دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

کاراکترهایی که روی عناصر از مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول برابرند

استاد راهنما

دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور

دکتر کمال عزیزی هریس

پژوهشگر

آمینه راستگو

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سرِ فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

تقدیم به:

آنان که بزرگ می اندیشند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **محمد شهریاری**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **کمال عزیزی هریس** استاد مشاور این رساله کمال تشکر را دارم.
از جناب آقای دکتر مهتدی فر که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

آمنه راسکو
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: راستگو نام: آمینه

عنوان: کاراکترهایی که روی عناصر از مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول برابرند

استاد راهنما : دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور : دکتر کمال عزیزی هریس

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۵۹

کلید واژه‌ها: کاراکتر، تحویل ناپذیر،حلپذیر، مؤسس، زیرگروه سیلو

چکیده

فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$. ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه حلپذیر باشد و کاراکترهای χ و ψ دارای مقادیر برابر روی تمامی اعضای از مرتبه‌ی توانی از عدد اول باشند و یکی از کاراکترهای χ یا ψ اولیه باشد، آنگاه $\chi = \psi$.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [3] تهیه و تنظیم می‌شود، به بررسی و مطالعه‌ی سؤال زیر می‌پردازیم:
سؤال: آیا یک گروه متناهی می‌تواند دارای دو کاراکتر تحویل ناپذیر متمایز باشد به طوری که این دو کاراکتر روی تمام اعضایی از گروه که از مرتبه‌ی توانی از عدد اول هستند، دارای مقادیر برابر باشند؟

جواب سؤال در حالت کلی مثبت است زیرا که گروه $\mathrm{PSL}(2,23)$ دارای کاراکترهای تحویل ناپذیر از درجه 22 است به طوری که مقادیر آنها فقط روی اعضای مرتبه‌ی 12 متمایز هستند. به عنوان مثال دیگر، گروه متناوب A_{15} دارای کاراکترهای تحویل ناپذیر از درجه‌ی 1716 است به طوری که مقادیر آنها فقط روی اعضای مرتبه‌ی 15 متمایز هستند.

اما جالب است که حتی اگر گروه متناهی یک گروه حلپذیر باشد، آنگاه جواب سؤال فوق دوباره مثبت است. برای مثال، گروه دی هدرال از مرتبه‌ی 24 دارای دو کاراکتر تحویل ناپذیر باوفا است که فقط روی اعضای مرتبه‌ی 12 دارای مقادیر متمایز هستند. اما هیچکدام از این کاراکترها اولیه نیستند. بنابراین، در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم که:

قضیه A. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی حلپذیر و χ و ψ کاراکترهای تحویل ناپذیر از G باشند که روی همه‌ی اعضای از مرتبه توانی از عدد اول، دارای مقادیر برابر باشند. اگر یکی از کاراکترهای χ یا ψ اولیه باشد، آنگاه $\chi = \psi$.

فصل ۱

مفاهیم وقضایای مورد نیاز

۱.۱ مفاهیم وقضایای مورد نیاز از گروههای متناهی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و Ω یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد. گوییم G روی Ω عمل می‌کند هرگاه تابعی مانند

$$.:\Omega \times G \longrightarrow \Omega$$

$$.(\alpha, g) = \alpha^g$$

موجود باشد به طوری که

(1) $(\alpha^g)^h = \alpha^{gh}$.

(2) $\alpha^1 = \alpha$.

ثابت می‌شود که اگر G روی Ω عمل کند، آنگاه تابع $\varphi : G \longrightarrow S_\Omega$ با ضابطه‌ی $\varphi(g) = \sigma_g$ یک هومومورفیسم گروهی است که در آن $\sigma_g : \Omega \longrightarrow \Omega$ با ضابطه‌ی $\sigma_g(\alpha) = \alpha^g$ می‌باشد. هسته‌ی عمل G روی Ω عبارت است از

$$\begin{aligned}\ker\varphi &= \{g \in G \mid \ \varphi(g) = 1\} = \{g \in G \mid \ \sigma_g = 1\} \\ &= \{g \in G \mid \ \sigma_g(\alpha) = \alpha \ \ \forall \alpha \in \Omega\} = \{g \in G \mid \ \alpha^g = \alpha \ \ \forall \alpha \in \Omega\},\end{aligned}$$

و گوییم G روی Ω به صورت باوفا عمل می‌کند هرگاه $\ker\varphi = \{1\}$. حال فرض کنیم گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند و $\alpha \in \Omega$. در اینصورت مدار α در عمل G روی Ω به صورت زیر تعریف می‌شود

$$O_\alpha = \{\alpha^g \mid \ g \in G\} \subseteq \Omega.$$

پایدارساز α در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Stab}_G(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}.$$

از آن جایی که تابع $\psi : \{Stab_G(\alpha)g \mid g \in G\} \longrightarrow O_\alpha$ با ضابطه‌ی $\psi(Stab_G(\alpha)g) = \alpha^g$ یک تابع یک به یک و پوشا است، لذا

$$|G : \mathrm{Stab}_G(\alpha)| = |O_\alpha|.$$

بالاخره، گوییم عمل G روی Ω یک عمل متعدی است هرگاه به ازای هر $\alpha \in \Omega$،

$$\Omega = O_\alpha = \{\alpha^g \mid \ g \in G\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. گوییم گروه A روی گروه G به وسیله‌ی اتومورفیسم عمل می‌کند هرگاه A روی G عمل کند و به ازای هر $g, h \in G$ و $a \in A$، $(gh)^a = g^a h^a$.

حال فرض کنیم گروه A روی گروه G عمل می‌کند. در اینصورت زیرگروههای $C_G(A)$ و $[G, A]$ از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(A) = \{g \in G \mid g^a = g \ \forall a \in A\},$$

$$[G, A] = < g^{-1}g^a \mid g \in G, a \in A > .$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $|G| = p^a m$ و p یک عدد اول به طوری که $p \nmid m$ و $a \geq 0$. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه سیلوی G می‌نامیم هرگاه $|H| = p^a$. مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروههای سیلوی G را با $\mathrm{Syl}_p(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم π یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از اعداد اول باشد. زیرگروه H از G را π-زیرگروه گوییم هرگاه تمام مقسوم‌علیه‌های اول $|H|$ در π قرار گیرند. اگر $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t} \in \mathbb{Z}^+$ و $\pi = \{p_1, ..., p_j\}$، آنگاه π- قسمت n عبارت است از $n_\pi = p_1^{\alpha_1} .... p_j^{\alpha_j}$ و π'- قسمت n عبارت است از $n_{\pi'} = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} ... p_t^{\alpha_t}$. همچنین n را یک π-عدد گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر عدد اول p که $p | n$ داشته باشیم $p \in \pi$. nرا یک π'-عدد گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر عدد اول p که

$p\,|\,n$ داشته باشیم $p \notin \pi$. بالاخره، زیرگروه L از G را زیرگروه π-هال گوییم هرگاه $|L|$ یک π-عدد و $|G:L|$ یک π'-عدد باشد. مجموعه‌ی همه‌ی π-زیرگروههای هال G را با علامت $Hall_\pi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G گروه دلخواه متناهی و p مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. در اینصورت $O_p(G)$ بزرگترین p-زیرگروه نرمال G است و ثابت می‌شود که

$$O_p(G) = \bigcap_{H \in \mathrm{Syl}_p(G)} H.$$

تعریف ۶.۱.۱. زیرگروه H از G را یک p-متمم گوییم هرگاه $|G:H| = p^\alpha$ و $p \nmid |H|$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. گروه متناهی G را p-پوچتوان گوییم هرگاه G دارای p-متمم نرمال باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G گروه متناهی و π زیرمجموعه‌ای از اعداد اول باشد. گروه G را π-جدایی پذیر گوییم هرگاه سری نرمال

$$1 = N_0 \leqslant N_1 \leqslant \cdots \leqslant N_r = G$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $1 \le i \le r$، $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ یک π-گروه یا π'-گروه باشد.

تعریف ۹.۱.۱. گروه G را پوچتوان گوییم هرگاه دارای سری نرمال مرکزی باشد. به عبارت دیگر، سری نرمال

$$1 = N_0 \leqslant N_1 \leqslant \cdots \leqslant N_r = G$$

موجود باشد به طوری که

$$\forall 1 \le i \le r: \ \frac{N_i}{N_{i-1}} \subseteq Z\Big(\frac{G}{N_{i-1}}\Big).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. گروه G را حلپذیر گوییم هرگاه سری نرمالی مانند $G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_r = G$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq r$، گروه $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ آبلی باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد. گوییم G آبلی مقدماتی است هرگاه آبلی باشد و هر عضو غیرهمانی آن از مرتبه‌ی عدد اول p باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. گروه متناهی G را گروه فروبنیوس گوییم هرگاه یک زیرگروه $1 < H < G$ از G موجود باشد به طوری که به ازای هر $g \in G - H$ داشته باشیم $H \cap H^g = 1$. در اینصورت H را یک متمم فروبنیوس گوییم. ثابت می‌شود که اگر H یک متمم فروبنیوس گروه G باشد، آنگاه

$$\exists K \trianglelefteq G, \ \ G = HK \ , \ H \cap K = 1 \,.$$

زیرگروه نرمال K را هسته فروبنیوس گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱. زیرگروه فیتینگ G، بزرگترین زیرگروه منحصربفرد نرمال و پوچتوان G است که با نماد $F(G)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که

$$F(G) = \prod_{p \in \pi(G)} O_p(G) \,.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم $F_1 = F(G)$، $\frac{F_2}{F_1} = F(\frac{G}{F_1})$ و... $\frac{F_n}{F_{n-1}} = F(\frac{G}{F_{n-1}})$. در اینصورت $F_1 \leqslant F_2 \leqslant \ldots \leqslant F_n$ و کوچکترین عدد طبیعی n با خاصیت $F_n = G$ را ارتفاع فیتینگ گروه G گوییم و آن را با $\mathrm{nl}(G)$ نشان می‌دهیم. لذا ارتفاع فیتینگ گروه‌های پوچتوان 1 است.

تعریف ۱۵.۱.۱. زیرگروه فراتینی G را با نماد $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(G)} M,$$

که در آن $\mathrm{Max}(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروههای ماکزیمال G می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم G یک گروه باشد. G' را زیرگروه مشتق G می‌نامیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G^{(1)} = G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle = \langle x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G \rangle .$$

به همین ترتیب $G^{(2)}$، $G^{(3)}$ و ... را تعریف می‌کنیم:

$$G^{(2)} = (G')' = \langle [t, s] \mid t, s \in G' \rangle$$

و به همین ترتیب $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$.

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر G حلپذیر باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی m به طوری که $G^{(m)} = 1$ باشد را با $\mathrm{dl}(G)$ نشان داده و به آن طول مشتق گروه G می‌گوییم. طول مشتق گروه‌های آبلی یک است.

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم A و G گروههای متناهی باشند و A به وسیله‌ی اتومورفیسم روی G عمل کند. همچنین فرض کنیم $(|A|, |G|) = 1$ و عمل A روی G باوفا باشد. در اینصورت عمل A روی $\frac{G}{\Phi(G)}$ نیز باوفا است.*

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۳.۳۰ از مرجع [۶]. $\square$

قضیه ۱.۱.۱۹. (***Fitting***) *فرض کنیم گروه متناهی A روی گروه متناهی G به وسیله‌ی اتومورفیسم عمل کند و $(|A|, |G|) = 1$. در اینصورت اگر G آبلی باشد، آنگاه $G = [G, A] \times C_G(A)$.*

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۴.۳۴ از مرجع [۶]. $\square$

قضیه ۱.۱.۲۰. (***Schur - Zassenhaus***)*:*

فرض کنیم N زیرگروه نرمال G باشد به طوری که $(|N|, |G : N|) = 1$. در اینصورت:

۱) N یک مکمل در G دارد. یعنی اینکه $H \leq G$ موجود است به طوری که

$$G = NH, N \cap H = 1.$$

۲) اگر حداقل یکی از گروه‌های N یا $\frac{G}{N}$ حلپذیر باشند، آنگاه هر دو مکمل برای N در G با هم مزدوج هستند.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۸ و ۳.۱۲ از مرجع [۶].

□

قضیه ۲۱.۱.۱. (*Hall-C*) *فرض کنیم G یک گروه متناهی حلپذیر و π یک مجموعه‌ی دلخواه از اعداد اول باشد. در اینصورت همه‌ی π- زیرگروههای هال G مزدوج هستند.*

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۱۴ از مرجع [۶].

□

قضیه ۲۲.۱.۱. (۳ . ۲ . ۱ *Hall-Higman*)

فرض کنیم G یک گروه π-جدایی پذیر باشد به طوری که $O_{\pi'}(G) = 1$. در اینصورت

$$C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G).$$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۲۱ از مرجع [۶]. □

لم ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی حلپذیر و $F = F(G)$. در اینصورت*

$$C_G(F(G)) \subseteq F(G).$$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۶۷.۷ از مرجع [۸]. □

فصل ۲

نظریه‌ی کاراکترها و کاراکترهای π-مخصوص

۱.۲ مفاهیم وقضایای مورد نیاز از کاراکترها

در این بخش مفاهیم، تعاریف و لم‌ها و قضایای مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم گروه G متناهی باشد. هومورفیسم گروهی $\phi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ که در آن n یک عدد طبیعی و $GL_n(\mathbb{C})$ گروه ضربی ماتریسهای $n \times n$ معکوس پذیر با درایه‌ها در میدان اعداد مختلط می‌باشد، را یک نمایش مختلط گروه G گوییم. می‌دانیم که اگر $\phi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ یک هومورفیسم گروهی باشد، آنگاه $\phi(1) = I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم G گروه متناهی و $\phi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ یک نمایش مختلط G باشد. در اینصورت کاراکتر پیشنهاد شده توسط ϕ عبارت است از تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی

$$\chi(g) = Trace(\phi(g)),$$

که در آن $Trace(\phi(g))$ جمع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $\phi(g)$ می‌باشد. در اینصورت

$$\chi(1) = Trace(\phi(1)) = Trace(I_n) = n.$$

را درجه کاراکتر χ گوییم.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $Char(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی کاراکترهای گروه G باشد. ثابت می‌شود که این مجموعه تحت عمل جمع توابع بسته است. به عبارت دیگر، اگر χ_1 و χ_2 کاراکترهایی از گروه G باشند، آنگاه $\chi_1 + \chi_2$ نیز کاراکتری از G است. همچنین کاراکتر χ از G را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه χ را نتوان به صورت جمع دو کاراکتر دیگر نوشت. مجموعه‌ی کاراکترهای تحویل ناپذیر گروه G را با $Irr(G)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که گروه متناهی G دقیقاً به تعداد کلاسهای تزویج G کاراکتر تحویل ناپذیر دارد و لذا اگر $k(g)$ نشان دهنده‌ی تعداد کلاسهای تزویج G باشد، آنگاه $|Irr(G)| = k(G)$.

تعریف ۴.۱.۲. از آنجایی که ماتریسهای 1×1 معکوس پذیر روی میدان اعداد مختلط دقیقاً گروه ضربی میدان اعداد مختلط است، لذا اگر $\mu : G \to GL_1(\mathbb{C})$ یک نمایش مختلط روی G باشد، آنگاه $\mu : G \to (\mathbb{C} - 0, \times)$

یک هومورفیسم گروهی است و کاراکتر پیشنهاد شده توسط μ روی G همان خود μ است. در اینصورت μ را کاراکتر خطی G گوییم. واضح است که درجه‌ی هر کاراکتر خطی برابر ۱ است. مجموعه‌ی همه‌ی کاراکترهای خطی گروه G را با $\mathrm{Lin}(G)$ نشان می‌دهیم. لذا:

$$\mathrm{Lin}(G) = \{\mu \in \mathrm{char}(G) \mid \mu(1) = 1\}.$$

از آنجایی که درجه‌ی هر کاراکتر خطی برابر 1 است، لذا یک کاراکتر خطی را نمی‌توان به صورت مجموع دو کاراکتر دیگر نوشت و در نتیجه هر کاراکتر خطی یک کاراکتر تحویل ناپذیر است. به عبارت دیگر،

$$Lin(G) \subseteq Irr(G).$$

لم ۲.۱.۵. **(رابطه‌ی تعامد تعمیم یافته)** *فرض کنیم G گروه متناهی و $Irr(G) = \{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k\}$ مجموعه‌ی همه‌ی کاراکترهای تحویل ناپذیر G باشد. در اینصورت به ازای هر $h \in G$،*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}\frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)},$$

که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases}$$

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۲.۱۴ از مرجع [۴].

□

تعریف ۲.۱.۶. فرض کنیم G گروه متناهی و $\chi, \psi \in Char(G)$. در اینصورت ضرب داخلی $[\chi, \psi]$ به صورت

$$[\chi, \psi] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi\bar(g)$$

تعریف می‌شود. ثابت می‌شود که $\chi \in Irr(G)$ اگر و فقط اگر $[\chi, \chi] = 1$.

تعریف ۲.۱.۷. اگر $\gamma : G \to (\mathbb{C}-0, \times)$ هومورفیسم بدیهی باشد (یعنی اینکه به ازای هر $g \in G$، $\gamma(g) = 1$) آنگاه γ یک کاراکتر خطی روی G است که آن را کاراکتر اصلی گوییم و با 1_G نشان می‌دهیم. بنابراین به ازای

هر $g \in G$،

$$1_G(g) = \gamma(g) = 1.$$

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنیم G گروه متناهی و $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k\}$ مجموعه‌ی همه‌ی کاراکترهای تحویل ناپذیر G باشد و $\chi = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_k\chi_k$ کاراکتری از G باشد که در آن $a_1, a_2, ..., a_k$ اعداد صحیح نامنفی هستند که تواماً صفر نیستند. در اینصورت χ_j را یک مؤسس تحویل ناپذیر χ گوییم هرگاه $a_j \neq 0$. در واقع ثابت می‌شود که به ازای هر $1 \leq i \leq k$، $a_i = [\chi, \chi_i]$.

قضیه ۹.۱.۲. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در اینصورت*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۲.۷ از مرجع [۴]. □

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنیم G گروه متناهی و χ کاراکتری از G باشد. در اینصورت

$$Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$$

را مرکز کاراکتر χ گوییم. همچنین

$$\ker\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

را هسته کاراکتر χ گوییم و آن دقیقاً برابر است با هسته‌ی نمایشی که χرا پیشنهاد داده است. به عبارت دیگر اگر $\Psi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ نمایش پیشنهاد دهنده‌ی χ باشد، آنگاه $\ker\Psi = \ker\chi$ و لذا $\ker\chi \trianglelefteq G$. کاراکتر χ را باوفا گوییم هرگاه $\ker\chi = 1$.

لم ۱۱.۱.۲. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در اینصورت*

$$G' = \bigcap_{\lambda \in \mathrm{Lin}(G)} \ker\lambda.$$

به عبارت دیگر، به ازای هر $g \in G'$ و هر کاراکتر خطی λ از G، $\lambda(g) = \lambda(1) = 1$.

برهان. فرض کنیم $\lambda : G \to \mathbb{C}$ یک کاراکتر خطی گروه G باشد. در اینصورت $\lambda(1) = 1$ و لذا اگر $Y : G \to GL_1(\mathbb{C})$ نمایش پیشنهاد دهنده‌ی λ باشد، آنگاه به ازای هر $g \in G$،

$$\lambda(g) = Trace(Y(g)) = Y(g).$$

بنابراین

$$\lambda = Y : G \to GL_1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} - 0, \times)$$

یک همومورفیسم گروهی است. در نتیجه طبق قضیه‌ی اول ایزومورفیسم داریم:

$$\frac{G}{\ker\lambda} \cong \mathrm{Im}(\lambda) \leq (\mathbb{C} - 0, \times),$$

و لذا $\frac{G}{\ker\lambda}$ آبلی است و در نتیجه $G' \subseteq \ker\lambda$. بنابراین به ازای هر $\lambda \in \mathrm{Lin}(G)$، $G' \subseteq \ker\lambda$ و در نتیجه

$$G' \subseteq \bigcap_{\lambda \in \mathrm{Lin}(G)} \ker\lambda.$$

از طرف دیگر، چون $\frac{G}{G'}$آبلی است، پس تمام کاراکترهای $\frac{G}{G'}$ خطی هستند و لذا

$$\mathrm{Irr}(\frac{G}{G'}) = \{\lambda \in \mathrm{Irr}(\frac{G}{G'}) \mid \lambda(1) = 1\}.$$

اما نشان دادیم که اگر $\lambda \in \mathrm{Lin}(G)$ کاراکتر خطی دلخواه G باشد، آنگاه $G' \subseteq \ker\lambda$ و لذا $\hat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(\frac{G}{G'})$ که در آن $\hat{\lambda} : \frac{G}{G'} \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\hat{\lambda}(G'g) = \lambda(g)$ می‌باشد. از اینرو،

$$\{\hat{\lambda} \in Irr(\frac{G}{G'}) \mid \lambda \in Lin(G)\} \subseteq Irr(\frac{G}{G'}).$$

بنابراین

$$Irr(\frac{G}{G'}) = \{\hat{\lambda} \in Irr(\frac{G}{G'}) \mid \lambda \in Lin(G)\},$$

و لذا

$$G' = \bigcap_{\hat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(\frac{G}{G'})} \ker\hat{\lambda} = \bigcap_{\lambda \in Lin(G)} \ker\lambda.$$

□

قضیه ۱۲.۱.۲. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در اینصورت*

$$|\mathrm{Lin}(G)| = |G : G'|.$$

برهان. می‌دانیم تعداد کاراکترهای تحویل ناپذیر $\frac{G}{G'}$ برابر است با تعداد کلاسهای تزویج $\frac{G}{G'}$ و آن نیز برابر است با مرتبه‌ی $\frac{G}{G'}$ زیرا $\frac{G}{G'}$ آبلی است. از طرف دیگر داریم:

$$\mathrm{Irr}(\frac{G}{G'}) = \{\hat{\lambda} \in Irr(\frac{G}{G'}) \ | \ \lambda \in Lin(G)\},$$

که در آن $G \longrightarrow \frac{G}{G'} : \hat{\lambda}$ با ضابطه‌ی $\hat{\lambda}(G'g) = \lambda(g)$ است.لذا تعداد کاراکترهای تحویل ناپذیر $\frac{G}{G'}$ برابر است با تعداد کاراکترهای خطی G. بنابراین

$$|\mathrm{Lin}(G)| = |\mathrm{Irr}(\frac{G}{G'})| = |\frac{G}{G'}| = |G : G'|.$$

□

لم ۱۳.۱.۲. *فرض کنیم X نمایش پیشنهاد دهنده‌ی کاراکتر χ از گروه متناهی G و $g \in G$. همچنین فرض کنیم $n = o(g)$. در اینصورت $\epsilon_1, ..., \epsilon_f \in \mathbb{C}$ موجودند به طوری که $f = \chi(1)$ و به ازای هر $1 \le i \le f$، $\epsilon_i^n = 1$ و $\chi(g) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_n$.*

برهان. رجوع شود به لم ۲.۱۵ از مرجع [4]. □

تعریف ۱۴.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $H \leqslant G$. در اینصورت اگر $\chi \in Char(G)$، آنگاه تحدید χ به H را با χ_H نشان می‌دهیم و به آسانی ثابت می‌شود که $\chi_H \in Char(H)$.

تعریف ۱۵.۱.۲. فرض کنیم G گروه متناهی باشد. تابع $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع کلاسی روی G گوییم هرگاه به ازای هر $g, h \in G$، $\phi(h^{-1}gh) = \phi(g)$.

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض کنیم H زیرگروهی از گروه متناهی G، و ϕ یک تابع کلاسی روی H باشد. در اینصورت تابع کلاسی القا شده توسط ϕ روی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر $g \in G$،

$$\phi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x \in G} \phi^0(xgx^{-1}),$$