وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

روش عناصر متناهی براساس توابع B-اسپلاین برای حل برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

توسط:
عاطفه مومنی شورکچالی

استاد راهنما:
دکتر مرتضی گرشاسبی

استاد مشاور:
دکتر رضا پورقلی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

روش عناصر متناهی براساس توابع B-اسپلاین برای حل برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

توسط:

عاطفه مومنی شورکچالی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر مرتضی گرشاسبی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی عباسی ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سجاد رحمانی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آنان که وجودم برای شان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر

توانشان رفت تا به توانایی برسم و موهایشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنان که فروغ نگاه شان، گرمی کلام شان و روشنی روی شان سرمایه های جاودان زندگی من است

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامت شان تجلی یافت

آنان که دعای شان قوت قلب و بدرقه راهم است

در برابر وجود گرامی شان زانوی ادب بر زمین می نهم و با قلبی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستهایشان بوسه می زنم

سرو وجودشان همیشه سرسبز و مستدام باد

و همسر عزیزم

آن مهربان همیشگی

که وجودش گرمی بخش لحظات زندگیم است

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر مرتضی گرشاسبی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والاایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا پورقلی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی و جناب آقای دکتر سید هاشم طیبی که در مقام داور زحمت مطالعه پایان نامه را بر عهده داشتند قدردانی می نمایم.

در نهایت سپاس و تشکر خود را تقدیم دوستان مهربانم می کنم که مرا در سختی ها تنها نگذاشتند و همواره در کنارم بودند.

عاطفه مومنی شورکچالی

شهریور ماه ۹۰

چکیده

روش عناصر متناهی براساس توابع B-اسپلاین برای حل برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

به وسیله‌ی:

عاطفه مومنی شورکچالی

در این پایان‌نامه حل معادله‌ی موج بلند منظم RLW به کمک روش عناصر متناهی براساس توابع B-اسپلاین مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا در فصل اول روش عناصر متناهی معرفی می‌شود و با ارائه چند مثال این روش به‌صورت مبسوط تشریح می‌شود. در فصل دوم توابع B-اسپلاین و قضایا و لم‌های مربوط به آن بیان می‌شود. فصل سوم مربوط به معرفی معادلات RLW می‌باشد. در نهایت در فصل چهارم با استفاده از روش عناصر متناهی براساس توابع پایه‌ای B-اسپلاین، به حل عددی معادله‌ی RLW پرداخته می‌شود و نتایج عددی و تحلیلی برای چند مثال با هم مقایسه می‌شوند.

واژگان کلیدی: روش عناصر متناهی، توابع B-اسپلاین، معادلات RLW، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ..... ه

فهرست جدول‌ها ..... ز

فهرست شکل‌ها ..... ح

۱ مبانی روش عناصر متناهی ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ روش عناصر متناهی ۲

۱-۳ تاریخچه مختصری از روش عناصر متناهی ۳

۱-۴ کاربردهای روش عناصر متناهی ۴

۱-۵ اساس کار روش عناصر متناهی ۴

۱-۶ انواع عناصر متناهی ۵

۱-۷ انواع خطا ۵

۱-۸ حل چند مسئله به روش عناصر متناهی ۶

۱-۹ اصول روش عناصر متناهی ۹

۱-۱۰ روش طیفی در مقایسه با روش عناصر متناهی ۲۰

۲ توابع B-اسپلاین ۲۵

۲-۱ نظریه تقریب ۲۵

۲-۲ B-اسپلاین‌ها ۲۵

۲-۳ B-اسپلاین ها از درجه صفر ۲۶

۲-۴ B-اسپلاین هایی از درجه یک ۲۸
۲-۵ خواص B-اسپلاین‌ها ۲۸
۲-۶ روندعددی ۳۰
۲-۷ مشتق و انتگرال B-اسپلاین‌ها ۳۱
۲-۸ خواص اضافی ۳۴
۲-۹ کاربردهای B-اسپلاین‌ها ۳۵
۲-۱۰ پایه‌ای برای فضای S_n^k ۳۶
۲-۱۱ ماتریس درونیاب ۳۷
۲-۱۲ روش‌های تقریبی غیر درونیاب ۴۳
۲-۱۳ فاصله یک تابع نسبت به فضای اسپلاین ۴۶

۳ معادلات RLW ۴۸
۳-۱ مقدمه ۴۸
۳-۲ معرفی معادله RLW ۴۸
۳-۳ تاریخچه ۵۲
۳-۴ کاربردها ۵۵

۴ حل عددی معادلهRLW ۵۶
۴-۱ مقدمه ۵۶
۴-۲ روش B-اسپلاین گالرکین درجه پنجم(۱)(QBGM۱) ۵۶
۴-۳ روش B-اسپلاین گالرکین درجه پنجم(۲)(QBGM۲) ۶۱
۴-۴ نتایج عددی ۶۳
۴-۵ نتیجه‌گیری ۶۶

مراجع ۶۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۵

فهرست جدول‌ها

۴-۱ مقایسه بین جواب‌های واقعی و جواب‌های تحلیلی در $\Delta t = ۰/۱$ ۶۵
۴-۲ مقایسه بین جواب‌های واقعی و جواب‌های تحلیلی در $\Delta t = ۰/۱$ ۶۵

فهرست شکل‌ها

۱-۱ انواع عناصر متناهی ۵
۱-۲ یک تابع و یک تقریب خطی تکه‌ای ۸
۱-۳ تابع هت ۱۴
۱-۴ نمایش خطای حاصل از انتخاب (??)با استفاده از روش طیفی ۲۰
۱-۵ نمایش خطای حاصل از انتخاب (??)با استفاده از روش طیفی ۲۱

۲-۱ B-اسپلاین B_i^0 ۲۶
۲-۲ B-اسپلاین B_i^1 ۲۸
۲-۳ توسیعی از تابع f ۴۴

۳-۱ موج سالیتوری در یک کانال موج آزمایشگاهی ۵۱

۴-۱ شکل بالا جواب موج تنها با پارامترهای $x_0 = 0, c = 0/1, t = 0/1, h = 0/1$ با استفاده از روش ($QBCM1$). ۶۴
۴-۲ شکل بالا جواب موج تنها با پارامترهای $x_0 = 0, c = 0/1, t = 0/1, h = 0/1$ با استفاده از روش ($QBCM2$). ۶۵

فصل ۱

مبانی روش عناصر متناهی

۱-۱ مقدمه

روش عناصر متناهی یا روش المان‌های محدود [۱] یک روش عددی برای حل تقریبی معادلات تابعی مانند معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی می‌باشد. این روش برای حل مسائل مقدار مرزی خصوصا در نواحی غیر منتظم بسیار مناسب است.

برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل مربوط به آن، یکی از روش‌هایی که در دهه‌های اخیر همواره مورد توجه بوده است، روش عناصر متناهی می‌باشد. به دلیل کاربردهای متنوعی که مبحث معادلات دیفرانسیل در زمینه‌های مختلف علوم دارد، حل مسائل مختلف مطرح شده در مورد آنها، ضروری می‌نماید. به‌خاطر توانایی روش عناصر متناهی، بسیاری از بسته‌های نرم افزاری [۲] تجزیه و تحلیل مسائل مهندسی، براساس این روش بنا نهاده شده‌اند.

در مهندسی امروز نیز یکی از روش‌های متداول برای بررسی یک مدل، تقسیم مدل به المان‌های کوچکتري است تا قوانین علمی را بتوان به سادگی برای آن المان‌ها بررسی کرد و به نتایج خوبی رسید. به‌عنوان مثال تعیین نیروهای موجود در اعضاي يك خرپا که با تقسیم آن خرپا به المان‌های متعدد و نوشتن معادلات تعادل در آن‌ها مي‌توان تمامی نیروهای داخلی را محاسبه کرد.

[۱] Finite Element Method

[۲] Abaqus,Adina,ansys,...

۱-۲ روش عناصر متناهی

اساس کار روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل مربوط به آنها، حذف کامل معادلات دیفرانسیل یا ساده‌سازی آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد تا بتوان از روش‌های تحلیلی و عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی مانند روش‌های اویلر، رانگ-کوتا برای حل آنها بهره گرفت. به عبارت دیگر اساس این روش در این است که یک ناحیه جواب می‌تواند بطور تحلیلی با قرار دادن مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های کوچک زیادی که با هم مرتبط می‌باشند و عناصر گسسته نامیده می‌شود، شکل بگیرد و یا تقریب زده شود. در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مسئله مهم این است که به معادله ساده‌ای که از نظر عددی پایدار است، برسیم. روش‌هایی با مزایا و معایب مختلف برای این امر وجود دارد، که روش عناصر متناهی یکی از بهترین روش‌ها است.

در روش عناصر متناهی، عناصر مورد استفاده در روش را می‌توان به روش‌های مختلف چیدمان نمود و به‌همین دلیل می‌توان از آنها برای نمایش اشکال خیلی پیچیده استفاده کرد و با این عناصر یک تقریب موضعی برای معادلات حاکم بدست آورد.

این روش درحل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی دامنه‌های پیچیده (مانند وسائل نقلیه و لوله‌های انتقال نفت)، هنگامی که دامنه متغیر است، وقتی که دقت بالا در همه جای دامنه الزامی نیست و یا اگر نتایج، همبستگی و یکنواختی کافی را ندارند، بسیار مفید می‌باشد.

برای مدل‌سازی یک شکل هندسی پیچیده، روش تفاضلات متناهی [۳] از گام‌های پله‌ای در مرزها استفاده می‌کند، در صورتی که عناصر متناهی [۴] از نواحی مثلثی استفاده می‌کند و به گره‌های کمتری نیاز دارد، همچینین یک تقریب بهتری برای شکل مرزی در نظر می‌گیرد، زیرا مرز منحنی شکل توسط یک سری خطوط راست نمایش داده می‌شود.

در یک پیوستار، یک مقدار فیزیکی مقادیر نامحدودی را دارا می‌باشد زیرا تابعی از هر نوع نقطه در ناحیه جواب وجود دارد. بنابراین مسئله، یک مسئله با تعداد نامحدودی جواب است. روش‌های گسسته‌سازی عناصر متناهی چنین مسئله‌ای را با تقسیم ناحیه جواب به عناصر و با بیان متغیر میدان مجهول (مطابق با هر عنصر) برحسب تابع تقریبی فرض شده به مسئله‌ای با تعداد متناهی مجهول تبدیل می‌کند.

توابع تقریبی (که توابع درونیاب ناحیه هستند) برحسب مقادیر متغیرهای میدان در نقاط مشخص که گره یا نقاط گرهی نامیده می‌شوند، تعریف می‌شود. گره‌ها معمولا بر روی مرزهای عناصر قرار می‌گیرند که باید با عناصری که مجاور در نظر گرفته می‌شوند، همبند باشند. مقادیر گره‌ها و توابع درونیاب برای عناصر، به‌طور کامل رفتار متغیرهای میدان را در داخل عناصر تعریف می‌کنند. بنابراین طبیعت جواب و درجه تقریب نه تنها

[۳] Finite Difference Method

[۴] Finite Element Method

به اندازه، شکل و تعداد عناصر بستگی دارد بلکه به توابع درونیاب انتخاب شده نیز بستگی دارد. واضح است که نمی‌توان توابع را بطور دلخواه انتخاب کرد زیرا می‌بایست در برخی شرایط معین نیز معین باشد. اغلب توابع طوری انتخاب می‌شوند که متغیرهای میدان و مشتق‌های آنها تا مرتبه معینی در سراسر مرزهای عناصر مجاور پیوسته باشند.

بنابراین روش عناصر متناهی نه فقط سازش گره‌ها را با مرز برقرار می‌کند، بلکه در قسمت‌هایی که جواب مسئله به سرعت تغییر می‌کند گره‌ها را نزدیک هم قرار می‌دهد. نکته قابل توجه این است که در این روش نقاط گره‌ای را می‌توانیم به‌طور دلخواه در مکان‌های مختلف قرار دهیم. این‌کار را برای نواحی دو بعدی و سه بعدی نیز می‌توان انجام داد ولی در تفاضلات متناهی و روش‌های دیگر این قابلیت را ندارند، یعنی در این روش‌ها اگر نواحی غیرمنتظم داشته باشیم با مشکل جدی روبرو خواهیم شد.

۱-۳ تاریخچه مختصری از روش عناصر متناهی

ایده‌ي استفاده از عناصر متناهی برای تحلیل مدل‌های مختلف ایده‌ی جدیدي نیست بلکه از زمان‌هاي بسیار قدیم آن را مي‌شناختند وبه کار مي‌بردند یکي از مثال‌هاي بسیار قدیمي محاسبه‌ي عدد pi می‌باشد.

پیدایش روش اجزاء محدود به حل مسائل پیچیده‌ی الاستیسیته و تحلیل سازه‌ها در مهندسی عمران و هوا فضا برمی‌گردد.

در ادامه به صورت مختصر و فهرست‌گونه تاریخچه‌ای کوتاه بر روش عناصر متناهی را بیان می‌نماییم

– این روش حاصل کار الکساندرهرنیکوف [5] در سال **۱۹۴۱** و ریچارد کورانت [6] در سال **۱۹۴۲** می‌باشد. با این که روش کار این دو دانشمند کاملا متفاوت بود، اما یک ویژگی مشترک داشت، تقسیم یک دامنه‌ی پیوسته (ماده) به یک سری زیردامنه (قطعات کوچکتر ماده) به نام المان (اجزاء).

– عبارت عناصر متناهی برای اولین بار توسط کلاف [7] در سال **۱۹۶۰** پدید آمد. در اوایل دهه **۱۹۶۰** مهندسین از این روش برای تقریب جواب‌های مسائل تحلیل تنش، جریان سیال، انتقال گرما و سایر زمینه‌ها بهره جستند.

– اولین کتاب روش عناصر متناهی توسط زین کیوز [8] و چانگ [9] در سال **۱۹۶۷** انتشار یافت.

– در اواخر دهه **۱۹۶۰** و اوایل دهه **۱۹۷۰** روش عناصر متناهی در انواع گسترده‌ای از مسائل مهندسی به‌کار گرفته شد.

---

[5] Alexander hernickof

[6] Richurd Kourunt

[7] Clough

[8] Zienkiewicz

[9] chung

– بسیاری از بسته‌های نرم افزاری [10] روش عناصر متناهی در اوایل دهه ۱۹۷۰ نشات گرفت و در کامپیوترهای بزرگ مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

– در دهه ۱۹۸۰ به‌طور گسترده در کامپیوترهای شخصی مورد استفاده قرار گرفته است.

۱-۴ کاربردهای روش عناصر متناهی

نحوه پیدایش روش عناصر متناهی و نیز نحوه‌ی اثبات بسیاری از خواص آن، جذابیتی برای علوم مختلف در ارتباط با این روش ندارد. اما مهندسان باید با روش‌هایی که، یک مدل فیزیکی با معادله‌ی دیفرانسیل را به معادلات جبری ساده‌تر تبدیل می‌کند، آشنا باشند. بسیاری از مسائل فنی مهندسی در شاخه‌هایی مانند مکانیک سیالات، انتقال حرارت و تحلیل سازه‌هایی همچون خرپاها از این روش قابل حل و تجزیه و تحلیل می‌باشند. تحلیل‌های مربوط به تنش و کرنش اجزاء مکانیکی و ارتعاشات که در مهندسی مکانیک اهمیت فراوانی دارند، با این روش به راحتی قابل حل هستند.

روش عناصر متناهی زمان انجام عملیات برای حل بسیاری از مسائل را کاهش داده است. به‌طور مختصر، مزایای روش عناصر متناهی از دیدگاه مهندسین شامل دقت بیشتر، چرخه طراحی سریعتر و ارزان‌تر، بهره‌وری بالاتر و درآمد بیشتر می‌باشد.

۱-۵ اساس کار روش عناصر متناهی

۱) گسسته کردن پیوستار با استفاده از عناصر متناهی مناسب.

۲) انتخاب یک تابع درونیاب مناسب، یعنی نسبت دادن گره‌ها به هر عنصر و سپس انتخاب یک تابع درونیاب برای نمایش تغییرات متغیرهای میدان بر روی هر عنصر.

۳) پیدا کردن خواص اصلی عناصر.

۴) جمع کردن خواص عناصر برای بدست آوردن دستگاه معادلات - اساس روش جمع آوری از این حقیقت ناشی می‌شود که در یک گره که در آن عناصر بهم متصل می‌شوند مقدار متغیر میدان برای هر عنصر که آن گره در آن شرکت می‌کند یکسان باقی بماند.

۵) حل دستگاه معادلات و حاصل.

۶) تصحیح جواب در صورت لزوم.

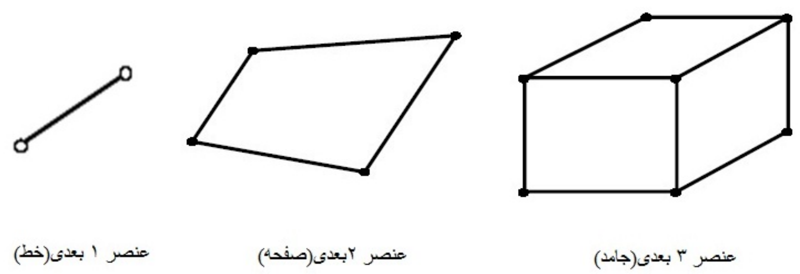
[10] Abaquse,Adina,ansys,...

برای حل مسائل به روش عناصر متناهی، روش‌های رایلی ریتز [11] و گالرکین [12] بسیار سودمند می‌باشند. روش ریتز تابع مسئله را با صفر گرفتن مشتقات جزئی مینیمم می‌کند و روش گالرکین انتگرال‌های یک تابع وزن‌دار را مساوی صفر قرار می‌دهد.

به عبارت دیگر روش گالرکین با تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای به روش عناصر متناهی معروف است.

۱-۶ انواع عناصر متناهی

این عناصر به‌صورت‌های خطی، دوبعدی و سه بعدی می‌باشند.



شکل ۱-۱: انواع عناصر متناهی

۱-۷ انواع خطا

خطاهایی که با آن مواجه هستیم عبارتند از

- خطای مدل‌سازی
- خطای گسسته‌سازی (متناهی، تکه‌ای و...)
- خطای عددی (در حل معادلات عناصر متناهی)

[11] Ritze Method

[12] Galerkin Method

۸-۱ حل چند مسئله به روش عناصر متناهی

در ادامه به حل دو مسئله خاص به روش عناصر متناهی اشاره می کنیم. مسئله $P_۱$، یک مسئله معادله دیفرانسیل یک بعدی به‌صورت زیر است

$$P_۱ : \begin{cases} u''(x) = f, \\ u(۰) = u(۱) = ۰, \end{cases} \qquad x \in (۰, ۱).$$

که f یک تابع معین و u تابع مجهولی از x است و u'' مشتق دوم u نسبت به x را نشان می‌دهد.
مسئله $P_۲$، یک مسئله دو بعدی دیریکله [۱۳] به‌صورت زیر می‌باشد

$$P_۲ : \begin{cases} u''(x) = f, & in\Omega \\ u(۰) = u(۱) = ۰, & on\partial\Omega \end{cases}$$

که Ωیک ناحیه باز همبند در صفحه (x, y) با مرز $\partial\Omega$ است.

مسئله $P_۱$ را می‌توان به صورت مستقیم حل نمود. اما این روش حل مسائل مقدار مرزی فقط زمانی کاربرد دارد که مسئله یک بعدی باشد و برای مسائل با ابعاد بالاتر عمومیت ندارد. به همین جهت، از روش عناصر متناهی برای حل مسئله $P_۱$ استفاده می‌کنیم و آنرا به مسئله $P_۲$ تعمیم می‌دهیم.

برای حل مسئله مقدار مرزی با این روش، باید دو گام اساسی برداشته شود. در گام نخست، باید مسئله اصلی را به فرم ضعیف یا مسئله تغییراتی آن تبدیل نمود و گام دوم، گسسته‌سازی است که فرم ضعیف به دست آمده در گام نخست، در یک فضای متناهی‌البعد، گسسته‌سازی می‌گردد.

۱-۸-۱ مسئله تغییراتی [۱۴] (فرم ضعیف مسئله)

روش عناصر متناهی برای حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل، روشی بر مبنای مسئله تغییراتی (فرم ضعیف) است. در حالت کلاسیک، به یک تقریب مشتق دوم نیاز داریم در صورتی‌که در فرم ضعیف فقط به تقریب مشتق اول نیاز داریم. فرم ضعیف، زمانی که ناپیوستگی وجود داشته باشد نیز برقرار است. لذا باید مسئله $P_۱$ و $P_۲$ را به فرم ضعیفشان تبدیل کنیم. اگر u جواب مسئله $P_۱$ باشد، آنگاه به ازای هر تابع هموار v که در شرط مرزی صدق می‌کند، یعنی در $x = ۰$ و در $x = ۱$، $v = ۰$، داریم

[۱۳] Dirichlet

[۱۴] Variational Formulation

$$\int_{0}^{1} f(x)v(x)dx = \int_{0}^{1} u''(x)v(x)dx. \tag{۱.۱}$$

برعکس، اگر $u(0) = u(1) = 0$ به ازای هر تابع هموار v، در (۱.۱) صدق نماید آنگاه می‌توان نشان داد که این u، مسئله P_1 را نیز حل خواهد نمود. با انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت سمت راست و با استفاده از شرایط $v(0) = v(1) = 0$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} f(x)v(x)dx &= \int_{0}^{1} u''(x)v(x)dx = u'(x)v(x)\mid_{0}^{1} - \int_{0}^{1} u'(x)v'(x)dx \\ &= -\int_{0}^{1} u'(x)v'(x)dx = -\Phi(u,v) \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

۱-۸-۲ وجود و یکتایی جواب مسئله

می‌توان فرض نمود که $H_0^1(0,1)$، توابع مطلقا پیوسته و یک بار مشتق پذیر روی بازه‌ی $(0,1)$ باشد که در $x = 0$ و $x = 1$ برابر صفر هستند. در نتیجه نگاشت دو خطی متقارن Φ، یک ضرب داخلی تعریف می‌کند که $H_0^1(0,1)$ را به یک فضای هیلبرت [۱۵] می‌نگارد. به عبارت دیگر، عبارت سمت چپ (۱.۱) نیز یک ضرب داخلی است. یک کاربرد از قضیه نمایش ریتز برای فضای هیلبرت $L^2(0,1)$، نشان می دهد که u منحصر بفردی وجود دارد که در (۲.۱) و در نتیجه در مسئله P_1 صادق است.

۱-۸-۳ مسئله تغییراتی مسئله P_2

به کمک انتگرال جزء به جزء می‌بینیم که اگر u جواب مسئله P_2 باشد، آنگاه به ازای هر v، داریم

$$\int_{\Omega} fvds = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla vds = -\Phi(u,v)$$

که ∇، گرادیان و "."، هم ضرب نقطه‌ای در صفحه‌ی دو بعدی را نشان می‌دهد. Φ، می‌تواند روی یک فضای مناسب $H_0^1(0,1)$ از توابع یک بار مشتق‌پذیر Ω، که روی $\partial\Omega$، صفر هستند یک ضرب داخلی را نشان دهد. با فرض $v \in H_0^1(0,1)$، وجود و یکتایی جواب نیز اثبات می‌گردد.

[۱۵] Hilbert Space

۱-۸-۴ گسسته سازی

ایده اصلی این کار، جایگزین نمودن مسئله خطی نامتناهی‌البعد

$u \in H_0^1(0,1)$ را طوری بیابید که داشته باشیم

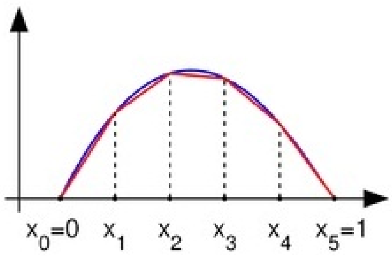
$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad -\Phi(u,v) = \int fv$$

با یک نسخه متناهی‌البعد زیر

$u \in V$ را طوری بیابید که داشته باشیم

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad -\Phi(u,v) = \int fv \tag{۳.۱}$$

که V یک زیر فضای متناهی‌البعد از $H_0^1(0,1)$ می‌باشد. انتخاب‌های ممکن متعددی برای V وجود دارد. با این وجود برای روش عناصر متناهی، V را فضای توابع خطی تکه‌ای در نظر می‌گیریم. در مسئله



شکل ۱-۲: یک تابع و یک تقریب خطی تکه‌ای

P_1، در بازه‌ی $[0,1]$ نقاط گره‌ای را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$$

و V را نیز بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V = \left\{ \begin{array}{l} v : [0,1] \to R : v \text{ is continuous}, v\mid_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ is linear for } k = 0, 1, \ldots, n, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{array} \right\}$$

مشاهده می‌شود که توابع عضو V، مشتق‌پذیر نمی‌باشند. در واقع، اگر $v \in V$ باشد آنگاه در هیچ $x = x_i$، که $i = 1, \ldots, n$ مشتق تعریف نمی‌گردد. اما در سایر مقادیر x، مشتق موجود می‌باشد و

می‌توان از این مشتق برای انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده نمود. برای مسئله $P_۲$ نیاز داریم که V، یک مجموعه از توابع Ω باشد.

۱-۸-۵ انتخاب پایه

برای تکمیل گسسته سازی، باید پایه‌ای از V را انتخاب کنیم. در حالت یک بعدی، برای هر نقطه کنترل x_i، تابع خطی تکه‌ای v_i در V را انتخاب می‌کنیم که مقدار آن در x_i، ۱و در x_j، $i \neq j$، برابر صفر می‌باشد، یعنی

$$v_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-۱}}{x_i - x_{i-۱}}, & x_{i-۱} \leq x \leq x_i \ , \\ \dfrac{x_{i+۱} - x}{x_{i+۱} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+۱} \ , \\ ۰, & x < x_{i-۱}, x > x_{i+۱} \ , \end{cases} \qquad i = ۰, ۱, ..., n + ۱ \ .$$

تابع v_i، تابع منحصر بفردی از V است که در x_i برابر۱ و در هر x_j که $i \neq j$، برابر صفر می‌باشد.

دلیل انتخاب پایه

مزیت اولیه انتخاب پایه، ضرب داخلی می‌باشد.

$\langle v_j, v_i \rangle = \int_۰^۱ v_j v_i dx$ و $\Phi(v_j, v_i) = \int_۰^۱ v'_j v'_i dx$ برای تقریبا همه‌ی j و i،صفر است. در حالت یک بعدی، دامنه v_i، بازه $[x_{i-۱}, x_{i+۱}]$ می‌باشد. لذا تابع زیر انتگرال $\langle v_j, v_i \rangle$ و $\Phi(v_j, v_i)$، زمانی که $| j - i |> ۱$، برابر صفر خواهد بود. به طور مشابه، در حالت مسطح(دو بعدی)، اگر x_j و x_i در لبه‌ای از مثلث‌بندی، سهمی نداشته باشند، انتگرال‌های $\int_\Omega v_j v_i ds$ و $\int_\Omega \nabla v_j . \nabla v_i ds$ صفر می‌شوند.

۱-۹ اصول روش عناصر متناهی

در روش عناصر متناهی چند اصل مهم وجود دارد، اما ترکیب این اصول، روش عناصر متناهی را به یک روش محاسباتی موثر تبدیل می‌کند. برای بیان این اصول از یک مثال استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۹.۱. مسئله مقدار مرزی خطی به فرم زیر را در نظر بگیرید

$$-\frac{d}{dx}[a(x)\frac{du}{dx}] + b(x)u = f, \quad ۰ \leq x \leq ۱, \tag{۴.۱}$$

که در آن a و b و f توابع معینی هستند و a مشتق‌پذیر و $a(x) > ۰$ و $b(x) \geq ۰$. هر معادله به فرم (۴.۱) باید با شرایط اولیه و مرزی مشخص شود. برای سهولت، شرایط مرزی دیریکله زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(۰) = \alpha, \quad u(۱) = \beta. \tag{۵.۱}$$

به‌جای تقریب جواب مسئله (۴.۱) بر روی نقاط گره‌ای، می‌خواهیم u را در یک فضای متناهی‌البعد تقریب بزنیم. برای این منظور تابع $\varphi_۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط مرزی (۵.۱) صدق کند و یک مجموعه از m تابع مستقل خطی $\varphi_۱, \varphi_۲, ..., \varphi_m$ را به نحوی انتخاب می‌کنیم که شرایط مرزی صفر را داشته باشند یعنی

$$\varphi_\ell(۰) = \varphi_\ell(۱) = ۰, \quad \ell = ۱, ۲, ..., m$$

هدف ما نمایش u به فرم تقریبی زیر است

$$u_m(x) = \varphi_۰(x) + \sum_{\ell=۱}^{m} \gamma_\ell \varphi_\ell(x), \quad ۰ \leq x \leq ۱ \tag{۶.۱}$$

که در آن $\gamma_۱, \gamma_۲, ..., \gamma_m$ ثابت حقیقی هستند و فرض می‌کنیم

$$\mathring{H}_m = Sp\{\varphi_۱, \varphi_۲, .., \varphi_m\}$$

فضای تولید شده توسط $\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_m$، مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی از این توابع باشد. φ_ℓها، $\ell = ۱, ۲, .., m$ مستقل خطی هستند، $\mathring{H}_m$ یک فضای خطی m بعدی می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر $u_m - \varphi_۰ \in \mathring{H}_m$ باشد u_m جواب تقریبی (۴.۱) می‌باشد. توجه داشته باشید که هر عضو از $\mathring{H}_m$ در شرایط مرزی صفر صدق می‌کند. بنابراین u_m نیز باید در شرایط (۵.۱) صدق نماید.

بنابراین، اولین اصل از روش عناصر متناهی «تقریب جواب در فضای متناهی‌البعد می‌باشد.»

$\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots, \gamma_m$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در معادله دیفرانسیل(۴.۱) در m نقطه متمایز در $[۰, ۱]$ صدق کند. برای هر انتخاب $\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots, \gamma_m$ ، خطای d_m را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$d_m(x) = -\frac{d}{dx}[a(x)\frac{du_m(x)}{dx}] + b(x)u_m(x) - f(x), \quad ۰ < x < ۱$$

اگر u_m جوابی از (۴.۱) باشد خطا برابر صفر خواهد شد. بنابراین هرچه d_m، نزدیکتر به صفر باشد می‌تواند تقریب بهتری برای جواب ما باشد. بهترین حالت زمانی است که d_m در $\mathring{H}_m$ قرار بگیرد در این‌صورت برای همه‌ی $\gamma_۱, ..., \gamma_m$ مسئله ساده خواهد بود. تابع صفر در فضای ضرب داخلی، بوسیله