بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

نظریه فیلترها در مشبکه‌های مانده و جبرهای مثلثی

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

استاد مشاور:

دکتر آرشام برومند سعید

مولف:

سعیده ظهیری

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو:	سعیده ظهیری
استاد راهنما:	دکتر اسفندیار اسلامی
استاد مشاور:	دکتر آرشام برومند سعید
داور ۱ :	دکتر عباس حسنخانی
داور ۲ :	دکتر شکوفه قربانی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر

تقدیم به:

قلب پر مهر مادر و روان پاک پدرم

تقدیر و تشکر

"گویند سپاس خدای را که ما را به این راه رهنمود شد. اگر خدا نبود هرگز راه نمی یافتیم."(اعراف ۴۳)
سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظه زندگی ام آشکار است. حمد وثنا می گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت.

امتنان و سپاس می گزارم تلاش ها، زحمات وراهنمایی های ظریف، ارزشمند و بی شائبه استادان فرزانه و گران مایه ام، جناب آقای پروفسور اسفندیار اسلامی و جناب آقای دکتر آرشام برومند سعید که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق واداشتند.

همچنین از حمایت های مالی قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم.

درپایان، بی نهایت ترین سپاس را به پر بهاترین گنج گیتی، مادرم ابراز می نمایم هر چند این سپاس گزاری در مقایسه با انبوه مهربانی ها و فداکاری هایشان بسیار ناچیز است.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مشبکه های مانده و ساختارهای جبری MV و BL و جبر هایتینگ معرفی می شوند. فیلترهای بولی، اول، استلزامی مثبت، شبه متمم و پیچشی را روی مشبکه های مانده تعریف کرده و چند فرم از فیلتر اول و بولی را معرفی می کنیم. سپس با استفاده از قضایا رابطه بین آنها را بررسی می نماییم. تعریف t - نرم ها و عملگرهای مربوطه و مثال هایی از آنها آورده می شود.

مشبکه های مانده بازه ایی مقدار $(IVRL)$ معرفی شده و جبرهای مثلثی را با عملگرهای بستار μ و درونی ν با یک نقطه ثابت u که متفاوت از ۰ و۱ می باشد، می سازیم.

ثابت می کنیم که یک نگاشت یک به یک بین کلاسی از $(IVRL)$ ها و کلاسی از جبرهای مثلثی وجود دارد و نشان می دهیم هر $(IVRL)$ توسیع یافته یک جبر مثلثی است و بر عکس هر جبر مثلثی ایزومورف با یک$(IVRL)$توسیع یافته است.

در انتها به بررسی فیلترهای $(IVRL)$ روی جبرهای مثلثی می پردازیم و قضایای مربوط به فیلترها روی مشبکه های مانده را به این فیلترها نیز تعمیم می دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مقدمات

مشبکه های مانده در سال ۱۹۲۴ توسط کرول[1] معرفی شد. تحقیقات روی مشبکه های مانده توسط کرول، وارد[2] ، دیلورد[3] ، بالبس[4] و پاولکا[5] و... انجام شده است. مشبکه های مانده تحت عناوین مختلف مثل مشبکه های BCK، جبر های FL_{ew}، مانده، L- مونوئید های جابجایی معرفی می شوند.

فصل اول تحت عنوان پیش نیازها و مقدمات آمده است و در آن به بیان تعریف ها و خواص موجود در مشبکه مانده می پردازیم. t - نرم ها را تعریف می کنیم و مثال هایی را از آن می آوریم. فیلترها را روی مشبکه های مانده معرفی و خواص آنها را بررسی می کنیم.

۱.۱ مشبکه مانده

تعریف ۱.۱.۱. [۳] *یک مجموعه غیر تهی با دو عمل دو تایی* $\sqcap$ *و* $\sqcup$ *را یک مشبکه گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:*

(A_1) $x \sqcup y = y \sqcup x, x \sqcap y = y \sqcap x$،

(A_2) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z, x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$،

(A_3) $x \sqcup x = x, x \sqcap x = x$،

(A_4) $x = x \sqcup (x \sqcap y), x = x \sqcap (x \sqcup y)$.

تعریف ۲.۱.۱. [۳] *یک ساختار جبری به صورت* $(L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ *را یک مشبکه کراندار گوییم، هرگاه:*

(۱) $(L, \sqcap, \sqcup)$ *یک مشبکه باشد،*

[1] Krull
[2] Ward
[3] Dilworth
[4] Balbes
[5] Pavelka

(۲) برای هر x در L، $x \sqcap 0 = 0, x \sqcup 1 = 1$.

تعریف ۳.۱.۱. [۹] یک مشبکه مانده یک ساختار جبری به صورت $\mathcal{L} = (L, \sqcap, \sqcup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ می باشد که $\sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow$ ، عملگرهای دو تایی روی L می باشند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

(R_1) $(L, \sqcap, \sqcup)$ یک مشبکه کراندار با کوچکترین عضو ۰ و بزرگترین عضو ۱ باشد.

(R_2) عمل $(*)$ جابجایی و شرکت پذیر است و ۱ عضو خنثی می باشد.

(R_3) برای هر x, y, z در L داریم، $x * y \leq z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \Rightarrow z$.

تعریف ۴.۱.۱. [۹] ترتیب $\leq$ و نقیض $\neg$ دریک مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, 0, 1)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

برای هر x, y در L،

$x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \sqcap y = x$، اگر و تنها اگر $x \sqcup y = y$، اگر و تنها اگر $x \Rightarrow y = 1$

و $\neg x = x \Rightarrow 0$.

تعریف ۵.۱.۱. [۹] عضو x از L خود توان است اگر و تنها اگر $x * x = x$ و پوچ توان است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح n وجود داشته باشد که، $x * x * \cdots * x = 0$.

تعریف ۶.۱.۱. [۷] به مشبکه مانده L برگشت پذیر می گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in L$ داشته باشیم $\neg\neg x = x$.

گزاره ۷.۱.۱. [۹] در مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, 0, 1)$ عملگر $*$ افزایشی و عملگر $\Rightarrow$ روی دومین مولفه افزایشی و روی اولین مولفه کاهشی می باشد وعملگر $\neg$ یک عملگر کاهشی است یعنی:

اگر $x \leq y$ آنگاه $x * z \leq y * z$.

اگر $x \leq y$ آنگاه $z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$.

اگر $y \leq x$ آنگاه $y \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z$.

اگر $y \leq x$ آنگاه $\neg x \leq \neg y$.

به علاوه روابط زیر برای هر x, y, z در L برقرار است :

(۱) $x * y \leq x \sqcap y$،

(۲) $\neg x \sqcup y \leq x \Rightarrow y$،

(۳) $x * \neg y \leq \neg(x \Rightarrow y)$،

(۴) $x \leq y \Rightarrow (x * y)$،

(۵) $x * (x \Rightarrow y) \leq x \sqcap y$،

(۶) $x \sqcup y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$،

(۷) $\neg\neg\neg x = \neg x$،

(۸) $(x \Rightarrow y) * z \leq x \Rightarrow (y * z)$،

(۹) $x \Rightarrow (y \sqcap z) = (x \Rightarrow y) \sqcap (x \Rightarrow z)$،

(۱۰) $(x \sqcup y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \sqcap (y \Rightarrow z)$،

(۱۱) $(x * y) \Rightarrow z = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$،

(۱۲) $x \Rightarrow y = sup\{z \in L : x * z \leq y\}$،

(۱۳) $x * (y \sqcup z) = (x * y) \sqcup (x * z)$،

(۱۴) $(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z$،

(۱۵) $x \Rightarrow y \leq (x * z) \Rightarrow (y * z)$.

۲.۱ MTL، BL و MV -جبرها

تعریف ۱.۲.۱. [۱۲] یک MTL- جبر، یک مشبکه مانده است که برای هر x, y در این جبر در شرط زیر صدق کند:

$$(\text{پیش خطی}) \quad (x \Rightarrow y) \sqcup (y \Rightarrow x) = 1.$$

تعریف ۲.۲.۱. [۷] مشبکه MTL- جبر را $IMTL$ -جبر می نامیم، هر گاه برگشت پذیر باشد.

تعریف ۳.۲.۱. [۵] MTL -جبر A را یک BL - جبر گوییم، اگربرای هر x, y در A در معادله تقسیم پذیری زیر صدق کند:

$$(BL) \quad a \sqcap b = a * (a \Rightarrow b).$$

تعریف ۴.۲.۱. [۴] BL-جبر L را یک MV-جبر گوییم، اگر هر x در L در شرط (DN) صدق کند:

$$(DN) \quad (x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = \neg\neg x = x.$$

لم ۵.۲.۱. [۹] هر MV -جبر یک BL -جبر است اما عکس آن همواره برقرار نیست.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $A = \{0, a, b, 1\}$ باشد اعمال $\Rightarrow ,*$ را روی A به صورت زیر تعریف می کنیم:

$*$	$\circ$	a	b	۱
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
a	$\circ$	$\circ$	a	a
b	$\circ$	a	b	b
۱	$\circ$	a	b	۱

$\Rightarrow$	$\circ$	a	b	۱
$\circ$	۱	۱	۱	۱
a	a	۱	۱	۱
b	$\circ$	a	۱	۱
۱	$\circ$	a	۱	۱

جدول ۱-۱

آنگاه واضح است که $(A, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, \circ, ۱)$ یک BL -جبر است، اما یک MV-جبرنیست. چون اگر عضو b را در نظر بگیرید داریم، $\neg\neg b = ۱ \neq b$.

تعریف ۱.۲.۷. [۱۲] *یک جبر بولی یک مشبکه مانده است که برای تمامی xها در این جبر، داشته باشیم:*
$x \sqcup \neg x = ۱$.

تعریف ۱.۲.۸. [۱۱, ۳] *یک جبر هایتینگ یا جبر شبه بولی یک مشبکه مانده است که برای هر x, y در این مشبکه مانده داشته باشیم :*
$x * y = x \sqcap y$.

ملاحظه ۱.۲.۹. *همیشه یک جبر بولی یک جبر هایتینگ است و در شرط (پیش خطی) صدق میکند .کافی است در تعریف جبر بولی به جای x قرار دهیم $(x \Rightarrow y)$ و چون $\neg(x \Rightarrow y) = (y \Rightarrow x)$، پس $(x \Rightarrow y) \sqcup \neg(x \Rightarrow y) = (x \Rightarrow y) \sqcup (y \Rightarrow x) = ۱$ ، یعنی در شرط(پیش خطی) صدق می کند.*

تعریف ۱۰.۲.۱. [۱۰, ۱۱] در یک مشبکه مانده ۱، $\sqcup$ - *تحویل نا پذیر است. یعنی برای هر* x, y *دراین مشبکه مانده داریم،*

۱ $= x \sqcup y$ *اگر و تنها اگر ۱* $= x$ *یا ۱* $= y$ *یا هر دو.*

و به طور مشابه ۰، $\sqcap$- تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر برای هر x, y *در این مشبکه مانده داشته باشیم،* ۰ $= x \sqcap y$ *اگر و تنها اگر ۰* $= x$ *یا ۰* $= y$ *یا هر دو.*

۳.۱ t -نرم

تعریف ۱.۳.۱. [۱۱, ۱۳] *فرض کنید* $I = [0, 1]$ *باشد. یک تابع دو متغیره به صورت* $T : I^2 \rightarrow I$ *را یک* t - *نرم گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) $T(x, 1) = x$ ،

(۲) اگر $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ آنگاه $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$ ،

(۳) $T(x, y) = T(y, x)$ ،

(۴) $T[x, T(y, z)] = T[T(x, y), z]$.

اگر برای هر جفت (x, y) *در* I^2، $sup\{z \in I \mid T(x, z) \leq y\}$ *موجود باشد آنگاه نگاشت استلزام مانده* I_T *به صورت زیر تعریف می شود:*

$$I_T(x, y) = sup\{z \in I \mid T(x, z) \leq y\}.$$

مثال ۲.۳.۱. *بعضی از* t- *نرم ها از اهمیت خاصی برخوردارند، مثل* t - *نرم های زیر که روی* I *در نظر می گیریم:*

$T_M(x, y) = min(x, y)$ ،

$T_P(x, y) = x.y$ ،

$T_L(x,y) = max(x+y-1, 0)$.

که آنها را به ترتیب t- نرم های مینیمم، ضرب و لوکاسیویچ می نامیم.

تعریف ۱.۳.۳. [۸] فرض کنید T_1, T_2 دو t-نرم روی مشبکه $\mathcal{L}$ باشند، برای هر a, b در L اگر $T_1(a,b) \leq T_2(a,b)$ گوییم، T_1 ضعیف تر از T_2است و می نویسم $T_1 \leq T_2$.

اگربرای هر a, b در L داشته باشیم $T_1(a,b) = T_2(a,b)$، گوییم T_1, T_2 برابرند و می نویسیم $T_1 = T_2$.

مثال ۱.۳.۴. [۸] بزرگ ترین t -نرم، t-نرم مینیمم است و کوچک ترین t -نرم، به صورت زیر تعریف می شود:

اگر $a = 1$ یا $b = 1$ آنگاه $T_w(a,b) = a \sqcap b$، در غیر اینصورت $T_w(a,b) = 0$.

یعنی برای هر t -نرم T داریم $T_w \leq T \leq T_m$.

$T(0,a) = 0$ چون $0 \leq T(a,0) \leq min(a,0) = 0$.

تعریف ۱.۳.۵. [۸] فرض کنید T یک t -نرم روی مشبکه $\mathcal{L}$ باشد اگر برای هر x, y در L $T(a, b \sqcap c) = T(a,b) \sqcap T(a,c)$، آنگاه این t-نرم را $\sqcap$ توزیع پذیر می نامیم.

به طور مشابه اگر $T(a, b \sqcup c) = T(a,b) \sqcup T(a,c)$، آنگاه T را $\sqcup$ توزیع پذیر می نامیم .

مثال ۱.۳.۶. در مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, 0, 1)$ عملگر $*$ همیشه یک t- نرم است و عملگر $\Rightarrow$ ، همیشه استلزام مانده است.

t - نرم هایی که روی مشبکه مانده بدست می آوریم t -نرم های مانده می نامیم.

برای مثال $([0,1], min, max, T, I_T, 0, 1)$ یک مشبکه مانده است اگر و تنها اگر T یک t- نرم از چپ پیوسته روی $[0,1]$ باشد .

با استفاده از گزاره (۷.۱.۱) قسمت (۱۲)، $(\Rightarrow)$ در یک مشبکه مانده کاملا با دیگر عملگرها مشخص می شود. این عملگر مانده $(\Rightarrow_*)$ از $(*)$ است.

با توجه به ویژگی شرکت پذیری هر t- نرم به آسانی می توان تعریف t- نرم را به دو(n) مولفه تعمیم داد. این تعریف برپایه یک رابطه بازگشتی و بر مبنای تعریف t - نرم است.

تعریف ۷.۳.۱. [۱۰] مشبکه $\mathcal{L}^I = (L^I, \sqcup, \sqcap)$ *با تعریف زیر را در نظر بگیرید:*

$L^I = \{[x_۱, x_۲] | (x_۱, x_۲) \in [۰, ۱]^۲, x_۱ \leq x_۲\}$ ،

$[x_۱, x_۲] \sqcap [y_۱, y_۲] = [min(x_۱, y_۱), min(x_۲, y_۲)]$ ،

$[x_۱, x_۲] \sqcup [y_۱, y_۲] = [max(x_۱, y_۱), max(x_۲, y_۲)]$ ،

به ویژه $\leq_{L^I}$ یک ترکیب توسیع یافته از $\leq$ است، یعنی:

$[x_۱, x_۲] \leq_{L^I} [y_۱, y_۲]$ *اگر و تنها اگر* $x_۱ \leq y_۱, x_۲ \leq y_۲$.

تعریف ۸.۳.۱. [۱۰] *فرض کنید T یک t- نرم روی $\mathcal{L}^I$ باشد. I_T از T را به صورت زیر تعریف می کنیم:*

$I_T(x, y) = sup\{z | z \in L^I, T(x, z) \leq_{L^I} y\}$.

T *در شرط سوم مشبکه مانده* $(R_۳)$ *برای* $(* = T, \Rightarrow = I_T)$ *صدق می کند،*

پس $(L^I, \sqcup, \sqcap, T, I_T, ۰_{\mathcal{L}^I}, ۱_{\mathcal{L}^I})$ *یک مشبکه مانده است که در آن داریم:*

$۰_{\mathcal{L}_I} = [۰, ۰], ۱_{\mathcal{L}_I} = [۱, ۱]$.

یعنی می توان روی $\mathcal{L}^I$ یک مشبکه مانده ساخت.

قضیه ۹.۳.۱. هیچ t-نرم T روی $\mathcal{L}^I$ وجود ندارد که $(L^I, \sqcup, \sqcap, T, I_T, ۰_{\mathcal{L}^I}, ۱_{\mathcal{L}^I})$ یک MTL- جبر *باشد.*

برهان. برای نشان دادن اینکه در شرط (پیش خطی) صدق نمی کند، فرض کنید x, y در L^I باشد. از شرط سوم مشبکه مانده داریم:

(۱) $y \leq_{L^I} x = T(x, 1_{\mathcal{L}^I})$ اگر و تنها اگر $I_T(x,y) \leq_{L^I} 1_{\mathcal{L}^I}$ ،

چون برای هر $a = [a_1, a_2], b = [b_1, b_2]$ در L^I داریم

$sup(a,b) = [max(a_1, b_1), max(a_2, b_2)] = 1_{\mathcal{L}^I}$، پس $a = 1_{\mathcal{L}^I}$ یا $b = 1_{\mathcal{L}^I}$ از شرط (پیش خطی) داریم $I_T(x,y) = 1_{\mathcal{L}^I}$ یا $I_T(y,x) = 1_{\mathcal{L}^I}$. پس با(۱) داریم $y \leq_{L^I} x$ یا $x \leq_{L^I} y$ که یک تناقض است، چون در L^I اعضا قابل مقایسه نیستند. $\square$

۴.۱ فیلترهای اول و بولی روی مشبکه مانده

تعریف ۱.۴.۱. [۱۱] *یک فیلتر از یک مشبکه مانده* $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, *, 0, 1)$ *یک زیر مجموعه غیر تهی* F *از* L *، می باشد که:*

(۱) *برای هر* x, y *در* L *، اگر* $x \in F, x \leq y$ *، آنگاه* $y \in F$ ،

(۲) *برای* x, y *در* F *داشته باشیم،* $x * y \in F$.

تعریف ۲.۴.۱. [۱۱] *یک فیلتر بولی* (BF) *از* L *یک فیلتر* F *است که:*

برای هر x *در* L *،* $x \sqcup \neg x \in F$.

تعریف ۳.۴.۱. [۱۱] *یک فیلتراول* (PF) *از* L *یک فیلتر* F *است که:*

برای هر x, y *در* L *داشته باشیم،* $x \Rightarrow y \in F$ *یا* $y \Rightarrow x \in F$ *یا هر دو.*

تعریف ۴.۴.۱. [۱۱] *یک فیلتر اول از نوع دوم* (PF_2) *از* L *یک فیلتر* F *است که:*

برای هر x, y *در* L *داشته باشیم، اگر* $x \sqcup y \in F$ *آنگاه* $x \in F$ *یا* $y \in F$ *، یا هر دو.*

تعریف ۵.۴.۱. [۱۱] *یک فیلتر استلزامی مثبت از* L *یک زیر مجموعه* F *از* L *است که:*

(۱) $1 \in F$ ،

(۲) برای هر x, y در L اگر $x \Rightarrow y \in F, (x * y) \Rightarrow z \in F$ ، آنگاه $x \Rightarrow z \in F$.

تعریف ۶.۴.۱. [۱۱] یک فیلتر از یک مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, *, ۰, ۱)$ یک زیر مجموعه غیر تهی F از L می باشد که:

(۱) $۱ \in F$ ،

(۲) برای هر x, y در L ، اگر $x \in F, x \Rightarrow y \in F$ ،آنگاه $y \in F$.

گزاره زیر معادل با تعریف (۱ .۴. ۲) می باشد.

گزاره ۷.۴.۱. [۱۱] یک فیلتر بولی F از مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, *, ۰, ۱)$ به صورت زیر است:

برای هر x, y در L ، اگر $y \Rightarrow z \in F, (x * \neg z) \Rightarrow y \in F$ ، آنگاه $x \Rightarrow z \in F$.

گزاره ۸.۴.۱. [۱] فرض کنید F یک فیلتر از مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, *, ۰, ۱)$ باشد. آنگاه F یک فیلتر بولی است اگر و تنها اگر برای هر x, y در L ، اگر $(\neg y * x) \Rightarrow y \in F$ ، آنگاه $x \Rightarrow y \in F$.

چون $(x \Rightarrow y) \Rightarrow \neg y = y \Rightarrow (\neg y * x)$ ، پس با گزاره بالا نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۹.۴.۱. اگر F یک فیلتر از مشبکه مانده $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, ۰, ۱)$ باشد، آنگاه F یک فیلتر بولی است اگر و تنها اگر برای هر x, y در L ، اگر $(\neg y \Rightarrow (x \Rightarrow y)) \in F$ ، آنگاه $x \Rightarrow y \in F$.

نتیجه ۱۰.۴.۱. یک فیلتر بولی همیشه یک فیلتر استلزامی مثبت می باشد، و بر عکس آن در مشبکه های مانده برگشت پذیر برقرار است.

۵.۱ فیلترهای محدود و اول از نوع دوم و سوم

گزاره ۱.۵.۱. اگر $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, *, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده باشد و $l \in L$ به طوریکه $l * l = l$ آنگاه $F_l := \{x \in L : l \leq x\}$ یک فیلتر از L می باشد.

برهان. از آنجایی که برای هر l در L داریم، $l \leq ۱$ بنابراین $۱ \in F_l$.

برای بررسی شرط دوم فیلتر فرض کنیم $x \in F_l, x \Rightarrow y \in F_l$، پس طبق تعریف(۴.۱.۱) داریم:
$l \Rightarrow (x \Rightarrow y) = ۱$، $l \Rightarrow x = ۱$، بنابراین $l \Rightarrow y = ۱$، یعنی $l \leq y$ لذا $y \in F_l$. یعنی F_l فیلتر می باشد.

□

تعریف ۲.۵.۱. *فیلتر F_l از گزاره قبل را فیلترمحدود می نامیم.*

گزاره ۳.۵.۱. *فرض کنید $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده باشد و F یک فیلتر محدود از L باشد، آنگاه برای هر عضو خود توان l در L داریم $F_l = F$.*

برهان. فرض کنید F یک فیلتر محدود از L باشد و m بوسیله تمام عناصر F تولید شود، یعنی برای هر $a_i \in F$ داشته باشیم $m = a_۱ * \cdots * a_n$، در این صورت mعضوی از Fمی باشد، چون F یک فیلتر است، پس $m * m \in F$ بنابرین m (به عنوان عضوی از تمام عناصر F) کوچکتر یا مساوی $m * m$ است . با توجه به اینکه:

$m = m \sqcap m \leq m * m$، پس$m = m * m$. □

متذکر می شویم که این برای فیلترهای محدود کافی نیست به طور مثال:

مثال ۴.۵.۱. $[۰, ۱]$ *یک فیلتر از* $([۰, ۱], min, max, min, \Rightarrow_{min}, ۰, ۱)$ *است، اما برای هر* $k \in [۰, ۱]$ *بازه* $[۰, ۱]$ *به شکل* F_l *نیست. چون* $\{۰ \in [۰, ۱] : k \not\leq ۰\}$، *پس* $[۰, ۱]$ *از نوع* F_l *نیست.*

تعریف ۵.۵.۱. [۱۲] *یک فیلتر بولی از نوع دوم*$(BF_۲)$ *از یک مشبکه مانده* $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, *, \Rightarrow, ۰, ۱)$ *یک فیلتر از L است که در شرط زیر صدق کند:*

برای تمام x ها در L، $\neg x \in F$ یا $x \in F$ یا هر دو.