بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور استان تهران

مرکز تهران شرق

دانشکده علوم پایه

عنوان پایان‌نامه

معادله ریچاودری و تعمیم های آن در نظریه های اصلاح شده گرانش

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک گرایش گرانش و فیزیک نجومی

نام دانشجو:

مجتبی صفدریان

استاد راهنما:

دکتر مرتضی محسنی

شهریورماه ۱۳۹۳

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

مرکز تهران شرق

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه دوره کارشناسی ارشد آقای مجتبی صفدریان دانشجوی رشته فیزیک به شماره دانشجویی ۹۰۰۰۱۰۵۸۳

تحت عنوان " معادله ریچاودری و تعمیم های آن در نظریه های اصلاح شده گرانش"

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل درروزدو شنبه مورخ ۹۳/۰۶/۳۱ساعت ۱۴-۱۳درمحل مرکز تهران شرق برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد......۱۹.................. به حروف ......نوزده تمام....... و با درجه ارزشیابی.......عالی............مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

ردیف	هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضا
۱	استاد راهنما	دکتر مرتضی محسنی	استاد	پیام نور	
۲	استاد داور	دکتراحمد آخوند	استادیار	"	آخوند
۳	نماینده علمی گروه و تحصیلات تکمیلی	دکتراحمد آخوند	"	"	آخوند

تهران ، حکیمه (سازمان آب)، بلوار شهید بابائیان، پانزده متری شیرازی ، پلاک۳ ، دانشگاه پیام نور استان تهران ، مرکز تهران شرق
تلفن : ۷۷۳۱۱۲۸۶
دورنگار: ۷۷۳۱۲۷۱۶
Tshargh.Tpnu.ac.ir
Tshargh@Tpnu.ac.ir

گواهی اصالت، نشر و حقوق مادی و معنوی اثر

اینجانب مجتبی صفدریان دانشجوی ورودی سال۹۰-۹۱ مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک زمینه گرانش و فیزیک نجومی گواهی می نمایم چنان‌چه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل‌قول مستقیم یا غیرمستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام .بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل‌قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.
دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج دراین پایان نامه (یا رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو:
تاریخ و امضاء:

اینجانب مجتبی صفدریان دانشجوی ورودی سال ۹۰-۹۱ مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک زمینه گرانش و فیزیک نجومی گواهی می‌نمایم چنانچه براساس مطالب پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و .... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو:
تاریخ و امضاء:

(کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.)

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلبهای بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را تقدیم می کنم به :

روان پاک پدر از دست رفته ام

و

وجود پاک مادر دلسوز و مهربانم

سپاسگزاری

از استاد راهنمای فاضل و بزرگوارم جناب آقای دکتر مرتضی محسنی که اندیشه های علمی و نظرات محققانه ایشان راهگشای اینجانب بوده است به خاطر تمام راهنمایی ها و زحمات بی دریغشان در دوره ی کارشناسی ارشد و تکمیل این پایان نامه صمیمانه کمال سپاس، تشکر و قدردانی را می نمایم. بی شک افتخار شاگردی چنین استاد عالم و دلسوزی همواره در سابقه علمی حقیر خواهد درخشید.

صمیمانه ترین تقدیر های خود را از جناب آقای دکتر احمد آخوند ابراز می دارم و از اینکه داوری این پایان نامه را پذیرفتند صمیمانه قدردانی و تشکر می نمایم.

همچنین از جناب آقای علی اکبر محمدی به خاطر تمام حمایت های ایشان کمال تشکر، قدردانی و سپاس را می نمایم.

از خداوند منان سلامتی و طول عمر بیشتر را همراه با پیروزی و کامیابی برای ایشان و خانواده محترمشان آرزومندم.

چکیده

دراین پایان نامه به بررسی معادله ریچاودری و برخی از تعمیم های آن در نظریات اصلاح شده گرانش پرداخته می شود. نخست به معرفی معادله ریچاودری و اهمیت فیزیکی آن پرداخته می شود سپس چگونگی به دست آوردن آن معادله و منشا آن مورد بررسی قرار می گیرد و برخی از کاربردهای آن معادله مرور می گردد.

در ادامه نظریه گرانش f(R) به عنوان شناخته شده ترین نظریات تعمیم یافته گرانش مرور می گردد و فرمول بندی های متریک و پالاتینی و متریک آفین آن به صورت مختصر مورد بررسی قرار می گیرد.

در ادامه چگونگی به دست آوردن این معادله در نظریه f(R) مورد بررسی قرار می گیرد وپس از آن معادله ریچاودری را در نظریه گرانش f(R) با جفت شدگی ناکمینه و نظریه f(G) با جفت شدگی ناکمینه به دست می آوریم.

برای به دست آوردن تعمیم این معادله در نظریات گرانش اصلاح شده نخست معادله میدان را استخراج کرده و سپس با پیدا کردن رابطه بین $R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ و معادله میدان به دست آمده معادله ریچاودری تعمیم یافته را در نظریات اصلاح شده گرانش به دست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: معادله ریچاودری، گرانش اصلاح شده

فهرست

فصل اول

معرفی معادله ریچاودری در نسبیت عام

۱-۱-مقدمه :

معادله ریچاودری یکی از معادله های اساسی نسبیت عام است و در بسیاری از حوزه ها مانند مسئله تکینگی ها در کیهان شناسی اهمیت بنیادی دارد. به صورت سنتی در هر متن درسی در زمینه نسبیت عام هنگام طرح مسئله تکینگی نخست به معرفی و استخراج معادله ریچاودری پرداخته می شود. برای نمونه می توان کتاب نسبیت عام والد (والد، ۱۹۸٤) را دید. بنابراین هر کوششی برای فهم بهتر آن دارای ارزش نظری است. با توجه به محدودیت های این معادله (که در بالا به آن اشاره شد) شکل ساده و سنتی این معادله در حوزه های جدیدی که به تدریج کشف و یا مورد توجه قرار می گیرد قابل اعمال نیست. بدین ترتیب یافتن نسخه های اصلاح شده این معادله برای استفاده در قلمروهای تازه کاملا ضروری است. پیش از این تعمیم های اندکی از این معادله در چارچوب نظریه نسبیت عام ارائه شده است که تعمیم ارائه شده توسط فنلی و همکاران(فنلی، ۱۹۹۱) و ابریو و همکاران (ابریو، ۲۰۱۱) نمونه هایی از آن هستند. با توجه به علاقه روزافزون محققین به گسترش های مختلف نسبیت عام از جمله نظریه های گرانش اصلاح شده مانند گرانش $f(R)$ کوشش برای یافتن تعمیم این معادله در چنین نظریه هایی ضروری است و منجر به فهم بهتر معادله و نیز درک جنبه های تازه ای از این نظریه ها خواهد شد.

۱-۲- معادله ریچاودری برای بردارهای هم جهت ژئودزی های زمان گونه

رهیافت ساخت معادله ریچاودری در چندین کتاب مانند کتاب نسبیت عام رابرت والد (والد،۱۹۸٤) و کتاب هندسه و فضا زمان سین کارول (کارول،۲۰۰٤) و کتاب ساختار مقیاس بزرگ فضا زمان استیون هاوکینگ (هاوکینگ،۱۹۷۲) و چندین مقاله از جمله مقاله نارش ددهیچ (ددهیچ،۲۰۰۵) و مقاله گابریل ابریو و همکاران (ابریو،۲۰۱۱) به صورت مفصل بحث و بررسی گردیده است که ما به

منظور شیوایی بیان و هماهنگی با بقیه فصل ها با اندکی تغییر اسمی کمیت ها برگرفته از کتاب نسبیت عام والد آن را به صورت زیر بیان می کنیم.

برای شروع لازم است بیان کنیم که بردارهای ژئودزی های زمان گونه با زمان ویژه τ ومیدان برداری مماسی سرعت u^a بهنجارشده با یکای طول با رابطه اساسی

$$u^a u_a = -1$$

پارامتربندی می شوند. اکنون می توان یک میدان تانسوری B_{ab} به صورت زیر تعریف کرد:

$$B_{ab} = \nabla_b u_a$$

(۱-۱)

که به صورت فضایی است یعنی

$$B_{ab} u^a = B_{ab} u^b = 0$$

(۲-۱)

که در آن ∇ نشان دهنده مشتق هموردا می باشد.

اکنون یک متریک فضایی (یا عملگر تصویر) را که در آن رابطه زیربرقرار است تعریف می کنیم:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$$

(۳-۱)

که در آن h_{ab} نمایشگر تانسور تصویر می باشد. بنابراین حال می توان عملگر تصویر فضای قائم u_a را به صورت زیر بیان نمود.

$$h_b^a = g^{ac} h_{cb}$$
(۱–٤)

ما تعریف می کنیم نرده ای انبساط θ و تانسور برش σ_{ab} وتانسور پیچش (یا تاو) ω_{ab} را مطابق تعاریف زیر:

$$\theta = B^{ab} h_{ab}$$
(۱–٥)

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$$
(۱–٦)

$$\omega_{ab} = B_{[ab]}$$
(۱–٧)

که در آن $B_{(ab)}$ و $B_{[ab]}$ به ترتیب تانسورهایی متقارن و پاد متقارن می باشند یعنی به صورت زیر تعریف می گردند.

$$B_{(ab)} = \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba})$$
(۱–٨)

و

$$B_{[ab]} = \frac{1}{2}(B_{ab} - B_{ba})$$

(۹-۱)

بنابراین تانسور B_{ab} شکل زیر را پیدا می کند:

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}$$

(۱۰-۱)

با در نظر گرفتن معادلات زیر:

$$\begin{aligned} u^c \nabla_c B_{ab} &= u^c \nabla_c \nabla_b u_a = u^c \nabla_b \nabla_c u_a + R^d_{cba} u^c u_d \\ &= \nabla_b (u^c \nabla_c u_a) - (\nabla_b u^c)(\nabla_c u_a) + R^d_{cba} u^c u_d \\ &= -B^c_b B_{ac} + R^d_{cba} u^c u_d \end{aligned}$$

(۱۱-۱)

که در آن R^d_{cba} تانسور ریچی می باشد . با ردگرفتن از معادله بالا به دست می آوریم :

$$u^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd} u^c u^d + \nabla_a (\frac{du^a}{ds})$$

(۱۲-۱)

اصطلاحا به این معادله مهم و مشهور در نسبیت عام معادله ریچاودری استاندارد می گویند.

لازم به ذکر است قسمت متقارن بدون تریس آن معادله نیز به صورت زیر مرتب می گردد:

$$u^c \nabla_c \sigma_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma_b^c - \omega_{ac}\omega_b^c + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd})$$
$$+C_{cbad}u^c u^d + \frac{1}{2}(h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{3}h_{ab}h_{cd}R^{cd})$$

(۱۳-۱)

که در آن C_{cbad} نمایشگر تانسور ویل می باشد.

سر انجام قسمت غیر متقارن نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$u^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma^c{}_{[b}\omega_{a]c}$$

(۱٤-۱)

معادله میدان انیشتین نیز مطابق زیر با معادله ریچاودری مربوط می گردد:

$$R_{ab}u^a u^b = 8\pi\left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right]u^a u^b = 8\pi\ [T_{ab}u^a u^b + \frac{1}{2}T]$$

(۱٥-۱)

که در آن معادلات بالا در حالت بردارهای ژئودزی های زمان گونه مطرح می گردد.

تا کنون به اثبات معادله ریچاودری به صورت مرسوم و آکادمیک مطابق کتاب نسبیت عام نوشته والد با اندکی تغییر جهت پیوستگی مطالب با فصل بعد پرداخته ایم. اکنون می خواهیم شکل دیگری از این معادله را که چندان تفاوت چشم گیری با حالت کلاسیک گفته شده ندارد جهت شناخت بیش تر معادله ریچاودری مورد مطالعه قرار دهیم. این مطلب بر گرفته از مقاله ابریو و همکارانش

(ابریو،۲۰۱۱) می باشد که در آن نیز برای شیوایی و هماهنگی با بقیه فصول اندکی تغییرات اسمی در کمیت ها داده ایم.اکنون مطابق این منبع داریم:

$$\theta = \nabla . u$$

(۱-۱۶)

در نتیجه مطابق فرمول مشتق هموردا خواهیم داشت:

$$\frac{d\theta}{ds} = u.\nabla\theta = \nabla.(\theta u) - \theta\nabla.u = \nabla.(\theta u) - \theta^2$$

(۱-۱۷)

اکنون معادله ریچاودری به صورت زیر مرتب می گردد:

$$\nabla_a\left(\theta u^a - \frac{du^a}{ds}\right) = -R_{ab}u^a u^b + \omega^2 - \sigma^2 + \frac{2}{3}\theta^2$$

(۱-۱۸)

یا

$$R_{ab}u^a u^b = \omega^2 - \sigma^2 + \frac{2}{3}\theta^2 + \nabla_a\left(-\theta u^a + \frac{du^a}{ds}\right)$$

(۱-۱۹)

لازم به ذکر است که در بعضی از منابع به جای کمیت ds کمیت $d\tau$ را قرار داده اند، می توان این گونه بیان کرد که کمیت ds در این جا نشان دهنده مشتق نسبت به یک پارامتر آفین کلی می باشد که مثلا می توان به جای آن از کمیت $d\tau$ هم نیز استفاده نمود.

۱-۳-معادله ریچاودری برای بردارهای هم جهت ژئودزی های پوچ

اگر با بردارهای ژئودزی های پوچ سروکار داشته باشیم (این بردارها در مورد مسیر فوتون ها به کار می رود) مطابق کتاب نسبیت عام نوشته والد به صورت زیر می توانیم معادله ریچاودری را به دست بیاوریم. اکنون در این جا میدان مماسی k_{a} مد نظر می باشد . در نتیجه میدان تانسوری B_{ab} به صورت زیر می باشد:

$$B_{ab} = \nabla_b k_a$$

(۲۰-۱)

در این صورت میدان تانسوری کلاه دار $\hat{B}_{ab}$به شکل زیر مطرح می گردد:

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}$$

(۲۱-۱)

که در آن روابط زیر برقرار می باشد:

$$\theta = \hat{h}^{ab}\hat{B}_{ab}$$

(۲۲-۱)

$$\hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab}$$

(۲۳-۱)

$$\widehat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]}$$

(۲٤-۱)

اختلاف ضریب $\frac{1}{2}\theta h_{ab}$ در این قسمت و $\frac{1}{3}\theta h_{ab}$ در قسمت قبلی از این موضوع ناشی می شود که در این جا فضا دو بعدی و در قسمت قبل فضای مربوطه سه بعدی می باشد.

اکنون به ادامه اثبات مطابق زیر می پردازیم. در قبل داشتیم:

$$k^c\nabla_c B_{ab} + B_b^c B_{ac} = R_{cba}^d k_d k^c$$

(۲٥-۱)

حال این معادله را اگر بصورت کلاه دار در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$k^c\nabla_c\hat{B}_{ab} + \hat{B}_b^c\hat{B}_{ac} = R_{\widehat{cbad k^c}} k^d$$

(۲٦-۱)

سرانجام معادله ریچاودری در ژئودزی های پوچ به شکل زیر به دست می آید :

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \widehat{\omega}_{ab}\widehat{\omega}^{ab} - R_{cd}k^c k^d$$

(۱–۲۷)

حال قسمت متقارن و غیر متقارن آن نیز مطابق دو معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$k^c \nabla_c \hat{\sigma}_{ab} = -\theta \hat{\sigma}_{ab} + C_{\widehat{cbad} k^c} k^d$$

(۱–۲۸)

$$k^c \nabla_c \widehat{\omega}_{ab} = -\theta \widehat{\omega}_{ab}$$

(۱–۲۹)

بیش تر تمرکز این نوشته بر روی معادله ریچاودری بردارهای هم جهت ژئودزی های زمان گونه می باشد.

۱–۴–کاربردهای معادله ریچاودری

۱–۴–۱– معادله ریچاودری در شاره های کامل

برای شاره کامل تانسور انرژی – تنش ماده عبارتست از :

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab}$$

(۱–۳۰)

که در آن ρ و p به ترتیب نشان دهنده چگالی و فشار شاره کامل می باشد.

حال با جایگذاری این معادله در معادله میدان انیشتین و از طرف دیگر ضرب معادله انیشتین در g_{ab} که همان ردگیری معادله میدان نامیده می شود به ترتیب به معادلات زیر دست می یابیم.

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=kT_{ab}$$

(۳۱-۱)

به این معادله، معادله میدان انیشتین می گویند که در آن $k=-8\pi$ و R_{ab} و R و g_{ab} به ترتیب نشان دهنده تانسورریچی ، اسکالر ریچی و تانسور متریک می باشند.

اکنون از معادله میدان انیشتین رد می گیریم یعنی اینکه آن را در g^{ab} ضرب می کنیم بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$R=-kT$$

(۳۲-۱)

که در آن از روابط زیر استفاده شده است:

$$g^{ab}R_{ab}=R$$

(۳۳-۱)

$$g^{ab}g_{ab}=4$$

(۳٤-۱)

$$g^{ab}T_{ab}=T$$

(۳٥-۱)