بسم الله الرحمن الرحيم

1.6

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

زیرنیم مدول های اول ضعیف روی نیم حلقه ها

استاد راهنما

دکتر ناهید هادیان دهکردی

پژوهشگر

کیمیا بهی زادی

شهریور ۱۳۹۱

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهرا (س) است.

الهی...

ای نزدیک تر به ما از ما و مهربان تر به ما از ما !
نوازنده ی ما بی ما .

به کرم خویش ، نه به سزای ما ، نه کار به ما ،

نه بار به طاقت ما ،

نه معاملت در خور ما ،
نه منت به توان ما ،

هر چه کردی تاوان بر ما .

هر چه تو کردی باقی بر ما .

هر چه کردی به جای ما .

به خود کردی نه برای ما !

سپاس گزاری...

حمد محمود بی همتا را که عنایتش کوه است و فضلش دریا .

بر خود واجب دانسته ، از زحمات بی دریغ استاد گرانقدر ، سرکار خانم دکتر هادیان دهکردی قدردانی نموده و از این که اینجانب را در آماده سازی این تحقیق چراغ راه بودند صمیمانه تشکر نمایم . هم چنین از اساتید فرهیخته سرکار خانم دکتر اخوان ملایری و جناب آقای دکتر نیک مهر که با بهره گیری از تجارب خویش در ارزیابی این پایان نامه اهتمام ورزیدند ، امتنان بیکران دارم .

فهرست مطالب

چکیده

نیم حلقه ها و نیم مدول های روی آن ها، حلقه ها و مدول هایی فاقد اعضای منفی هستند. در این پایان نامه، علاوه بر معرفی این دو ساختار تقریباً جدید جبری، بسیاری از مطالب نظریه حلقه ها و مدول ها برای آنها عمومیت داده شده است. موارد زیر از مهم ترین اهدافی هستند که در این مجموعه به بحث گذاشته شدند:

i) بررسی عناصر و ایده آل های نیم حلقه های خاص مانند نیم حلقه های حذفی آرتینی.

ii) اگر I ایده آلی افراز کننده و P زیر نیم مدولی اول (اولیه)تفریقی ضعیف نیم حلقه ی S باشند که $I \subseteq P$، آنگاه P/I ایده آل اول (اولیه)ضعیف نیم حلقه ی خارج قسمتی S/I است. هم چنین این قضیه و عکس آن در مورد زیر نیم مدول هایی از این نوع و نیم مدول خارج قسمتی صادق است.

iii) برای هر زیر نیم مدول اول مانند N از S -نیم مدول کامل M، ایده آل $(N : M)$ نیز اول است. به اولیه بودن $(N : M)$، در صورت اولیه بودن N نیز پرداخته شده است.

هم چنین در این پایان نامه، رابطه ی بین انواع دیگر ایده آل ها و زیر نیم مدول ها بررسی شده است که مطالعه ی این مباحث کاربرد فراوانی در زمینه هایی مانند نظریه گراف و رمزنگاری دارد.

واژگان کلیدی: نیم حلقه، نیم مدول، زیر نیم مدول اول ضعیف، زیر نیم مدول اولیه ضعیف، زیر نیم مدول تفریقی، زیر نیم مدول افراز کننده، نیم حلقه خارج قسمتی.

مقدمه

همان گونه که با مطالعه ی حلقه ها، بررسی مدول های روی آن‌ها امری اجتناب ناپذیر است، مطالعه ی نیم حلقه ها نیز بررسی نیم مدول های روی آن ها را ناگزیرانه واجب می گرداند. چون نیم حلقه (نیم مدول)ها همان حلقه (مدول)های فاقد تفریق هستند، بسط و توسیع خواص مدول و زیر مدول از رسته ی مدول ها به رسته ی نیم مدول ها، برخی از مؤلفان را برای نشان دادن آن ها ترغیب کرده است. برای نائل آمدن به این هدف، تحقیقات وسیعی صورت گرفته که در بسیاری از موارد نتیجه بخش بوده اند و در تعدادی از تحقیقات مشاهده می شود که همه ی نتایج در نظریه مدول ها برای نیم مدول ها پذیرفتنی نیستند. جذابیت این گونه تحقیقات و کاربردهای آن ها، ما را بر آن داشت تا در این پایان نامه به معرفی و بررسی نیم‌حلقه ها و ایده آل های آن ها و هم چنین نیم مدول ها و زیرنیم‌مدول‌های آن ها بپردازیم. در این خصوص از نتایج با ارزشی که توسط ابراهیمی‌آتانی [۱]، گوپتا [۲] و چادهری [۳] بدست آمده بود بهره های لازم را کسب کردیم. مراجع [۷، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳، ۲۴، ۳۱، ۳۳] شاهدی بر این مدعا هستند.

نیم حلقه ها در سال ۱۹۳۵ در [۴۱] برای اولین بار معرفی و نیم مدول ها به طور تخصصی و

[۱] S. E. Atani

[۲] V. Gupta

[۳] J. N. Chaudhari

دقیق تر توسط هنکوک [۴] مطرح شدند. لازم به تذکر است که مدول ها را علاوه بر حلقه‌ها، بر روی نیم حلقه ها نیز می توان تعریف نمود، با این تفاوت که مدول های روی حلقه‌ها، گروه‌های آبلی و مدول های روی نیم حلقه ها تنها تکوارهایی جابجایی هستند. نظریه نیم‌حلقه‌ها به عنوان یک زمینه ی میان رشته ای به وجود آمده و نظریه نیم مدول ها از توجهات جدید محققین است. مهم ترین موضوع در این نظریه ها، کاربرد آنها در جایگاه و زمینه ی مناسب است و لذا معرفی و بررسی ویژگی ها، ایده آل ها و زیر نیم مدول های جدید حائز اهمیت هستند. این دو ساختار تعمیم نسبتاً طبیعی ای از حلقه ها و مدول ها با کاربردهای وسیعی در ابعاد ریاضیاتی علوم کامپیوتر هستند. هم چنین امروزه از نیم حلقه ها در زمینه های ریاضیات، علوم و زبان های کامپیوتر، نظریه ماشین ها و مسائل بهینه سازی استفاده می‌شود. نیم‌مدول‌ها علاوه بر موارد مذکور ابزاری مفید و سودمند در زمینه ی نظریه گراف مانند [۱۵، ۲۰، ۲۱] و رمزنگاری هستند.

حال با بیان خلاصه ای از آن چه در پیش رو دارید، بحث را آغاز می کنیم. این پایان نامه با هدفی که بیان کردیم، در چهار فصل تنظیم شده است.

تعاریف و مطالب مقدماتی ساختارهای اصلی جبر یعنی گروه، حلقه و مدول را که در فصول مختلف راه گشا هستند در فصل اول گردهم آوردیم، لذا این فصل را به مروری بر مفاهیم آشنا در جبر اختصاص داده ایم.

فصل دوم از پایه های اصلی بحث است. در بخش اول تعاریف و خواص مختص نیم حلقه‌ها را ارائه می دهیم که با کمک آن ها عناصر و نیم حلقه هایی خاص را معرفی می کنیم. در بخش دوم ایده آل ها و همریختی نیم حلقه ها را مطرح کرده و در بخش سوم و چهارم، ایده آل هایی از نیم حلقه ها مانند ایده آل های تفریقی و اول را معرفی و به بررسی روابط بین آنها می‌پردازیم و مشاهده می کنیم که قضیه اجتناب از ایده آل های اول برای نیم حلقه ها نیز برقرار است.

فصل سوم را به چهار بخش تقسیم کردیم که در بخش های مختلف این فصل انواع دیگری از ایده آل های نیم حلقه ها از جمله ایده آل های اول ضعیف، اساسی و اساسی ضعیف، اولیه و اولیه ضعیف و در انتها ایده آل های افراز کننده را معرفی می کنیم. بعلاوه ارتباط تمامی

[۴] V. R. Hancock

ایده آل های معرفی شده را با یکدیگر مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم.
به طور مشابه در فصل چهارم در پی بیان و اثبات کلیاتی مربوط به نیم مدول ها هستیم و مطالبی که در فصول دوم و سوم برای نیم حلقه ها ارائه شده، در این فصل برای نیم مدول های روی نیم حلقه ها و زیر نیم مدول های آن ها بیان و بررسی می شود. بدین ترتیب به تحقیقات خود در این مرحله پایان بخشیدیم و برای ادامه ی این تحقیقات در موضوعات مختلف جبری مراجع [۱۱، ۲۳، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۴۰] را پیشنهاد می کنیم.
کوشیده ایم تا آنچه در این تحقیق ارائه می دهیم، عاری از اشکال باشد و بعضی از مطالب را خود اثبات نماییم. لازم به ذکر است که مقاله ی اصلی این پایان نامه [۲۵] می باشد.

کیمیا بهی زادی
دانشگاه الزهراء(س)
مهر ۱۳۹۱

فصل ۱

پیش نیاز

این فصل که مروری مختصر بر تعاریف اصول موضوعی جبر مجرد و مفاهیم مقدماتی در زمینه‌ی گروه، حلقه و مدول است، بستر لازم برای معرفی ساختار های نیم‌حلقه و نیم‌مدول روی یک نیم حلقه را فراهم می کند. هم چنین با کمک این تعاریف می توانیم مقایسه ای بین حلقه ها و نیم حلقه ها و مدول ها و نیم مدول ها انجام دهیم. تعاریف مربوط به نظریه گروه‌ها از [۱] و مطالب مربوط به حلقه ها و مدول ها از [۳۹] انتخاب شده اند و خواننده برای اطلاعات بیشتر و اثبات قضیه اجتناب از ایده آل های اول که در اینجا برای حلقه ها مطرح شده، می تواند به این مرجع مراجعه نماید.

۱.۱ مفاهیم اولیه

ابتدا چند تعریف از نظریه گروه ها، قدیمی ترین و توسعه یافته ترین شاخه ی جبر را که در فصل های آتی مورد نیاز است، بیان می کنیم :

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک مجموعه است که روی آن عمل دوتایی(قانون ترکیب) که

با "$\bullet$" نمایش می دهیم، تعریف شده باشد. $(G, \bullet)$ یک گروه نامیده می شود، هرگاه نسبت به عمل تعریف شده، شرکت پذیر و دارای اعضای (منحصربفرد) همانی و وارون باشد.

قابل ذکر است که تعریف عمل دوتایی "$\bullet$" روی یک مجموعه ناتهی مانند S، یک ساختار جبری ایجاد می کند.
یک ساختار جبری که در شرط شرکت پذیری صدق کند، نیم گروه نامیده و آن را با $(S, \bullet)$ نشان می دهند. اگر نیم گروهی دارای عضو همانی باشد، آن را تکوار می نامند. هم چنین یک تکوار، وارون پذیر است، اگر هر عضو آن دارای وارون باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیر مجموعه ای از آن است. اگر H با قانون ترکیب G، خود یک گروه باشد، آنگاه H را زیر گروه G نامیم و با نماد $H \leq G$ نمایش می‌دهیم.

حال مفاهیم لازم از نظریه ی حلقه ها را یادآور می شویم. حلقه ها، ساختارهایی جبری هستند که روی آن ها دو قانون ترکیب تعریف می شود. بطوردقیق تر:

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه ی ناتهی R که قوانین جمع "$+$" و ضرب "$\bullet$" روی آن تعریف شده است، یک حلقه نامیده و بصورت $(R, +, \bullet)$ نمایش داده می شود، هرگاه $(R, +)$ یک گروه آبلی، $(R, \bullet)$ یک نیم گروه و قانون "$\bullet$" نسبت به "$+$" دارای خواص پخشی باشد.

در سراسر این فصل، منظور از یک حلقه، حلقه ای جابجایی با عضو همانی "۱" است.
اکنون مفهوم ایده آل را تعریف می کنیم:

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I زیر مجموعه ای از آن باشد. گوییم I یک ایده‌آل R است، هر گاه I یک زیر گروه جمعی R باشد و به ازای هر $x \in I$, $r \in R$ داشته باشیم $rx \in I$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و T زیر مجموعه ای از آن باشد، در این صورت اشتراک کلیه ی ایده آل های R که شامل T هستند را ایده آل تولید شده توسط T می نامند و با $< T >$ نشان می دهند. اگر $T = \{a\}$، آنگاه $< a >$ را ایده آل اصلی تولید شده توسط a می نامند.

اگر $R =< T >$، آنگاه T را مجموعه مولد برای R می نامند و چنانچه T مجموعه ای متناهی باشد، گوییم R حلقه ای بطور متناهی تولید شده است.

اگر I , J ایده آل هایی از حلقه ی جابجایی R باشند، آنگاه به آسانی می توان دید که

$$(I : J) = \{x \in R | xJ \subseteq I\},$$

یک ایده آل است که آن را ایده آل خارج قسمتی می نامند و همچنین $I \subseteq (I : J)$.
بعلاوه اگر $I = ۰$، آنگاه ایده آل خارج قسمتی $(۰ : J) = \{x \in R | xJ = ۰\}$، پوچساز J نامیده و با علامت $Ann(J)$ نشان داده می شود.
برخی از ایده آل های حلقه ی R در مطالعه ی ساختار R با اهمیت هستند. در این جا به معرفی بعضی از آن ها می پردازیم:

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه است. ایده آل واقعی M از R ($M \neq R$) یک ایده‌آل ماکسیمال نامیده می شود، هرگاه ایده آلی مانند I از R موجود نباشد که $M \subset I \subset R$.
می توان دید که هر حلقه ای حداقل دارای یک ایده آل ماکسیمال است (گزاره ۳.۹ در [۳۹]).

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و P ایده آلی واقعی از آن باشد. گوییم P ایده آل اول است، اگر $xy \in P$، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

هر ایده آل ماکسیمال، ایده آلی اول است ولی در حالت کلی عکس این مطلب برقرار نیست (ملاحظه ۳.۴۵ در [۳۹]).
اگر I ایده آل حلقه ی R باشد، آنگاه رادیکال I را که خود ایده آلی از R است را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$rad(I) = \{x \in R | \exists\, n \in \mathbb{N}; \quad x^n \in I\}.$$

قضیه ای که در ادامه بیان می کنیم، یکی از مهم ترین قضایای جبر جابجایی تحت عنوان " قضیه اجتناب از ایده آل های اول " است که برای اثبات آن می توان به ۳.۶۱ در [۳۹] مراجعه کرد.

قضیه ۸.۱.۱. i) *فرض کنید $P_1, \dots, P_n$ که $n > 2$، ایده آل های اول حلقه ی R هستند و I ایده آلی از آن باشد که در $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ مشمول است. در این صورت برای i ای، $I \subseteq P_i$.*
ii) *فرض کنید $I_1, \dots, I_n$ ایده آل های حلقه R باشند و P ایده آل اول آن، شامل $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ باشد. در این صورت برای i ای، $I_i \subseteq P$. اگر $P = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$، آنگاه برا ی i ای، $P = I_i$.*

در این قسمت یکی از مهمترین ساختار های جبری یعنی مدول ها را معرفی می‌کنیم. مدول ها تعمیم طبیعی فضاهای برداری هستند.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه ی ناتهی M را همراه با عمل "$+$" و نگاشت ضرب اسکالر $\bullet : R \times M \longrightarrow M$ که در آن R یک حلقه است، R -مدول چپ می نامیم اگر:

i) $(M, +)$ گروهی آبلی باشد،

ii) عمل ضرب نسبت به جمع توزیع پذیر باشد،

iii) اعضای M نسبت به ضرب شرکت پذیر باشند،

iv) به ازای هر عضو از M مانند x داریم $1x = x$.

بطور مشابه، با کمک نگاشت ضرب اسکالر $\bullet : M \times R \longrightarrow M$، R -مدول راست را می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک R -مدول باشد. زیر مجموعه ی X از M را مجموعه‌ی مولد برای M می نامند، اگر $M = RX$. اگر M مجموعه مولدی متناهی داشته باشد، آنگاه آن را بطور متناهی تولید شده می نامند.
اگر مجموعه مولد M تک عضوی باشد، آنگاه M دوری نامیده می شود.

مفهوم همریختی را بصورت مشترک بین حلقه ها و مدول ها تعریف می کنیم:

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید A , B حلقه (مدول) باشند، در این صورت نگاشت

$$f : A \longrightarrow B,$$

یک همریختی حلقه (مدول) نامیده می شود، هرگاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$،

ii) $f(xy) = f(x)f(y)$.

فصل ۲

نظریه ی نیم حلقه ها

توجه اصلی ما به نیم مدول ها است، با این حال برای بیان قضایا و دیگر مطالب در فصول آتی، مطرح نمودن این فصل لازم است.
در جبر مجرد، نیم حلقه ها ساختار جبری مشابه حلقه ها را دارند، البته بدون آنکه هر عضو یک نیم حلقه دارای وارون جمعی باشد. چون هر نیم حلقه، یک حلقه ی فاقد عضو منفی است، بنابراین اصطلاح Rig نیز به نیم حلقه ها اطلاق می شود.
نیم حلقه ها در سال **۱۹۳۴** مطرح و توسط وندیور [۱] در سال **۱۹۳۵** معرفی شدند و اولین مطلب انتزاعی در مورد آنها در همان سال به چاپ رسید. پس از وی، مؤلفین زیادی به مطالعه و تحقیق درباره ی این مفهوم پرداختند. امروزه، نیم حلقه ها با خواص و ویژگی های متفاوت و متنوع در علوم کامپیوتر نظری از اهمیت زیادی برخوردارند.
برای تعاریف اولیه و مقدمات بحث از [۳۴]، در بخش دوم که مربوط به تعاریف ایده آل و همریختی نیم حلقه ها است از [۲، ۳] و برای تهیه بخش سوم و چهارم که به معرفی ایده‌آل‌های تفریقی و اول نیم حلقه ها اختصاص دارد از [۸، ۴۲] استفاده های زیادی شده است.

---

[۱] H. S. Vandiver

حال، طبعاً اولین کار برای شروع بحث، تعریف مفهومی است که راجع به آن سخن خواهیم گفت.

۱.۲ نیم حلقه ها

با توجه به مطالبی که در فصل قبل ارائه شد، تعریف نیم حلقه را ذکر می کنیم:

تعریف ۱.۱.۲. مجموعه ی ناتهی S همراه با دو عمل دوتایی"+" (جمع) و"." (ضرب) را یک نیم حلقه گویند، هرگاه؛
i) $(S, +)$ یک تکوار جابجایی با عضو همانی "۰" باشد.
ii) $(S, .)$ یک تکوار با عضو همانی "۱" باشد.
iii) عمل ضرب نسبت به جمع از هر دو طرف توزیع پذیر باشد.
iv) "۰" (عضو همانی جمع)، S را نسبت به ضرب خنثی کند. یعنی برای هر $a \in S$ داشته باشیم:

$$۰ \cdot a = a \cdot ۰ = ۰,$$

که در رابطه ی فوق "۰" را جاذب ضربی می نامند.
نیم حلقه ی فوق را بصورت $(S, +, .)$ نشان می دهند.

با توجه به شروط $(i), (ii)$ تعریف نیم حلقه و با اجتناب از موارد بدیهی، همواره فرض می‌کنیم که $۰ \neq ۱$. بنابر این تضمین، S حداقل دارای دو عضو متمایز است.
تفاوت بین حلقه ها و نیم حلقه ها در تأثیر عمل جمع است، زیرا این عمل درحلقه ها، گروهی جمعی و در نیم حلقه ها، تکواری جمعی را نتیجه می‌دهد. بعلاوه، اعضای نیم حلقه ها الزاماً دارای وارون جمعی (قرینه) نیستند.
اگر نیم حلقه ی S نسبت به عمل ضرب خاصیت جابجایی داشته یا به عبارت دیگر اگر تکوار $(S, .)$ یک تکوار جابجایی باشد، نیم حلقه ی $(S, +, .)$ جابجایی است.

نیم حلقه ی S متناهی است، اگر تعداد اعضای S که آن را با $|S|$ یا $O(S)$ نشان می‌دهیم، متناهی باشد و اگر $|S| = ۱$، آنگاه نیم حلقه ی S بدیهی است. در صورتی که تعداد اعضای S متناهی نباشد، گوییم S از کاردینال نامتناهی است.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $(S, +, .)$ یک نیم حلقه باشد. گوییم نیم حلقه ی S از مشخصه‌ی m است، اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم:

$$ms = \underbrace{s + s + \cdots\ + s}_{m}.$$

اگر چنین m ای موجود نباشد، نیم حلقه ی S از مشخصه ی صفر است.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید S یک نیم حلقه باشد. در این صورت:

i) $x \in S - \{۰\}$ را مقسوم علیه صفر S نامند، هرگاه $y \neq ۰$ ای در S موجود باشد بطوریکه $x.y = ۰$.

ii) $x \in S$ وارون پذیر یا دارای وارون است، اگر $y \in S$ ای موجود باشد که $x.y = y.x = ۱$.

تعریف ۴.۱.۲. نیم حلقه ی S را خودتوان ضربی (جمعی) می نامند، هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم:

$$x.x = x^{۲} = x, \qquad (x + x = x).$$

تعریف ۵.۱.۲. نیم حلقه ی S را مطلق یا اکید می نامند. اگر $a + b = ۰$، آنگاه $a = ۰$ و $b = ۰$.

کرس [۲] مطلب فوق را تحت عنوان جمع صفر آزاد مطرح کرد.

تعریف ۶.۱.۲. نیم حلقه S را نیم دامنه صحیح یا نیم حلقه کامل نامند، اگر فاقد مقسوم علیه صفر باشد .

تعریف ۷.۱.۲. نیم حلقه ی S را نیم حلقه ی تقسیم می نامند، اگر هرعنصر ناصفر آن وارون‌پذیر باشد.
نیم حلقه های تقسیم، قطعاً کامل هستند.

[۲] M. Chris

تعریف ۸.۱.۲. نیم حلقه ی S یک نیم میدان است، اگر نیم حلقه ای جابجایی، مطلق و نیز نیم دامنه ی صحیح باشد.
به عبارت دیگر نیم میدان، نیم حلقه ای است که اعضای ناصفر آن تحت عمل ضرب یک گروه تشکیل دهند و همچنین به راحتی می توان دید که هر میدانی یک نیم میدان است.

حال به ارائه ی چند مثال از نیم حلقه ها می پردازیم:
۱- هر حلقه ای بطور بدیهی یک نیم حلقه است، مانند $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}$ و $\cdots$ (زیرا $(S,+)$ یک گروه جابجایی در تعریف حلقه است).
۲- مجموعه ی اعداد صحیح نامنفی را که با $\mathbb{Z}_+$ نشان می دهیم و بطور مشابه $\mathbb{R}_+$ و $\mathbb{Q}_+$ تحت جمع و ضرب معمولی، نیم حلقه هایی هستند که حلقه نیستند. $\mathbb{Z}_+$ و $\mathbb{Q}_+$، نیم حلقه‌هایی از کاردینال نامتناهی، مشخصه ی صفر، مطلق و بعلاوه نیم میدان هستند. همچنین هر عضو $\mathbb{Q}_+ - \{۰\}$ در $\mathbb{Q}_+$ وارون پذیر است.
۳- ماتریس های مربعی $n \times n$ با درایه های نامنفی تحت جمع و ضرب ماتریس‌ها یک نیم‌حلقه‌ی ناجابجایی می سازند.
۴- فرض کنید S نیم حلقه ای جابجایی و x دلخواه باشد. مجموعه ی $S[x]$ شامل همه ی عبارات به صورت $s_۰ + s_۱x + \cdots + s_nx^n$ که n عددی صحیح و نامنفی و ضرایب $s_i \in S$ ($۰ \leq i \leq n$)، تحت جمع وضرب چند جمله ای ها یک نیم حلقه جابجایی تشکیل می دهد.
به عنوان نمونه $\mathbb{Z}_+[x]$ نیم حلقه ای مطلق است که هیچ مقسوم علیه صفری ندارد.
۵- هر حاصل ضرب مستقیم از نیم‌حلقه‌ها، یک نیم‌حلقه است. مثلاً $S = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ یک نیم حلقه است که دارای مقسوم علیه های صفر $a = (۸, ۰, ۲)$ و $b = (۰, ۶, ۰)$ است که $a.b = (۰, ۰, ۰)$.
۶- $\mathbb{Z}_+$ با اعمال دوتایی $a + b = max\{a, b\}$ و $ab = min\{a, b\}$ و عضو همانی "۰" یک نیم حلقه تشکیل می دهد و با توجه به تعریف می توان گفت که $\mathbb{Z}_+$ یک نیم دامنه صحیح است.
۷- فرض کنید S نیم حلقه ای مطلق، جابجایی و G گروهی ضربی باشد. SG جمع های صوری متناهی به صورت $\sum_{i=۱}^{n} s_ig_i$ که $s_i \in S$ و $g_i \in G$، با اعمال دوتایی زیر، نیم‌حلقه‌ی گروهی گروه G روی نیم حلقه ی S است.

$$\sum_i s_i g_i + \sum_i t_i g_i = \sum_i (s_i + t_i) g_i, \qquad \forall g_i \in G, \quad s_i, t_i \in S$$

$$(\sum_{i=1}^{n} s_i g_i)(\sum_{j=1}^{m} t_j h_j) = \sum_k m_k p_k, \quad \begin{cases} m_k = \sum s_i t_j, & s_i, t_j \in S, \\ p_k = g_i h_j, & g_i, h_j \in G. \end{cases}$$

نیم حلقه ی گروهی SG جابجایی است، اگر G گروهی جابجایی باشد و اگر S نیم حلقه ای از مرتبه نامتناهی و از مشخصه ی صفر باشد، آنگاه SG نیز نیم حلقه ای از مرتبه ی نامتناهی و از مشخصه ی صفر است.
بعنوان مثال، $\mathbb{Z}_+ S_3$ که در آن S_3 گروه متقارن از درجه ۳ است، نیم حلقه ی گروهی ناجابجایی نامتناهی و از مشخصه ی صفر است. به راحتی می توان دید که این نیم حلقه مطلق است.
نمونه ی دیگر از نیم حلقه ی گروهی، $\mathbb{Q}_+ G$ است که در آن $G =< g | g^n = 1 >$ گروهی دوری از مرتبه ی n است.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید S یک نیم حلقه و A زیر مجموعه ای از S است. A را زیرنیم‌حلقه‌ی S نامند، اگر A خودش یک نیم حلقه باشد.

حال در ادامه به نمونه هایی از زیرنیم حلقه ها اشاره می کنیم:
۱- بدیهی است که $\mathbb{Z}_+$ زیرنیم حلقه ی $\mathbb{Q}_+$ و $\mathbb{Q}_+$ زیرنیم حلقه ی $\mathbb{R}_+$ است.
۲- $2\mathbb{Z}_+ = \{0, 2, 4, \cdots\}$ زیرنیم حلقه ای از $\mathbb{Z}_+$ است.
۳- $\mathbb{Z}_+$ زیرنیم حلقه ای از $\mathbb{Z}_+[x]$ است.
۴- اگر S یک نیم‌حلقه باشد، آنگاه مجموعه $P(S) := \{0\} \cup \{s+1 | s \in S\}$ زیرنیم‌حلقه‌ی S است. هم‌چنین مرکزنیم‌حلقه ی S یعنی مجموعه $C(S) = \{s \in S | ss' = s's \quad \forall s' \in S\}$ زیرنیم حلقه ی S و شامل "۱" است. بعلاوه اگر S نیم حلقه ی خودتوان جمعی باشد، آنگاه $\{0, 1\}$ زیرنیم حلقه ای از S است.