بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر(عج)

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه

کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

گرایش جبر

ابرگروه‌های آزاد ضعیف خاص و ابرگروه‌های برگرفته از ابرمشبکه‌ها

استاد راهنما:

دکتر مرتضی جعفرپور

دانشجو:

عبدالله چاشیانی

شهریور ۹۲

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عبدالله چاشیانی

ابر گروه‌های آزاد ضعیف خاص و ابر گروه‌های برگرفته از ابرمشبکه‌ها

در تاریخ ۹۲/۶/۱۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه خیلی خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر مرتضی جعفرپور با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- استاد داور داخلی۱ گروه آقای دکتر غلامحسین آقابزرگی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور داخلی۲ گروه خانم دکتر سمیه کریم‌زاده با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۴ - نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر مهدی ملایی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

سپاس گزاری

سپاس خدای را عزوجل که توفیق پویش راه علم را تا امروز به من ارزانی داشته است. به امید آنکه نظر لطفش را از این بنده حقیر برنگرداند و همچنان مرا، که در ابتدای راه علم قرار گرفته ام، یاری رسان باشد.

پس از حمد خدای متعال و قبل از سخن غیر، بر خود واجب می دانم تا از زحمات بی دریغ پدر و مادر عزیزتر از جانم تشکر نمایم که همواره مرا یار و یاور می باشند که هرگز مرا تنها نگذاشته و دعای خیرشان همیشه بدرقه ی راهم است. در قبال زحمات فراوانشان هیچ تحفه ای برای ارائه ندارم. تنها دستشان را می بوسم و خاک پایشان را توتیای چشمم قرار می دهم.

بر من لازم است تا از زحمات بی شائبه ی استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر مرتضی جعفرپور که در انجام رساندن این پایان نامه بنده را راهنمایی نمودند، نهایت تشکر و قدردانی را به عمل آورم. هرچند که مرا یارای قدردانی از ایشان نیست و زبانم از ادای حق مطلب عاجز است.

عبدالله چاشیانی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

(به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این روزگاران سرد، بهترین پشتیبان است)

و

همسر خوبم

که در لحظه لحظه‌های زندگی هم قدم و همراه من، هستند.

چکیده

در این پایان‌نامه (نیم)ابرگروه آزاد ضعیف خاص را معرفی و مطالعه می‌کنیم و قضیه‌ی نیلسن ـ‌شرایر را برای رده‌ای از (نیم)ابرگروه آزاد ضعیف خاص تعمیم می‌دهیم. شرایطی که نیم‌ابرگروه‌های آزاد ضعیف خاص، الحاقی، منظم و کامل باشند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین چند نوع از ابرساختارهای برگرفته از مشبکه‌ها و ابرمشبکه‌ها را مطالعه می‌کنیم. شرایط لازم و کافی که ابرساختارها ابرگروه باشند مورد تحقیق قرار گرفته‌اند. همچنین مشبکه‌ها و ابرمشبکه‌ها و چند ابرعمل تعریف‌شده روی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شرایط لازم و کافی که ابرساختارهای برگرفته از مشبکه‌ها و ابرمشبکه‌ها ابرگروه باشند ارایه شد.

واژگان کلیدی: ابرگروه، ابرعمل، مشبکه، ابرمشبکه.

مقدمه

نظریه ابرگروه اولین بار در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. مارتی [۱] [۲۳] مفهوم ابرگروه را به عنوان تعمیمی از گروه بیان نموده و نظریه ابرساختارها را بیان کرد. اگر چه مارتی در سن جوانی در طول جنگ جهانی دوم درگذشت اما در طول این زمان کوتاه بیش از دو یا سه مقاله در زمینه ابرساختارها ارائه داد و آن را به عنوان ابزاری در حل برخی از مسائلِ گروه و توابع جبری تثبیت کند. پس از او بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف ریاضی در این زمینه کار کردند.

از سال ۱۹۶۰ تحقیقات در این زمینه گسترش یافت. در فرانسه، کراسنر [۲] ، کوسکاس [۳] و سورآ [۴] تحقیقات خود را روی نظریه ابرساختارها به خصوص نیم‌ابرگروه‌ها شروع کردند. کوسکاس در فرانسه روی شرکت‌پذیری نیم‌ابرگروه‌ها بحث کرد. مک مولن [۵] در استرالیا نظریه‌ای از ابرگروه‌ها را گسترش داده و در آنالیز هارمونیک مورد استفاده قرار داد. در یونان، میتاس [۶] ، کونستانینتنیدو [۷] ، سرافیمیدیس [۸] و ماسوروس [۹] ابرگروه‌های کانونی، ابرحلقه‌ها و ابرمدول‌ها، ابرمشبکه‌ها و کاربرد ابرمیدان‌ها در نظریه اتوماتا را مورد مطالعه قرار دادند. در این زمینه تحقیقاتی به عمل آورده و قضایای مختلفی را در این زمینه بیان کردند. همچنین، ریاضی‌دانان آمریکایی مقالات ارزشمندی در زمینه ابرگروه‌ها به رشته تحریر درآورده‌اند که از آن جمله میتوان به کمر [۱۰] و توشیاک [۱۱] اشاره کرد. روزنبرگ [۱۲] در سال ۱۹۹۸ برای اولین بار رابطه بین ابرساختارها و روابط دوتایی را مورد مطالعه قرار داده پس از او دی سالوو [۱۳] نتایج جدیدی را

[۱] Marty
[۲] Krasner
[۳] Koskas
[۴] Sureau
[۵] Mac Molen
[۶] Mittas
[۷] Konstantinidou
[۸] Serafimidis
[۹] Massourous
[۱۰] Comer
[۱۱] Tociak
[۱۲] Rosenberg
[۱۳] De Salvo

در این زمینه به دست آورد. مقالات باارزش در زمینه ابرگروه های منظم، قلب ابرگروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه ترکیبیات و هندسه توسط گروهی از محققین ایتالیایی از جمله کرسینی [۱] ، دی سالوو، میگلیوراتو [۲] ، دی ماریا [۳] و فرنی [۴] به جهان ریاضیات ارائه شدند. در شروع دهه ۹۰ میلادی، ریاضی‌دانان رومیایی در پنجمین کنفرانس ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن در سال ۱۹۹۳ وارد این نظریه شدند که میتوان به استفانسکو [۵] ، لئوریانو [۶] ، پلِ آ [۷] و گوتان [۸] اشاره نمودکه رساله‌های دکترای خودرا در این زمینه نگارش کردند. همچنین ریاضیدانان ایرانی نیز مطالعات و تحقیقات خود را در زمینه ابرساختارهای جبری از دهه ۹۰ شروع کردند که میتوان به زاهدی، دواز، عامری، ایرانمنش، برزویی، اشرفی، جعفرپور و برخی افراد دیگر اشاره کرد.

اکنون نظریه ابرساختارهای جبری کاربردهای مختلفی در علوم مختلف از جمله هندسه، توپولوژی، آنالیز و سیستم های محدب، گروه‌های متناهی، نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه اتوماتا، نظریه روابط دوتایی، رمزنگاری، نظریه کدگذاری و هوش مصنوعی داشته است. (برای دیدن مطالبی بیشتر در علوم ذکر شده به منابع [۳، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۲۱، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۱، ۳۲] مراجعه شود.) در فصل اول اول مفاهیم ابتدایی در نظریه‌ی مشبکه‌ها و ابرگروه‌ها معرفی می‌شوند و مثالها و قضایایی درباره‌ی این مباحث آورده شده است.در فصل دوم مقاله‌ای از ابرگروههای آزاد ضعیف خاص و ابرساختارهای برگرفته از مشبکه‌ها مطرح می‌شوند. فصل سوم این پایان‌نامه مباحثی از ابرمشبکه‌ها می‌باشند که در واقع توسیعی از مشبکه‌ها هستند و نوع خاصی از ابرمشبکه‌ها به نام P ـ ابرمشبکه‌ها مطرح می‌شوند.

---

[۱] Corsini
[۲] Migliorato
[۳] De Maria
[۴] Freni
[۵] Stefanescu
[۶] Leoreanu
[۷] Pelea
[۸] Gutan

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف اولیه

در این فصل تعاریف، نمادها و نتایج مهم در رابطه با مشبکه‌ها و چند نوع از مشبکه‌ها، ابرگروه‌ها، نیم‌ابرگروه‌ها و انواع آن‌ها همراه با مثالهایی مطرح می‌شوند. تعاریف این فصل مربوط به مرجع [۱، ۱۳، ۵] می باشند. برای مطالعه و تحقیق بیشتر می‌توان به مراجع [۱، ۱۳، ۲۹، ۱۰] مراجعه کرد. کاربردهایی از مشبکه‌ها و ابرگروه‌ها در مرجع [۱، ۱۳، ۶] بیان شده‌اند.

۱.۱ مشبکه‌ها و انواع آن‌ها

در این بخش تعاریف، نمادها و نتایج مهم در رابطه با مشبکه‌ها همراه با مثال‌هایی مطرح می‌شود.

فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی باشد، خانواده همه زیرمجموعه‌های S را با $\mathcal{P}(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی ناتهی باشند. یک رابطه‌ی R از A به B زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است.*

تعریف ۲.۱.۱. *رابطه‌ی R در A را ترتیب جزئی گوییم هرگاه بازتابی، پادمتقارن و متعدی باشد و این رابطه را هم‌ارزی گوییم هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد. مجموعه‌ی A همراه ترتیب جزئی R مجموعه‌ای با ترتیب جزئی نامیده می‌شود و آن را با (A, R) نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۳.۱.۱. *اگر R یک رابطه در A باشد آن‌گاه*

الف) بازتابی بودن R به این معنی است که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم: aRa.

ب) پادمتقارن بودن R به این معنی است که هرگاه aRb و bRa بتوان $a = b$ را نتیجه گرفت.

پ) متعدی بودن R به این معنی است که اگر aRb و bRc آن‌گاه aRc.

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنیم S مجموعه‌ای دلخواه باشد و $A = \mathcal{P}(S)$. در این صورت $(A, \subseteq)$ یک مجموعه‌ی با ترتیب جزئی می‌باشد.*

تعریف ۵.۱.۱. *مجموعه‌ی با ترتیب جزئی $(A, \leq)$ و زیرمجموعه‌ی B از آن را در نظر می‌گیریم. یک عضو $a \in A$ کران بالای B خوانده می‌شود هرگاه برای هر $b \in B$، $b \leq a$. به همین ترتیب، $a \in A$ کران پایین B خوانده می‌شود هرگاه برای هر $b \in B$، $a \leq b$.*

تعریف ۶.۱.۱. *مجموعه‌ی با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه‌ی B از آن را در نظر می‌گیریم. یک عضو $a \in A$ بزرگترین کران پایین B خوانده می‌شود اگر a یک کران پایین برای B باشد و اگر a_1 نیز یک کران پایین برای B باشد آن‌گاه $a_1 \leq a$ و آن را با GLB نمایش می‌دهند. یک عضو $a \in A$ کوچکترین کران بالای B خوانده می‌شود هرگاه a یک کران بالا برای B باشد و اگر a_1 نیز یک کران بالا برای B باشد آن‌گاه $a \leq a_1$ و آن را با LUB نمایش می‌دهند.*

تعریف ۷.۱.۱. *زوج مرتب (V, E) را گراف سودار می‌نامیم که در آن V یک مجموعه‌ی متناهی و E یک رابطه‌ی دودویی در V است، عناصر V را رئوس و زوج مرتب E را یال‌های گراف سودار می‌نامیم.*

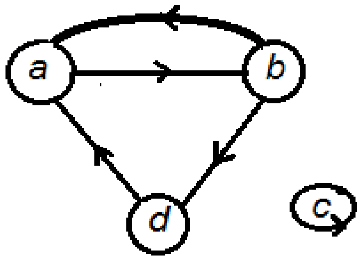
تعریف ۸.۱.۱. *اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و R یک رابطه در A باشد، یک دایره‌ی کوچک برای هر کدام از عناصر رسم کرده و هر کدام از این دایره‌ها را راس می‌نامند، سپس، خطوط سوداری، به نام، یال از راس a_i به راس a_j رسم می‌کنند اگر و تنها اگر a_iRa_j.*

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنیم R یک رابطه در مجموعه‌ی A باشد. یک مسیر از a به b و به طول n، یک رشته‌ی متناهی مثل $\pi = a, x_1, ..., x_{n-1}, b$ است که از راس a شروع و به راس b به گونه‌ای خاتمه یابد که*

$$aRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{n-1}Rb.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. *مسیری که از راسی شروع و به خودش خاتمه یابد، دور نامیده می‌شود و دور به طول یک را حلقه می‌نامند.*

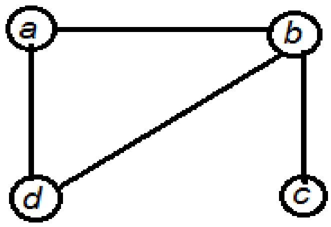
مثال ۱۱.۱.۱. *مجموعه‌ی* $G = (\{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,a),(b,d),(d,a),(c,c)\})$ *یک گراف سودار است. در گراف زیر یال* (c,c) *یک حلقه نامیده می‌شود.*



شکل ۱.۱

تعریف ۱۲.۱.۱. *زوج مرتب* (V,E) *را گراف بی‌سو می‌نامیم که در آن* V *یک مجموعه‌ی متناهی و* E *یک مجموعه از مجموعه های دو عنصری از* V *است.*

مثال ۱۳.۱.۱. *مجموعه‌ی* $G = (\{a,b,c,d\}, \{\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,d\}\})$ *یک گراف بی‌سو است.*

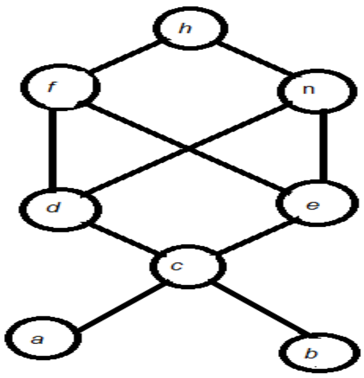


شکل ۲.۱

قضیه ۱۴.۱.۱. *[۱] گراف سودار یک ترتیب جزئی، دارای هیچ دوری به طول بزرگ‌تر از یک نیست .*

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی باشد. قضیه‌ی ۲۱.۲.۲ نشان می‌دهد که گراف سودار یک ترتیب جزئی در A دارای هیچ دوری به طول بیشتر از یک نیست. از طرف دیگر، چون یک ترتیب جزئی، یک رابطه‌ی بازتابی است، هر راسی در گراف سودار یک ترتیب جزئی، شامل حلقه است. برای سادگی کار، همه‌ی حلقه‌ها را از گراف سودار حذف خواهیم کرد، همچنین می‌توان همه‌ی یال‌هایی را که به وسیله‌ی یک رابطه‌ی متعدی به وجود آمده‌اند را حذف کنیم، همچنین قرارداد می‌کنیم که جهت یال‌های گراف سودار یک ترتیب جزئی را به طرف بالا رسم کنیم، لذا می‌توانیم جهت این یال‌ها را حذف کنیم. چنین نمایشی از یک ترتیب جزئی، نمودار هاس ترتیب جزئی یک مجموعه با ترتیب جزئی گفته می‌شود.

مثال ۱۵.۱.۱. *مجموعه‌ی با ترتیب جزئی* $A = \{a, b, c, d, e, f, n, h\}$ *که نمودار هاسه‌ی وابسته به آن به شکل زیر می‌باشد را در نظر می‌گیریم. کران‌های بالا و پایین مجموعه‌های* $B_1 = \{a, b\}$ *و* $B_2 = \{c, d, e\}$ *به شرح زیر می‌باشند.*



شکل ۳.۱

B_1 کران پایین ندارد و کران‌های بالای آن عبارتند از $\{c,d,e,f,n,h\}$ و اما کران‌های بالای B_2 عبارتند از $\{f,n,h\}$ و کران‌های پایین آن عبارتند از $\{a,b,c\}$. B_1 دارای GLB نمی‌باشد اما $LUB(B_1)=c$ و $GLB(B_2)=c$ و $LUB(B_2)$ وجود ندارد.

تعریف ۱۶.۱.۱. یک مشبکه مجموعه‌ای با ترتیب جزئی مثل $(L,\leq)$ است که در آن هر زیر مجموعه شامل دو عنصر مثل $\{a,b\}$، دارای یک LUB و یک GLB باشد. ما $LUB(\{a,b\})$ را با $a\vee b$ نمایش می‌دهیم و آن را وست a و b می‌نامیم. به طریق مشابه $GLB(\{a,b\})$ را با $a\wedge b$ نمایش می‌دهیم و آن را رسند a و b می‌نامیم. در صورت وجود بزرگترین عضو را ۱ و کوچکترین عضو را ۰ می‌گوییم. مشبکه‌ها را معمولا با $(L,\vee,\wedge)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۷.۱.۱. مشبکه‌ی L را محدود گوییم، هرگاه دارای بزرگترین عضو ۱ و کوچکترین عضو ۰ باشد.

مثال ۱۸.۱.۱. مشبکه $(\mathbb{N},\leq)$ محدود نیست. اگر چه کوچکترین عضو آن یک است ولی دارای بزرگترین عضو نمی‌باشد.

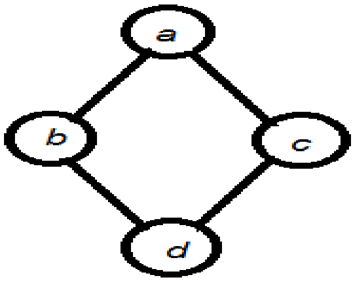
مثال ۱۹.۱.۱. اگر S یک مجموعه باشد، آن‌گاه $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ یک مشبکه‌ی محدود است.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم L یک مشبکه‌ی محدود و $a\in L$ باشد، عنصر $a'\in L$ را متمم a گوییم هرگاه، $a\wedge a'=0$ و $a\vee a'=1$.

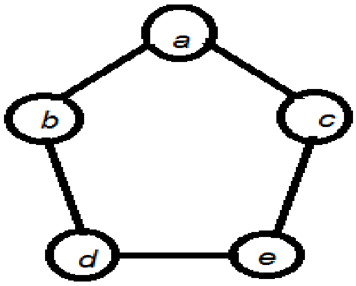
ملاحظه ۲۱.۱.۱. از تعریف قبل مشاهده می‌شود که $1'=0$ و $0'=1$.

مثال ۲۲.۱.۱. هر عضو مشبکه‌ی $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ دارای یک متمم است، زیرا اگر $A\in\mathcal{P}(S)$، آن‌گاه متمم آن یعنی A' دارای این خاصیت است که $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\emptyset$.

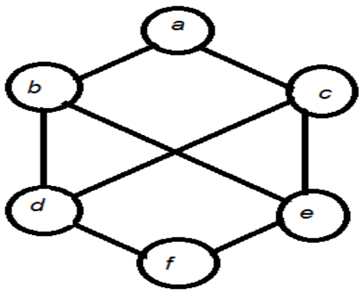
مثال ۲۳.۱.۱. شکل‌های L_1 و L_2 نمودار هاسه‌ی وابسته به دو مشبکه‌اند و شکل‌های L_3 و L_4 نمودار هاسه‌ی وابسته به دو مشبکه نیستند.



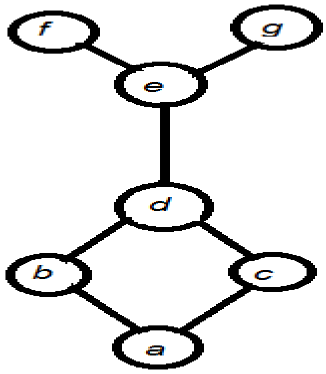
شکل ۱.۴: مشبکه L_1



شکل ۱.۵: مشبکه L_2



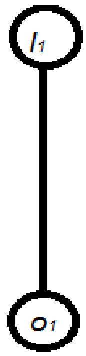
شکل ۱.۶: مشبکه L_3



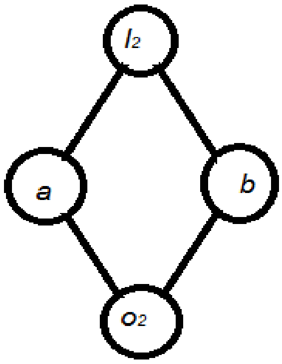
شکل ۷.۱: مشبکه $L_۴$

مثال ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم S یک مجموعه دلخواه و $L = \mathcal{P}(S)$، در این صورت $(L, \subseteq)$ یک مشبکه است.*

مثال ۲۵.۱.۱. *اگر $(L_۱, \leq)$ و $(L_۲, \leq)$ مشبکه‌های نشان داده شده در شکل زیر باشند،*

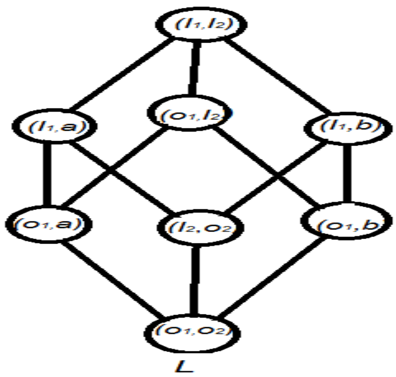


شکل ۸.۱: مشبکه $L_۱$



شکل ۹.۱: مشبکه $L_۲$

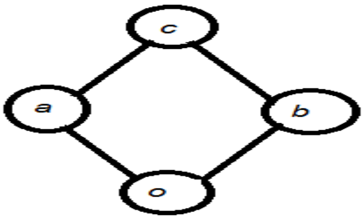
آن‌گاه $L_۱ \times L_۲ = L$ نیز مشبکه است.



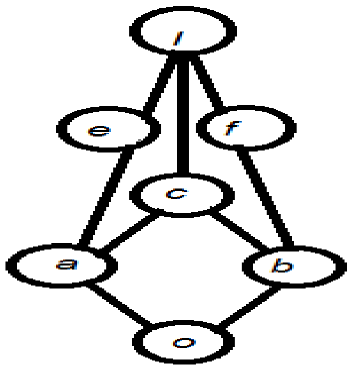
شکل ۱۰.۱

تعریف ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم* $(L, \vee, \wedge)$ *یک مشبکه باشد، زیرمجموعه‌ی ناتهی* S *از* L *را زیرمشبکه برای* L *گوییم، هرگاه به ازای هر* $(a, b) \in S^2$ *عناصر* $a \vee b$ *و* $a \wedge b$ *در مجموعه‌ی* S *نیز قرار داشته باشند.*

مثال ۲۷.۱.۱. *در شکل‌های زیر* L_1 *یک زیرمشبکه از* L *می‌باشد.*



شکل ۱۱.۱: مشبکه L_1



شکل ۱۲.۱: مشبکه L