بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه،گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.SC)

عنوان :

میانگین پذیری مدولی و میانگین پذیری ضعیف مدولی برای دوگان دوم جبرهای باناخ

استاد راهنما :

دکتر داود ابراهیمی بقا

استاد مشاور :

دکتر امین محمودی کبریا

پژوهشگر :

سید سعید هاشمی

زمستان سال ۱۳۹۱

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند یکتایی را که انسان را شایسته ی تفکر واندیشیدن در بین موجودات جهان انتخاب نمود.امیدوارم بتوانم آموخته هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

ابتدا از استاد راهنمای بزرگوار واندیشمند خود جناب آقای دکتر داود ابراهیمی بقا تشکر و قدردانی می کنم که با راهنمایی های ارزنده خویش مرا در به پایان رساندن این پایان نامه یاری نمودند.

از استاد فرزانه جناب آقای دکترامین محمودی که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر و قدردانی می کنم.

از جناب آقای دکتر عسگری که زحمت داوری این پایان نامه را با نهایت دقت متحمل شدند کمال تشکر را دارم.

و در خاتمه از جناب آقای دکتر اباصلت بداغی که بنده را از راهنمایی های مستمر و ارزشمند خویش بهره مند ساختند سپاسگزارم.

تقدیم به

همسر مهربانم که در مسیر علم ومعرفت همواره همراهم بوده اند وتقدیم به همه کسانی که ازطریق دانش در راه خشنود ساختن انسانها گام بر می دارند.

تعهدنامه اصالت پایان نامه

اینجانب سید سعید هاشمی کروئی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی با شماره دانشجویی ۸۹۰۹۶۰۹۲۴۰۰ اعلام می دارد کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان:

میانگین پذیری مدولی و میانگین پذیری ضعیف مدولی برای دوگان دوم جبرهای باناخ

حاصل کار پژوهشی اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران(اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه های موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام.علاوه بر این تاکید می نمایم که این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی(هم سطح،پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها ومؤسسات آموزش عالی ارائه نشده و چنانچه در هر مقطع زمان خلاف موارد فوق ثابت شود، بدین وسیله متعهد می شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آن را بپذیرم.

سید سعید هاشمی کروئی

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ ۹۱/۱۱/۲۹ دانشجـوی کارشناسی ارشد آقای سید سعید هاشمی کروئی از پایان نامه خود دفـاع نمـوده و بـا نمـره ۱۸ به حـروف هیجده و بـا درجـه بسیار خوب مورد تصویـب قـرار گرفت.

امضاءاستاد راهنما

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه ابتدا در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز را بیان می کنیم سپس در فصل دوم به ارتباط میان میانگین پذیری جبر باناخ A و دوگان دوم آن یعنی جبر باناخ A^{**} می پردازیم و نشان می دهیم در حالت کلی میانگین پذیری جبر باناخ A^{**} ، میانگین پذیری A را نتیجه می دهد و نیز با اضافه کردن مفروضات دیگری به فرض میانگین پذیری ضعیف جبر باناخ A^{**} ، میانگین پذیری ضعیف A را نتیجه می گیریم. در ادامه میانگین پذیری مدولی را تعریف و بررسی کرده و برخی قضایای آن را مطرح می کنیم. نهایتاً در فصل سوم به دنبال این هستیم که از مدول میانگین پذیری ضعیف A^{**} مدول میانگین پذیری ضعیف A را نتیجه بگیریم. که این نتیجه گیری با اضافه کردن مفروضات دیگری به فرض میانگین پذیری ضعیف مدولی جبر باناخ A^{**} بدست می آید.

مقدمه

مفهوم میانگین پذیر ابتدا در سال ۱۹۲۹ توسط ون نیومن در مقاله [۳٤] برای گروه های گسسته مطرح شد.در سال ۱۹۵۰ دی این مفهوم را برای گروه های توپولوژیک موضعاً فشرده در مقاله [۳۵] مطرح کرد. در واقع گروه موضعاً فشرده G را میانگین پذیر گویند هرگاه میانگین پایای چپی روی $\mathrm{L}^{\infty}(G)$ موجود باشد. باری جانسون این مفهوم را برای جبرهای باناخ تعمیم داد. وی در سال ۱۹۷۲ در مقاله [۲۰] نشان داد که گروه توپولوژیک موضعاً فشرده G میانگین پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\mathrm{L}^{1}(G)-$مدول باناخ مانندE اولین گروه کوهمولوژی $\mathrm{L}^{1}(G)$ با ضریب در E^* یعنی $H^{1}(L^{1}(G),E^*)$ بدیهی گردد. به عبارت دیگر هر نگاشت مشتق از $\mathrm{L}^{1}(G)-$ به توی E^* درونی باشد.

جانسون جبر باناخ A را میانگین پذیر نامید هرگاه هر مشتق کراندار از A به توی هر A– مدول باناخ دوگان درونی باشد یا به عبارت دیگر $H^{1}(A,X^*)=\{o\}$.مفهوم میانگین پذیری ضعیف برای جبرهای باناخ جابه جایی توسط باده کرتیس و دلز با الهام از تعریف جانسون مطرح شد. جبر باناخ A را میانگین پذیر ضعیف گویند هرگاه هر نگاشت مشتق از A به A^*درونی باشد یا $H^{1}(A,A^*)=\{o\}$ بعداً جانسون میانگین پذیری را برای جبرهای باناخ دلخواه تعریف کرد.

A^{**} را دوگان دوم جبر باناخ A در نظر می گیریم. می دانیم که A میانگین پذیری را از A^{**} به ارث می برد. میانگین پذیری مدولی برای جبرهای باناخی که خود دارای ساختار مدولی روی جبرهای باناخ دیگر می باشند معرفی می گردد. این مفهوم می تواند به عنوان تعمیم میانگین پذیری جانسون مطرح شود. A را مدول میانگین پذیر نامیم هرگاه برای هر $A-U-$ مدول باناخ X، هر مدول مشتق $D:A\to X^*$درونی باشد. یا به عبارتی دیگر جبر باناخ A مدول میانگین پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $A-U-$ مدول باناخ جابجایی X $H_U^{1}(A,X^*)=\{o\}$

در این پایان نامه رابطه بین میانگین پذیری مدولی جبر باناخ A^{**} و جبر باناخ A و نیز منظم آرنز بودن A و نقش مراکز توپولوژیکی در ایجاد این روابط بررسی می کنیم. علاوه بر آن به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن شرایط میانگین پذیری ضعیف مدولی A^{**} میانگین پذیری ضعیف مدولی A را نتیجه دهد. همچنین در این پایان نامه نشان می دهیم تحت برخی شرایط میانگین پذیری ضعیف مدولی A^{**} میانگین پذیری ضعیف مدولی $A^{**}/J^{\perp\perp}$ را نتیجه می دهد و به دنبال آن تحت برخی شرایط روی جبر باناخ A/j میانگین پذیری مدولی A^{**} میانگین پذیری مدولی A را نتیجه می دهد.

مطالب این پایان نامه برگرفته از دو مقاله زیر می باشد:

۱-] M. Amini, Module amenability for semigroup algebras, Semigroup Forum, ٦٩(٢٠٠٤), ٢٤٣-٢٥٤.

٢- M. Amini and A.bodaghi, Module amenability and week Module amenability for second dual of banach algebras.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در پایان نامه را بیان می کنیم و در ادامه به مفهوم میانگین پذیری و ضرب آرنز می پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از کتاب آنالیز ریاضی و آنالیز تابعی رودین می باشد.

تعریف۱-۱: فضای برداری A را روی میدان C یک جبر روی C می گوییم هرگاه نگاشت $\prod: (a,b) \mapsto ab$ از $A \times A$ به A موجود باشد، به طوری که برای هر $\lambda \in C,\ a,b,c \in A$ داشته باشیم

۱) $a(bc) = (ab)c$

۲) $a(b+c) = ab + ac \quad , \quad (a+b)c = ac + bc$

۳) $(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$

تعریف ۱-۲: فضای برداری X روی میدان C را یک فضای نرمدار می گوئیم هرگاه تابعی مانند $P: X \to [\cdot + \infty]$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in C$ داشته باشیم

۱) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

۲) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$

۳) $P(x) = o \Leftrightarrow x = o$

تعریف ۱-۳: جبر A را روی میدان C یک جبر باناخ گوییم اگر A مجهز به نرمی چون $\|.\|$ باشد که به عنوان فضای نرمدار با آن کامل باشد و نیز برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

تعریف ۱-٤: هر نگاشت خطی از فضای برداری X به توی میدان اسکالرش را تابعک خطی گویند.

تعریف ۱-٥: مجموعه همه تابعک های خطی و کراندار با اعمال نقطه ای روی فضای نرمدار X را با X^* نمایش می دهیم. فضای X^*، همراه با نرم عملگری یعنی $\|f\| = sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq ۱\}$ یک فضای باناخ می باشد و آن را دوگان X می نامیم.

تعریف ۱-٦: فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، عنصر φ از A^* را ضربی گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

تعریف ۱-۷: فضای تمام تابعک های خطی و ضربی روی A را با Φ_A نشان می دهیم. $\varphi \in \Phi_A$ را یک مشخصه روی A می نامیم.

تعریف ۱-۸: فرض می کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک بوده و X^* نقاط X را جدا کند. در این صورت کوچکترین توپولوژی روی X که نسبت به آن تمام $x^* \in X^*$ ها پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف القا شده از X^* به X می گوییم که اصطلاحاً آن را توپولوژی ضعیف روی X می نامند. برای ساختن این توپولوژی روی X کافی است

$$S = \left\{(x^*)^{-۱}(U) : x^* \in X^*, \text{باشد } C \text{ بازی در } U\right\}$$

را به عنوان زیرپایه توپولوژی مذکور قرار دهیم. توپولوژی ضعیف، X را تبدیل به یک فضای برداری موضعاً محدب می کند و آن را با نماد $\sigma(X,X^*)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۹: اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه نگاشت $J_X: X \to X^{**}$ که در آن X^{**} دوگان دوم X بوده $(X^{**}=(X^*)^*)$ و $<J_X(x),x^*>=<x^*,x>$, $x^* \in X^{**}$ و $x \in X$ را نشاننده طبیعی از X به X^{**} می گوئیم. تصویر $x \in X$ در X^{**} با $\hat{x}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۱۰: فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $\hat{X}=\{\hat{x}: x \in X\}$ در این صورت کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن تمام $\hat{x} \in \hat{X}$ پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف القا شده از $\hat{X}$ به X^* یا توپولوژی ضعیف ستاره $\left(w^* -\text{توپولوژی}\right)$ روی X^* می گوئیم. این توپولوژی روی X^* را با $\sigma(X^*,X)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱-۱۱: (قضیه باناخ الاغلو) اگر فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد آنگاه گوی واحد X^* ، w^*- فشرده است.

برهان: مراجعه شود به $\Big[$۳۱، بخش ۵،قضیه۳.۱$\Big]$.

نتیجه ۱-۱۲: اگر فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور کراندار در X^* باشد آنگاه $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$دارای یک زیرتور w^*- همگرا می باشد.

تعریف ۱-۱۳: فرض می کنیم X یک فضای هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. مجموعه تمام توابع پیوسته $f: X \to C$ که در آن برای هر $\varepsilon > 0$, $\{x \in X: |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد را با $C_0(x)$ نمایش می دهیم.

تعریف۱-۱٤: فضای نرمدار X را یک فضای انعکاسی گوییم اگر $\hat{X} = X^{**}$

تعریف ۱–۱۵: فرض می کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت تعریف می کنیم

$$A^{2} = span\{ab: \ a, b \in A\}$$

قضیه ۱–۱۶: اگر X یک فضای نرمدار باشد و M یک زیر فضای X باشد، آنگاه M در X چگال است اگر و تنها اگر $(f \in X^*, f|_M = 0 \Rightarrow f \equiv 0)$

برهان: مراجعه شود به [۳۱، بخش۳، نتیجه ۶.۱۴] .

تعریف۱–۱۷:فرض می کنیم A یک جبرباناخ باشد. در این صورت A همراه با ضرب $a\ o\ b = ba$ $(a, b \in A)$ یک جبر باناخ است که آن را با A^{op} نشان می دهیم.

تعریف ۱–۱۸: با فرض اینکه A و B دو جبر باناخ باشند. نگاشت $\lambda: A \to B$ را یک آنتی همومورفیسم گوییم هرگاه برای هر $a_1 , a_2 \in A$; $\lambda(a_1 a_2) = \lambda(a_1)\,\lambda(a_2)$ یا به عبارتی دیگر نگاشت $\lambda: A \to B^{op}$ یک همومورفیسم جبری باشد.

تعریف۱–۱۹: اگر A یک جبر باناخ باشد: نگاشت $[.,.]: A \times A \to A$ را با ضابطه $(a, b \in A)$ $[a, b] = ab - ba$ یک جابجاگر برای A می گوئیم.

تعریف ۱–۲۰: (اصل کرانداری یکنواخت) فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرمدار باشد و $A \subseteq BL(X, Y)$ که در آن $BL(X, Y)$ فضای همه عملگرهای خطی و کراندار از X به Y می باشد، در این صورت اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $sup\{\|Tx\|: T \in A\} < \infty$ آنگاه خواهیم داشت $sup\{\|T\|: T \in A\} < \infty$

برهان: مراجعه شود به [۳۱، بخش۳، ۱۴.۱] .

نتیجه ۱–۲۱: اگر X یک فضای نرمدار باشد و $A \subseteq X$ آنگاه A یک مجموعه کراندار است اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$; $sup\{|f(a)|: a \in A\} < \infty$

برهان: مراجعه شود به [۳۱، بخش۳، نتیجه۱٤.۳] .

تعریف ۱–۲۲: فرض می کنیم X یک فضای باناخ و M و N به ترتیب زیر فضاهایی ازX و X^* باشند. تعریف می کنیم

$$M^{\perp} = \left\{f \in X^* \, ; f(m) = \mathrm{o} \text{ و } \forall m \in M\right\} \quad \text{و} \quad {}^{\perp}\mathrm{N} = \left\{x \in X \, ; f(x) = \mathrm{o} \text{ و } \forall f \in N\right\}$$

$M^{\perp}$را پوچساز M و ${}^{\perp}$N را پوچساز N می نامیم.

نتیجه ۱–۲۳: با توجه به تعریف (۱–۲۰) می توان نوشت

$$M^{\perp} = \bigcap_{m \in M} ker\widehat{m} \quad \text{و} \quad {}^{\perp}\mathrm{N} = \bigcap_{f \in N} f^{-1}(\{\mathrm{o}\})$$

قضیه: ۱–۲٤: اگر M یک زیر فضای بسته از فضای باناخ X باشد، در این صورت

i) نگاشت $\sigma: m^* \mapsto x^* + M^{\perp}$ از M^* به $\frac{X^*}{M^{\perp}}$ یک ایزومورفیسم ایزومتری است که در آن x^* توسیع هان ـ باناخ m^* است.

ii) نگاشت $\tau: y^* \mapsto y^* \mathrm{o} \Pi$ از $\left(\frac{X}{M}\right)^*$ به $M^{\perp}$ که در آن $\Pi: X \to \frac{X}{M}$ نگاشت خارج قسمتی می باشد، یک ایزومورفیسم ایزومتری است.

برهان:مراجعه شود به[۳۳، قضیه٤.۹] .

تعریف ۱–۲۵: فرض می کنیم X و Y دو فضای برداری و نرمدار روی میدان C باشند و $T \in BL(X,Y)$ در این صورت تعریف می کنیم $T^*: Y^* \mapsto Y^* \, o \, T$

$\Rightarrow < T^*(y^*) \, , x > = < y^*, T(x) > : \; y^* \in Y^*$ و $x \in X$

همچنین $T^* \in BL(Y^*, X^*)$. T^* را الحاقی نگاشت T می نامیم.

قضیه ۱–۲۶: نگاشت $T^* \in BL(Y^*, X^*)$، w^*- پیوسته است.

برهان: تور $(y_i^*)_{i \in I}$ را در Y^* فرض می کنیم به طوری که $y_i^* \xrightarrow{w^*} y^*$. بنابراین

$y_i^* \to y^* \quad \Rightarrow \forall y \in Y: < y_i^* \, , y > \to < y^* \, , y >$

$x \in X$ را در نظر می گیریم و با فرض $y = T(x)$ داریم

$$< y_i^*, T(x) > \to < \; y^*, T(x) > \Rightarrow < \; T^*(y_i^*), x > \to < T^*(y^*) \, , x >$$
$$\Rightarrow T^*(y_i^*) \xrightarrow{w^*} T^*(y^*). \qquad \square$$

تعریف ۱–۲۷: اگر X و Y و Z فضاهای برداری نرمدار روی میدان C باشند در این صورت نگاشت $\Phi: X \times Y \to Z$ را یک نگاشت دو خطی گوئیم هرگاه Φ نسبت به هر کدام از مولفه هایش خطی باشد.

قضیه ۱–۲۸: برای فضاهای برداری و نرمدار X و Y و Z نگاشت دو خطی $\Phi: X \times Y \to Z$ را کراندار گوئیم هرگاه $\|\Phi\|$ موجود باشد که

$$\|\Phi\| = sup\{\|\Phi(x,y)\|; \;\; \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}$$

مجموعه نگاشت های دو خطی و کراندار از $X \times Y$ به Z را با BL(X,Y,Z) نشان می دهند. BL(X,Y:Z) با اعمال نقطه وار و نرم مذکور یک فضای نرمدار است. اگر Z یک فضای باناخ باشد، BL(X,Y,Z) نیز باناخ است.

برهان: مراجعه شود به [۸، قضیه ۴۲.۱] .

تعریف ۱–۲۹: فرض کنیم X و Y و Z فضاهای برداری نرمدار روی میدان C باشند. الحاقی نگاشت دو خطی $\Phi: X \times Y \to Z$ را به صورت $\Phi^*: Z^* \times X \to Y^*$ تعریف می کنیم که در آن داریم $< \Phi^*(z^*, x), y > = < z^*, \Phi(x, y) >$ $(x \in X\ ,\ y \in Y\ ,\ z^* \in Z^*)$. به این ترتیب

$$\begin{cases} \Phi^{**}: Y^{**} \times Z^* \to X^* \\ < \Phi^{**}(y^{**}, z^*), x >=< y^{**}, \Phi^*(z^*, x) > \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi^{***}: X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**} \\ < \Phi^{***}(x^{**}, y^{**}), z^* >=< x^{**}, \Phi^{**}(y^{**}, z^*) > \end{cases}$$

قابل تعریف می باشند که به ترتیب دومین نگاشت الحاقی و سومین نگاشت الحاقی می باشند.

تعریف ۱–۳۰: برای $\Phi \in BL(X, Y, Z)$, $\Phi^r: Y \times X \to Z$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Phi^r(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \Phi(x, y) \quad (x \in X, y \in Y)$$

تذکر: در این پایان نامه $w^* - \lim_i w^* - \lim_j f(a_i, b_j)$ را با $w^* - \lim_i \lim_j - f(a_i, b_j)$ نمایش می دهیم. همچنین $w^* - w^*-$ پیوسته را به صورت w^*- پیوسته می نویسیم.

قضیه ۱–۳۱: (گلدشتاین) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $F \in X^{**}$ در این صورت تور کرانداری مانند $(\mathrm{a}_\alpha)_{\alpha \in I}$ در X موجود است به طوری که $\hat{a}_\alpha \xrightarrow{w^*} F$ و برای هر $\alpha \in I$ داشته باشیم $\|a_\alpha\| \leq \|F\|$.

برهان: مراجعه شود به [۹] .

لم ۱-۳۲: اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $\mathrm{T}: \mathrm{X} \times Y \to C$ یک نگاشت دو خطی پیوسته باشد، آنگاه T دارای یک توسیع پیوسته $\overline{\mathrm{T}}: \mathrm{X}^{**} \times Y^{**} \to C$ می باشد که این گونه تعریف می شود

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{T}}: \mathrm{X}^{**} \times Y^{**} \to C \\ (F,G) \mapsto \lim_i \lim_j T(a_i, b_j) \end{cases}$$

که در آن (a_i) و (b_j) به ترتیب تورهایی در X و Y هستند به طوری که $\hat{a}_i \xrightarrow{w^*} F$ و $\hat{b}_j \xrightarrow{w^*} G$

برهان: مراجعه شود به[۱۷، لم ۱.٦] .

تعریف ۱-۳۳: فرض کنید G یک گروه باشد آنگاه$l^1(G) = \{f: G \to C;\ \sum_{s\in G}|f(s)| < \infty\}$

تعریف ۱-۳٤: اگر A یک جبر باناخ روی میدان C باشد، آنگاه فضای برداری نرمدار X روی میدان C را یک A– مدول باناخ چپ گوئیم هرگاه نگاشت $(a,x) \mapsto ax$ از $A \times X$ به X و K>o موجود باشد به طوری که نگاشت مذکور دو خطی بوده و برای هر $x \in X$ و $a, b \in A$ داشته باشیم

۱) $a(bx) = (ab)x$ و ۲) $\|ax\| \leq K\|a\|\|x\|$

به طور مشابه A– باناخ مدول راست نیز تعریف می شود.

X را یک A– مدول باناخ گوئیم اگر یک A– باناخ مدول چپ و راست باشد و نیز برای هر $x \in X$ و $a, b \in A$ داشته باشیم: $a(xb) = (ax)b$

تعریف ۱-۳۵: M را A– دو مدول گویند هرگاه A– مدول چپ و A– مدول راست باشد و داشته باشیم

$$(am)b = a(mb) \quad , \quad (m \in M\,, a\,, b\ \in A)$$

تعریف ۱–۳۶: فرض A جبری نرمدار روی F و M فضای خطی نرمدار روی F باشد، M را A– مدول چپ نرمدار گوئیم، اگر M ، A– مدول چپ بوده و برای $k > o$ داشته باشیم

$$\|am\| \leq k\|a\|\|m\| \ , \qquad (m \in M \ , a \in A)$$

به طور مشابه A– مدول راست نرمدار را تعریف می کنیم.

تعریف ۱–۳۷: M را A– دو مدول نرمدار گوئیم هرگاه A– دو مدول باشد و برای $k > o$ ای داشته باشیم

$$\|am\| \leq k\|a\|\|m\| \qquad \text{و} \qquad \|ma\| \leq k\|m\|\|a\|$$

تعریف ۱–۳۸: فرض کنید M یک A– مدول چپ (راست) نرمدار باشد و N زیر فضایی از M بوده و برای هر $n \in N$ و هر $a \in A$ داشته باشیم$(na \in N)$ $an \in N,$ آنگاه N یک A– زیر مدول چپ (راست) M است.

نکته ۱–۳۹: ۱) اگر A یک جبر باناخ باشد و X یک A– مدول باناخ باشد، آنگاه دوگان X یعنی X^* با ضرب مدولی زیر یک A– باناخ مدول می باشد.

$$\begin{cases} A \times X^* \to X^* \\ (a, x^*) \mapsto ax^* \end{cases} \text{به طوری که برای هر } x \in X \ ; \qquad < ax^*, x > = < x^*, xa >$$

$$\begin{cases} X^* \times A \to X^* \\ (x^*, a) \mapsto x^*a \end{cases} \text{به طوری که برای هر } x \in X \ ; \qquad < x^*a, x > = < x^*, ax >$$

۲) اگر A یک جبر باناخ باشد و X یک A– مدول باناخ باشد، آنگاه دوگان دوم X یعنی X^{**} نیز با ضرب های مدولی زیر یک A– مدول باناخ است.

$$\begin{cases} A \times X^{**} \to X^{**} \\ (a, x^{**}) \mapsto ax^{**} \end{cases} \text{به طوری که برای هر } x^* \in X^* \ ; \quad < ax^{**}, x^* > = < x^{**}, x^*a >$$

$$\begin{cases} X^{**} \times A \to X^{**} \\ (x^{**}, a) \mapsto x^{**}a \end{cases} \text{به طوری که برای هر } x^* \in X^* \ ; \quad < x^{**}a, x^* > = < x^{**}, ax^* >$$

تعریف ۱-۴۰: فرض کنیم A یک جبر باناخ، X یک A- باناخ مدول باشد در این صورت X را یک A مدول اساسی گوئیم اگر $\overline{AXA} = X$ که $AXA = span\{axb \ : a, b \in A, x \in X\}$.

تعریف ۱-۴۱: برای جبر باناخ A، A- مدول باناخ M را یک A- مدول باناخ واحد مرتبط گوئیم هرگاه عضو همانی e در A چنان باشد که برای هر $em = me = m : m \in M$

تعریف ۱-۴۲: تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ از جبر باناخ A را واحد تقریبی چپ می گوییم، هرگاه برای هر $e_\alpha a \xrightarrow{\|.\|} a \ : a \in A$. واحد تقریبی راست نیز به طور مشابه تعریف می شود. تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ از جبر باناخ A را واحد تقریبی گویم هرگاه واحد تقریبی چپ و راست باشد. همچنین تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ را یک واحد تقریبی کراندار می گوئیم اگر $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ واحد تقریبی بوده و $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $\|e_\alpha\| \leq M: \ \alpha \in I$

تعریف ۱-۴۳: اگر A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد، یک واحد تقریبی چپ کراندار در A برای X، تور کرانداری مانند $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ در A می باشد به طوری که برای هر $e_\alpha x \xrightarrow{\|.\|} x \ : x \in X$ واحد تقریبی راست کراندار برای X نیز مشابه تعریف می شود. تور کراندار $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ در A را یک واحد تقریبی کراندار برای X گوئیم هرگاه واحد تقریبی چپ کراندار و واحد تقریبی راست کراندار برای X باشد.

قضیه ۱-۴۴: (تجزیه کوهن) فرض می کنیم A یک جبر باناخ باشد و دارای واحد تقریبی کراندار برای - A مدول باناخ X باشد.در این صورت برای $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ ، $a \in A$ و $y \in Y$ موجود است به طوری که $x = ay$ و $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

برهان: مراجعه شود به [۸، بخش ۱، قضیه ۱۰] .