $(X.\tau)$ نامند.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید X, Y فضاهای توپولوژیک باشند. زیر مجموعه $W \subset X \times Y$ را در توپولوژی حاصل ضربی باز گویند هرگاه به ازای هر $(x, y) \in W$ یک همسایگی x در X مانند U و یک همسایگی y در Y مانند V وجود داشته باشند، به قسمی که $U \times V \subset W$. مجموعه $X \times Y$ مجهز به توپولوژی فوق را **حاصل ضرب (دکارتی)** فضاهای X, Y می نامند.

تعریف ۳.۱ . فضای توپولوژیک را فشرده گویند هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی داشته باشد.

تعریف ۴.۱ . یک فضای **متریک** عبارت است از یک زوج (X, d) متشکل از مجموعه X و یک تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (به نام متریک) به گونه ای که :

(۱) برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، $d(x,y) \geq \circ$ و $d(x,y) = \circ$ اگر و فقط اگر $x = y$

(۲) برای هر $x \in X$ و هر $y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$

(۳) (نابرابری مثلثی). برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

قضیه ۵.۱ . [10] فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته بر فضای متریک وفشرده X باشد و$m = \inf_{x\in X} f(x)$ و $M = \sup_{x\in X} f(x)$. در این صورت نقاطی مانند $p, q \in X$ هستند، به طوری که $m = f(p)$ و $M = f(q)$.

۲.۱ فضای باناخ

تعریف ۶.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، در این صورت X یک **فضای نرمدار** روی میدان $\mathbb{F}$ است هرگاه به ازای هر عضو x از X، عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ (نرم x) نظیر شود به طوری که:

(۱) برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(۲) برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| =| \alpha | \|x\|$.

(۳) برای هر $x \in X$، $\|x\| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$.

اگر در یک فضای نرمدار، فاصله بین دو عنصر از فضا به صورت $d(x,y) = \|x - y\|$ تعریف شود، آن گاه d یک **متریک** روی فضای نرمدار می باشد.

تعریف ۷.۱ . فرض کنیدX, Y دو فضای برداری باشند. $T : X \to Y$ را **عملگر خطی** می نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$،

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y). \qquad (۱ - ۱)$$

زیر فضاهای $N(T)=\{x\in X \quad : \quad T(x)=0\}$ و $R(T)=\{T(x): x\in X\}$ از X و Y ر به ترتیب **فضای پوچ** و **فضای برد** T می نامند.

تعریف ۸.۱ . عملگر $T:(X,d)\to(Y,\rho)$ یک ایزومتری است هرگاه به ازای هر $x,y\in X$، $\rho(Tx,Ty)=d(x,y)$.

در حالتی که X,Y نرمدار و T خطی باشد داریم:

T ایزومتری است $\Leftrightarrow \quad (\forall x\in X) \quad \|Tx\|=\|x\|$ زیرا برای هر $x,y\in X$ داریم :

$$\rho(Tx,Ty)=\|Ty-Tx\|=\|T(y-x)\|=\|y-x\|=d(y,x).$$

تعریف ۹.۱ . دو نرم $\|.\|_{2}$ و $\|.\|_{1}$ در فضای نرمدار X را هم ارز می نامند هرگاه اعداد ثابت و مثبت M,K موجود باشند که به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$K\|x\|_{1}\leq\|x\|_{2}\leq M\|x\|_{1}.$$

قضیه ۱۰.۱ . [10,23.7] هر زیر فضای متناهی‌البعد از یک فضای نرمدار، بسته است.

تعریف ۱۱.۱ . یک **فضای باناخ** روی میدان $\mathbb{F}$ عبارت است از یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ که تحت متریک حاصل از نرمش کامل باشد. به عبارت دیگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۱۲.۱ . اگر I یک مجموعه شمارا باشد، برای هر $1\leq p<\infty$، $\ell^p(I)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\ell^p(I):=\{x=\{x_i\}_{i\in I}:\|x\|_p=(\sum_{i\in I}\mid x_i\mid^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\} \qquad (۱-۲)$$

که x_i ها اسکالرند. همچنین $\ell^p(I)$ یک فضای باناخ است.

قضیه ۱۳.۱ . [1] فرض کنیم $\|.\|_{2}$ و $\|.\|_{1}$ دو نرم هم ارز روی فضای برداری X باشد آن‌گاه X با $\|.\|_{1}$ باناخ است اگر وتنها اگر X با $\|.\|_{2}$ باناخ باشد.

قضیه ۱۴.۱ . [1] در هر فضای نرمدار با بعد متناهی هر دو نرم دلخواه هم ارزند.

قضیه ۱۵.۱ . [1] یک فضای نرمدار با توپولوژی حاصل از نرم موضعاً فشرده است اگر وتنها اگر با بعد متناهی باشد.

عملگر همانی روی X را با نماد I_X نشان می دهیم.

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنید X,Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد، **نرم عملگر** T را با $\|T\|$ نشان داده که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} \qquad (۱ - ۳)$$

عملگر T را **کراندار** می نامند هرگاه $\|T\| < \infty$ و آن را **بی کران** می نامند هرگاه $\|T\| = \infty$. خانواده تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نشان می دهند. اگر $X = Y$ یا $Y = \mathbb{F}$ به ترتیب می نویسند $B(X)$ یا X^* و هر یک از اعضای X^* را یک **تابعک خطی** روی X می نامند.

تعریف ۱۷.۱ .فرض کنید u یک عملگر در فضای هیلبرت H و E یک پایه متعامد یکه برای H باشد. **نرم هیلبرت — اشمیت از u را به صورت زیر تعریف می کنیم:**

$$\|u\|^۲ = (\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

این تعریف مستقل از انتخاب پایه می باشد. زیرا اگر E' پایه متعامد دیگری برای H باشد، پس برای هر مجموعه ناتهی متناهی F از E داریم:

$$\sum_{x\in F} \|u(x)\|^۲ = \sum_{x\in F}\sum_{y\in E'} | \langle u(x), y\rangle |^۲$$

$$= \sum_{y\in E'}\sum_{x\in F} | \langle u(x), y\rangle |^۲ \leq \sum_{y\in E'} \|u^*(y)\|^۲,$$

$$\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲ \leq \sum_{y\in E'} \|u^*(y)\|^۲,$$

بوسیله تقارن داریم :

$$\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲ = \sum_{x\in E} \|u^*(x)\|^۲ = \sum_{y\in E'} \|u(y)\|^۲.$$

تعریف ۱۸.۱ . عملگر u یک **عملگر هیلبرت – اشمیت** است اگر $\|u\|^{2} < \infty$ و کلاس تمام عملگرهای هیلبرت – اشمیت در H را با $L^{2}(H)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۹.۱ . [10,23.14] فرض کنید X,Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد، آن‌گاه گزاره های زیر با هم معادلند:

(۱) T کراندار است.

(۲) عددی ثابت مانند M موجود است که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

(۳) T در صفر پیوسته است.

(۴) T پیوسته است.

قضیه ۲۰.۱ . [10,23.15] اگر X,Y دو فضای نرمدار باشند، آن‌گاه $B(X,Y)$ با نرم عملگرها یک فضای باناخ است اگر وفقط اگر Y باناخ باشد.

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید X,Y دو فضای نرمدار و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد، اگر T عملگری یک به یک و پوشا باشد، T را **وارون پذیر** نامند.

تعریف ۲۲.۱ . دو فضای نرمدار X,Y را **ایزومورفیسم (یکریخت)** می نامند هرگاه عملگری خطی مانند $T \in B(X,Y)$ موجود باشد که یک به یک و پوشا و ایزومتری باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|Tx\| = \|x\|$ در این حالت T را یک **ایزومورفیسم توپولوژیکی (یکریختی توپولوژیکی) می نامند و می نویسند** $X \cong Y$ **و در این حالت می گویند** X,Y **بطور ایزومتری ایزومرفند.**

تعریف ۲۳.۱ . فضای نرمدار X را

(۱) بازتابی نامند، هرگاه $X \cong X^{*}$؛

(۲) انعکاسی نامند، هرگاه $X \cong X^{**}$.

قضیه ۲۴.۱ . [10,12.10] فرض کنید X,Y دو فضای نرمدار باشند. در این صورت متناظر با عملگر $T \in B(X,Y)$، عملگر خطی منحصر به فردی مانند $T^{*} \in B(X^{*},Y^{*})$ موجود است به طوری که به

ازای هر $y^* \in Y^*$:

$$< Tx, y^* > = < x, T^*y^* >, \qquad (۴ - ۱)$$

به این معنی که

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx), \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$

به علاوه $\|T^*\| = \|T\|$. عملگر T^* را الحاقی T می نامند.

قضیه ۲۵.۱ . [10,12.9] گر X, Y, Z فضاهای نرمدار باشند و $U, T \in B(X, Y)$ و $S \in B(Y, Z)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ آن‌گاه احکام زیر برقرارند:

(۱) $(\alpha T + U)^* = \overline{\alpha} T^* + U^*$؛

(۲) $(ST)^* = T^*S^*$؛

(۳) $I_X^* = I_{X^*}$؛

(۴) اگر T وارون پذیر باشد، آن گاه T^* نیز وارون پذیر است و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$.

تعریف ۲٦.۱ . [10] **جبر مختلط** یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که در آن یک ضرب تعریف شده است که در روابط

$$x(yz) = (xy)z, x(y+z) = xz + yz, (x+y)z = xz + yz, \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

به ازای هر x, y, z در A و هر اسکالر α صدق می کند.

هر گاه، علاوه بر این، A یک **فضای باناخ** نسبت به نرم صادق در **نامساوی ضربی**

$$\|xy\| \langle \|x\| \|y\|$$

بوده و A شامل **عنصر یکه** e باشد به طوری که $xe = ex = x (x \in A), \|e\| = ۱$ آن گاه A یک **جبر باناخ** می باشد.

قضیه ۲۷.۱ .[10] فرض کنید A یک جبر باناخ با عضو واحد e باشد. اگر $\|x\| < ۱$، آن‌گاه $e-x$ وارون پذیر است و

$$(e-x)^{-۱} = e + \sum_{n=۱}^{\infty} x^n$$

۳.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۲۸.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد. **ضرب داخلی روی** X تابعی مانند $<.,.>: X \times X \to \mathbb{F}$ است به طوری که برای هر $x,y,z \in X$ و هر $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند

(۱) $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x,z> + \beta <y,z>$؛

(۲) $<x,x> \geq ۰$؛

(۳) $<x,y> = \overline{<y,x>}$؛

(۴) تساوی $<x,x> = ۰$ ایجاب می کند $x = ۰$؛

در این صورت زوج $(X, <.,.>)$ را یک **فضای ضرب داخلی** می نامند.

در اینجا $\|.\|$ با ضابطه $\|x\| = <x,x>^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می شود، یعنی به ازای هر $x \in H$ ریشه دوم ضرب داخلی $<x,x>$ که عددی نا منفی است، برابر با نرم x است. از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر بدست می آید.

[۱] **نامساوی کوشی – شوارتز** : [10,12.3] از شرایط (۱) تا (۴) بیان شده در تعریف قبل نتیجه می گیریم که

$$|<x,y>| \leq \|x\|\|y\|, \qquad \forall x,y \in H.$$

نامساوی مثلثی: [10,12.2] **بازای هر** $x,y \in H$ **داریم** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

---

[۱] Cauchy-Schwartz

از نامساوی مثلثی نتیجه می گیریم $\|x+z\| \leq \|x-y\|+\|y+z\|$**. اگر فاصله بین** x,y **را با** $\|x-y\|$ **نشان دهیم،** H **در تمام شرایط فضای متریک صدق می کند.**

تعریف ۲۹.۱ . فضای ضرب داخلی H را یک **فضای هیلبرت** گوییم هرگاه با متر حاصل از ضرب داخلی یک فضای متریک کامل باشد.

مثال ۳۰.۱ . $\ell^{2}(I) := \{x=\{x_i\}_{i\in I} : \|x\|_{2} = (\sum_{i\in I} \mid x_i \mid^{2})^{\frac{1}{2}} < \infty\}$ یک فضای هیلبرت است. که در آن x_i ها اعداد حقیقی یا مختلط اند.

تعریف ۳۱.۱ . اگر $x,y \in H$ و $0 =< x,y >$ آن گاه x را **عمود** بر y گوییم و می نویسیم $x \perp y$ و تمام اعضای متعامد بر x رابا نماد $x^{\perp}$ نشان می دهیم و اگر $A,B \subset H$ آن گاه $A^{\perp} = \cap_{x\in A} x^{\perp}$ و اگر برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم: $x \perp y$، آن گاه می نویسیم $A \perp B$.

نتیجه ۳۲.۱ . [10,11.4] برای هر زیر مجموعه H مانند A،$A^{\perp}$ زیر فضای برداری بسته از H است.

زیر مجموعه نامتناهی U از V را مستقل خطی گوییم اگر هر زیر مجموعه متناهی از آن با تعریف بالا مستقل خطی باشد.

تعریف ۳۳.۱ . [10] فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیر مجموعه U از V را پایه ای برای V گوییم اگر U مستقل خطی باشد و فضای V را تولید کند.

قبل از اینکه تعریف بعدی را بیاوریم، تابع زیر را معرفی می کنیم :

$$\underset{n,m}{\delta} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

این تابع به **دلتای کرونکر** معروف است.

تعریف ۳۴.۱ . اگر A یک مجموعه اندیس گذار باشد، آن‌گاه $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ را یک **مجموعه متعامد یکه** گوییم اگر هر دو عضو متمایز آن متعامد باشند و به ازای هر $\alpha \in I$، $\|x_\alpha\| = 1$، یعنی اگر $\alpha,\beta \in A, \delta_{\alpha,\beta} =< x_\alpha, x_\beta >$.

قضیه ۳۵.۱ . فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، آن گاه :

(۱) نگاشت $x \to \|x\|$ پیوسته است ؛۱

(۲) اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آن گاه

$$\|x\| = sup\{|<x,y>|: y \in X, \|y\| = ۱\}. \qquad (۵-۱)$$

برهان. با استفاده از تعریف نرم و نامساوی کوشی — شوارتز به دست می آید. ■

تعریف ۳۶.۱ . فرض کنید X یک فضای نرمدار و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای در X باشد $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را **همگرا** به $x \in X$ گویند هرگاه $lim_{n\to\infty}\|x - x_n\| = ۰$.

تعریف ۳۷.۱ . اگر X, Y دو فضای برداری مختلط باشند آن‌گاه عملگر $T : X \to Y$ را **مزدوج خطی** می نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم $T(\alpha x + y) = \overline{\alpha}Tx + Ty$.

قضیه ۳۸.۱ . در فضای هیلبرت H، برای هر $y \in H$، نگاشت های $x \to <x,y>$ و $x \to <y,x>$ به ترتیب خطی کراندار و مزدوج خطی کراندارند.

برهان. بدیهی است. ■

تعریف ۳۹.۱ . فرض کنیم M زیر فضای بسته ای از فضای نرمدار X باشد. اگر زیر فضای بسته ای مانند N از X موجود باشد به طوری که $M \cap N = \{۰\}$ و $X = M + N$ آن گاه M را یک **زیر فضای متکامل** X می نامند و در این حالت می نویسند:

$$X = M \oplus N.$$

قضیه ۴۰.۱ . [10,10.12] اگر M زیر فضایی بسته از H باشد آن گاه برای هر $x \in H$

(۱) تجزیه منحصر به فردی مانند $x = P_M x + P_{M^\perp} x$ وجود دارد که $P_M x$ و $P_{M^\perp} x$ به ترتیب نزدیکترین نقاط از M و $M^\perp$ به x هستند.

(۲) نگاشت های

$$\underset{M}{P} : \begin{cases} H \to M \\ x \to P_M x \end{cases}$$

$$\underset{M^\perp}{P} : \begin{cases} H \to M^\perp \\ x \to P_{M^\perp} x \end{cases}$$

خطی و کرانداراند که آن ها را به ترتیب تصاویر متعامد H روی M و $M^\perp$ می نامند؛

(۳) $\|x\|^{۲} = \|P_M x\|^{۲} + \|P_{M^\perp} x\|^{۲}$

(۴) $H = M \oplus M^\perp$ ($H = M + M^\perp$ و $M \cap M^\perp = \{\circ\}$)(مجموع مستقیم).

تعریف ۴۱.۱ . دو فضای هیلبرت $H_۱$ و $H_۲$ را به ترتیب با ضرب های داخلی $\langle \circ, \circ \rangle_۱$ و $\langle \circ, \circ \rangle_۲$ **یکریخت** می نامند، هرگاه عملگری خطی، کراندار و دوسویی مانند $T : H_۱ \to H_۲$ موجود باشد که ضرب داخلی را حفظ کند یعنی برای هر $x, y \in H$، $\langle Tx, Ty \rangle_۲ = \langle x, y \rangle_۱$. در این حالت می نویسند $H_۱ \cong H_۲$.

تعریف ۴۲.۱ . اگر $E \subset H$، آن‌گاه **متمم متعامد** E به صورت زیر تعریف می شود :

$$E^\perp = \{x \in H :< x, y >= \circ, \forall y \in E\}. \quad (۱-٦)$$

تعریف ۴۳.۱ . فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله از بردارها در H باشد. در این صورت $\{x_n\}$ یک **دنباله متعامد** است هرگاه برای هر $n \neq m$، $< x_n, x_m >= \circ$.

حال فرض کنید $T, S : H \to H$ عملگرهای خطی کراندار باشند.

تعریف ۴۴.۱ . فرض کنید H, K دو فضای هیلبرت و $T \in B(H, K)$. در این صورت عملگر یکتایی مانند $T^* \in B(K, H)$ وجود دارد که به ازای هر $x \in H$ و هر $y \in K$ داریم:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

و T^* را **الحاقی عملگر** T می نامند.

تعریف ۴۵.۱ . T **خود الحاق** است هرگاه $T = T^*$. یا به طور معادل به ازای هر $x, y \in H$، $< Tx, y >=< x, Ty >$.

تعریف ۴۶.۱ . T را **مثبت** گوییم و با $T \geq 0$ نمایش می دهیم هرگاه برای هر $x \in H$، $<Tx, x> \geq 0$.

توجه کنید که عملگرهای مثبت، خودالحاق هستند.

تعریف ۴۷.۱ . $T \geq S$ هرگاه T, S خود الحاق باشند و $T - S \geq 0$.

قضیه ۴۸.۱ . [11,12.6] فرض کنید $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای از اعضای دو به دو متمایز در H باشد. در این صورت گزاره های زیر با هم معادلند :

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در H همگرا است؛

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$؛

(۳) به ازای هر $x \in H$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n >$ همگرا است.

تعریف ۴۹.۱ . مجموعه متعامد یکه $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ در فضای هیلبرت H که یک پایه برای H است را یک **پایه متعامد یکه** برای H می نامیم.

قضیه ۵۰.۱ . [11,12.8] هر فضای هیلبرت شمارش پذیر دارای پایه متعامد یکه است.

قضیه ۵۱.۱ . [11,12.9] (نمایش ریتس) : اگر T تابعکی خطی روی H باشد آن گاه عنصری منحصر به فرد مانند $x \in H$ وجود دارد که برای هر $y \in H$، $T(y) = \langle y, x\rangle$. معمولاً T را با نماد ϕ_x نشان می دهند و آن را **تابعک القا شده توسط عنصر** x می نامند.

تعریف ۵۲.۱ . اگر H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ باشد در این صورت آن را

(۱) **نرمال** نامند هرگاه $T^*T = TT^*$؛

(۲) **یکانی** نامند هرگاه $T^*T = TT^* = I_H$؛

(۳) **تصویر** نامند هرگاه $T^2 = T$؛

(۴) **متعامد** نامند هرگاه $N(T)^\perp = R(T)$.

قضیه ۵۳.۱ . [11] عملگر $T \in B(H)$ نرمال است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in H$، $\|Tx\| = \|T^*x\|$ و عملگرهای نرمال T دارای خواص زیر هستند :

(۱) $N(T^*) = N(T)$؛

(۲) $\overline{R(T)} = H$.

(۳) هرگاه به ازای هر $x \in H$، $\alpha \in \mathbb{C}$ای داشته باشیم که اگر $Tx = \alpha x$ آن گاه $T^*x = \overline{\alpha}x$.

قضیه ۵۴.۱ . [10,12.7] فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ و به ازای هر $x \in H$، $< Tx, x >= \circ$. در این صورت $T = \circ$.

نتیجه ۵۵.۱ . [11,6.7] فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و S,T$\in B(H)$ و به ازای هر $x \in H$، $< x, Tx >=< x, Sx >$، آن گاه $S = T$.

تعریف ۵٦.۱ . فرض کنیم H, K دو فضای نرمدار باشند و $T \in B(H, K)$، آن گاه T را **بدور از صفر** می نامند هرگاه ثابت مثبتی مانند δ موجود باشد که به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ و δ را یک کران پایین T می نامند.

قضیه ۵۷.۱ . [11,6.8] فرض کنید H, K دو فضای هیلبرت و $T \in B(H, K)$ در این صورت T پوشاست اگر و تنها اگر T^* بدور از صفر باشد.

قضیه ۵۸.۱ . [11,6.14] فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$. در این صورت گزاره های زیر با هم معادلند :

(۱) T معکوس پذیر است.

(۲) T^* معکوس پذیر است.

(۳) T و T^* یک به یک اند و $R(T)$ در H بسته‌است.

(۴) T و T^* بدور از صفرند.

قضیه ۵۹.۱ . [10,12.14] فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ یک تصویر باشد. در این صورت هر یک از چهار گزاره، سه گزاره دیگر را ایجاب می کند.

(۱) T خود الحاق است.