بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش های عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استادان راهنما

دکتر داود رستمی و دکتر سعید عباسبندی

پژوهشگر

سمیه همتی

بهمن ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: همتی نام: سمیه

عنوان: روش های عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استادان راهنما: دکتر داود رستمی و دکتر سعید عباسبندی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه بین‌المللی امام خمینی دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۳

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، روش عناصر متناهی، مشتق کسری ریمان-لیوویل، مثال‌های عددی.

چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری،بخصوص معادلات دیفرانسیل جزئی کسری کاربردهای زیادی در زمینه‌هایی مانند پردازش انتشار،الکترومغناطیس، الکتروشیمی و علم مواد دارند.در این پایان نامه روش عناصر متناهی را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمان در نظر می‌گیریم.وجود و یکتایی جواب با استفاده از لم لکس-میلگرام اثبات می‌شود.یک روش گام زمانی مبنی بر یک قاعده انتگرال گیری معرفی می‌شود.روش تمام گسسته با استفاده از روش عناصر متناهی مطرح می‌شود و تخمین خطای همگرایی مرتبه بهینه فراهم می‌شود.مثال‌های عددی در انتهای این پایان نامه نشان می‌دهد نتایج عملی با نتایج تئوری ما سازگارند.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش های عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استادان راهنما

دکتر داود رستمی و دکتر سعید عباسبندی

پژوهشگر

سمیه همتی

بهمن ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: همتی نام: سمیه

عنوان: روش های عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استادان راهنما: دکتر داود رستمی و دکتر سعید عباسبندی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه بین‌المللی امام خمینی دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۳

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، روش عناصر متناهی، مشتق کسری ریمان-لیوویل، مثال‌های عددی.

چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری،بخصوص معادلات دیفرانسیل جزئی کسری کاربردهای زیادی در زمینه‌هایی مانند پردازش انتشار،الکترومغناطیس، الکتروشیمی و علم مواد دارند.در این پایان نامه روش عناصر متناهی را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمان در نظر می‌گیریم.وجود و یکتایی جواب با استفاده از لم لکس-میلگرام اثبات می‌شود.یک روش گام زمانی مبنی بر یک قاعده انتگرال گیری معرفی می‌شود.روش تمام گسسته با استفاده از روش عناصر متناهی مطرح می‌شود و تخمین خطای همگرایی مرتبه بهینه فراهم می‌شود.مثال‌های عددی در انتهای این پایان نامه نشان می‌دهد نتایج عملی با نتایج تئوری ما سازگارند.

تقدیم به

پدر و مادرم

با سپاس بی پایان

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان راهنمای خود، جناب آقای دکتر داود رستمی و جناب آقای دکتر سعید عباس‌بندی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهر و برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه همتی

بهمن ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری، بخصوص معادلات دیفرانسیل جزئی کسری کاربردهای زیادی در زمینه‌هایی مانند پردازش انتشار، الکترومغناطیس، الکتروشیمی و علم مواد دارند. در این پایان نامه روش عناصر متناهی را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمان در نظر گرفته‌ایم. وجود و یکتایی جواب با استفاده از لم لکس-میلگرام اثبات و یک روش گام زمانی مبنی بر یک قاعده انتگرال گیری معرفی می‌شود. روش تمام‌گسسته با استفاده از روش عناصر متناهی مطرح و تخمین خطای همگرایی مرتبه بهینه فراهم می‌شود. مثال‌های عددی در انتهای این پایان‌نامه نشان می‌دهد که نتایج عملی با نتایج تئوری ما سازگارند.

کلمات کلیدی : معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، روش‌های عناصر متناهی، مشتق کسری ریمان-لیوویل.

مقدمه

همواره در علوم مختلف با معادلاتی رو به رو هستیم که در بسیاری از موارد یافتن جواب تحلیلی آن‌ها پیچیده و گاهی حتی غیرممکن است لذا در این موارد سعی می‌شود که با استفاده از روش‌های عددی مناسب تقریب نزدیکی از جواب واقعی را به دست آوریم.

در بسیاری از علوم می‌توان مسائل را توسط مدل‌های ریاضی شبیه‌سازی نمود، این مدل‌ها در اکثر موارد شامل عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی هستند.

در بسیاری از مسائل، یافتن جواب تحلیلی فرایندی پیچیده را به دنبال دارد و در برخی از مسائل یافتن جواب تحلیلی عملا غیرممکن است به همین دلیل فراهم نمودن روش‌های عددی برای تقریب زدن جواب مسائل یکی از ملزومات استفاده از مدل‌های ریاضی است. در این میان روش‌های عناصر متناهی یکی از روش‌های اساسی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیلی و معادلات انتگرالی می‌باشد.

معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمان کاربردهای زیادی در فرایندهای انتشار [۱] ، الکترومغناطیس، الکتروشیمی، علم مواد و ... دارند که می‌توانید آن را در مراجع [۲] ،[۳] ، [۴] ، [۵] ، [۸] ، [۱۸] ببینید.

لی [۲] در [۶] روش تفاضل متناهی را روی دو فضای مکان و زمان پیاده‌سازی کرد و آنالیز شرایط پایداری را بیان نمود.

جواب تحلیلی از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمان با استفاده از توابع گرین یا تبدیلات لاپلاس و فوریه در [۷] ، [۹] ، [۲۳] ، [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

لین [۳] و اکسو [۴] در [۲۷]، روش تفاضل متناهی را برای متغیر زمان و روش طیفی را برای متغیر مکان مطرح کردند.

سان [۵] و وو [۶] در [۲۸]، روش تفاضل متناهی را برای حل معادله انتشار گرما کسری پیشنهاد نمودند.

اساس کار این پایان‌نامه مرجع [۱۷] می‌باشد، که روش عناصر متناهی را برای حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری زمان زیر در نظر گرفته‌ایم:

---

[۱] Diffusion processes
[۲] Liu
[۳] Lin
[۴] Xu
[۵] Sun
[۶] Wu

$$\begin{cases} {}^{R}_{\cdot}D^{\alpha}_{t}u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & t \in [\cdot, T] \quad x \in \Omega, \\ u(\cdot, x) = \cdot & x \in \Omega, \\ u(t,x) = \cdot & t \in [\cdot, T] \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

که در آن $\cdot < \alpha < 1$ ، $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ اپراتور لاپلاس نسبت به متغیر x و ${}^{R}_{\cdot}D^{\alpha}_{t}$ مشتق چپ ریمان-لیوویل نسبت به متغیر زمان تعریف می‌شود.

فصل ۱
تعاریف و قضایای مهم

۱.۱ تاریخچه‌ای مختصر از حساب دیفرانسیل کسری

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری زمینه‌ای از مطالعات ریاضی است که از تعاریف اولیه از عملگرهای مشتق و انتگرال حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی به وجود آمده است. مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری جدید نیست، در سال ۱۶۹۵ هوسپیتال [۱]سوالی درباره معنی $\frac{d^ny}{dx^n}$ برای $n = \frac{۱}{۲}$ پرسید، آن سوال این بود که "اگر n کسری باشد چه می‌شود" لایبنیز [۲] پاسخ داد که "$d^{۱/۲}x$معادل است با $x\sqrt{dx : x}$" عموما واضح است که مشتق و انتگرال مرتبه صحیح تعابیر فیزیکی وهندسی آشکاری دارند، با این حال در مورد انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه کسری چنین نیست، چون ظهور ایده مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه تعبیر هندسی و فیزیکی قابل قبولی برای بیش از ۳۰۰ سال نداشت. تعبیر هندسی انتگرال‌گیری کسری «سایه‌های روی دیوار» است و تعبیر فیزیکی آن «سایه‌های پس دیوار» است.

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل کسری بوسیله بسیاری از مولفان بررسی شده‌است. راواشده [۳] روش اسپلاین هم‌محلی را برای تقریب جواب معادلات کسری استفاده کرد. مومانی [۴] وجود و یکتایی جواب معادله انتگرو-دیفرانسیل را بدست آورد.

ریاضیدانان زیادی آزمایشاتی در مورد حساب دیفرانسیل کسری انجام دادند که از آن جمله می‌توان به فوریه [۵] و اویلر [۶] و لاپلاس [۷] اشاره کرد.

این ریاضی‌دانان از تعاریف و روش‌های شخصی که مفهومی از یک مرتبه انتگرال یا مشتق بود استفاده کردند،

[۱] L'Hospital
[۲] Leibniz
[۳] Rawasheh
[۴] Momani
[۵] Fourier
[۶] Euler
[۷] Laplace

که تعاریف رایج مشهوری از ریمان -لیوویل و گرانوالد-لتنیکوف وجود دارد.
پدلوبنی [۸] در [۹] کاربردهای بی‌شماری از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری از سیستم‌های دینامیکی در تئوری کنترل را مورد توجه قرار داد، به‌طوری که در فرکانس مدار الکتریکی، تقسیم کننده کلی ولتاژ، ویسکوالاستیک الکتروشیمی، اثر شار سیال، مدل بیولوژیکی سیستم‌های عصبی و الکترومغناطیس از مراتب کسری چندگانه استفاده می‌شود. لاکرویس [۹] اولین کسی بود که در دو صفحه از کتاب ۷۰۰ صفحه‌ای در ۱۸۱۹ به مشتق از مرتبه دلخواه اشاره کرد [۱۹]. او برای $y = x^a$ ، $a \in R_+$ نشان داد که:

$$\frac{d^{۱/۲}y}{dx^{۱/۲}} = \frac{\Gamma(a+۱)}{\Gamma(a+۱/۲)}x^{a-\frac{۱}{۲}}$$

به ویژه $۲\sqrt{\frac{x}{\pi}} = (\frac{d}{dx})^{۱/۲}x$ فوریه در سال ۱۸۲۲ یک نمایش انتگرال برای $f(x)$ بدست آورد.

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_R f(\alpha)d\alpha \int_R cosP(x-\alpha)dP$$

و مدل مشتق را بدست آورد:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_R f(\alpha)d\alpha \int_R P^\nu cos\{P(x-\alpha)+\frac{\nu\pi}{۲}\}dP$$

که ν به عنوان هر کمیت دلخواه، مثبت یا منفی، در نظر گرفته می‌شود.
عموما اظهار می‌شود که آبل [۱۰] در سال ۱۸۲۳ معادله انتگرال از مساله خم کوتاه‌ترین زمان، را حل کرد. یعنی

$$\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{x}\frac{g(u)}{(x-u)^{۱-\alpha}}du = f(x) \qquad ۰<\alpha<۱$$

با جواب

$$g(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{۰}^{x}\frac{f(u)}{(x-u)^\alpha}du$$

و لوتزن [۱۱] نشان داد، آبل هرگز مساله را با حساب دیفرانسیل و انتگرال حل نکرد بلکه صرفا نشان داد جواب چگونه می‌تواند به صورت یک مشتق کسری نوشته شود. جزف لیوویل [۱۲] با الهام از آبل معادله انتگرال مذکور را در سال ۱۸۳۲ حل کرد.
شاید اولین تلاش جدی برای ارائه یک تعریف منطقی از یک مشتق کسری بوسیله لیوویل انجام شد. او در سال های بین ۱۸۳۲ تا ۱۸۳۷ ، ۹ مقاله منتشر کرد. آخرین آنها در این زمینه در سال ۱۸۵۵ بود. آنها از کار لیوویل بر روی الکترومغناطیس به وجود آمدند. کارهای بیشتری از افرادی چون: جورج پیکوک [۱۳] (۱۸۳۳) ، گرگوری [۱۴] (۱۸۴۱) ، آگوستوس دمورگان [۱۵] (۱۸۴۲) ، کلاند [۱۶] (۱۸۴۶) و ویلیام‌سنتز [۱۷]

[۸] Podlubny
[۹] Lacroix
[۱۰] Abel
[۱۱] J.Lutzen
[۱۲] Louville
[۱۳] George Peacok
[۱۴] D.F.Gregory
[۱۵] Augustusde Morgan

(۱۸۴۸) وجود دارد.

لیوویل در سال ۱۸۳۲ با نتیجه معروف $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ شروع کرد به طوری‌که $D = \dfrac{d}{dx}$، $n \in N$ و آن را ابتدا به حالت خاص $\nu = \dfrac{۱}{۲}$، $a = ۲$ سپس بوسیله

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

به مرتبه دلخواه $\nu \in R_+$ گسترش داد. او نمایش سری‌ها برای $f(x)$ را به صورت $f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ در نظر گرفت و بوسیله

$$D^\nu f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} c_k a_k^\nu e^{a_k x}$$

مشتق از مرتبه دلخواه ν را تعریف کرد. در حالی که این شیوه اول لیوویل بود. روش دوم او برای تابع معلوم x^{-a} به کار رفت. او انتگرال $I = \int_۰^\infty u^{a-۱} e^{-xu} du$ را در نظر گرفت. با جاگذاری $xu = t$ نتیجه گرفت $I = x^{-a} \int_۰^\infty t^{a-۱} e^{-t} dt = x^{-a}\Gamma(a)$ برای $Re\ a > ۰$. با اعمال D^ν بر دو طرف معادله $x^{-a} = \dfrac{I}{\Gamma(a)}$ و با استفاده از $D^\nu(e^{-xu}) = (-۱)^\nu u^\nu e^{-xu}$ بدست آورد:

$$D^\nu x^{-a} = (-۱)^\nu \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}$$

لیوویل در بررسی مقاله‌اش از نظریه پتانسیل استفاده کرد.

چون معادله دیفرانسیل معمولی $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ از مرتبه nام جواب تکمیلی (عمومی) به صورت $y = c_۰ + c_۱ x + ... + c_{n-۱} x^{n-۱}$ دارد، لیوویل گمان کرد که معادله مرتبه کسری $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = ۰$ ، $\alpha \in R_+$ نیز باید یک جواب تکمیلی متناظر متناسب داشته باشد. در این رابطه ریمان یک $\psi(x)$ به عنوان تابع تکمیلی اضافه کرد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به طور متمرکز از سال ۱۹۷۴ وقتی که اولین کنفرانس بین المللی در این زمینه برگزار شد، گسترش یافت. این کنفرانس بوسیله برترام راس [۱۸] سازماندهی شد و در دانشگاه نیوهافن [۱۹] برگزار شد. تعداد شرکت کنندگان آن ۹۴ ریاضی دان بودند. در دوره زمانی سال ۱۹۷۵ تاکنون ۶۰۰ مقاله در رابطه با حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری منتشر شده‌است.

[۱۶] P.Kelland
[۱۷] Willam Center
[۱۸] BertramRoss
[۱۹] NewHaven

۲.۱ انواع مشتق وانتگرال‌گیری کسری

۱.۲.۱ مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف

تابع$f(t) \in \mathcal{C}[a,b]$ را در نظر می‌گیریم مشتق مرتبه اول تابع $f(t)$به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{(۱)}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{۱.۱}$$

اگر تعریف بالا را دوبار به کار ببریم، داریم:

$$f^{(۲)}(t) = \frac{d^۲ f}{dt^۲} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(t) - ۲f(t-h) + f(t-۲h)}{h^۲} \tag{۲.۱}$$

به کمک استقرا بدست می‌آوریم:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \to ۰} \frac{۱}{h^n} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{۳.۱}$$

که در اینجا:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)}{r!} \tag{۴.۱}$$

مشتق از مرتبه n در (۳.۱) حالت خاصی از عبارت عمومی زیر است که در آن p یک عدد حقیقی دلخواه است:

$$f_h^{(p)}(t) = {}_aD_t^p f(t) = \frac{۱}{h^p} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{۵.۱}$$

که در رابطه فوق $f_h^{(p)}(t)$ را با نماد ${}_aD_t^p f(t)$ مشخص می‌کنیم که عملگر خاص اعمال شده بر تابع $f(t)$ را مشخص‌می‌کند t و a به ترتیب حدود بالا و پایین مربوط به عملگر ${}_aD_t^p f(t)$ هستند. حال مشتق از مرتبه α گرانوالد- لتنیکوف [۲۰] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{h \to ۰} \frac{۱}{h^p} \sum_{m=۰}^{n} (-۱)^m \binom{\alpha}{m} f(t - mh) \tag{۶.۱}$$

که در اینجا:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-۱)\cdots(\alpha-m+۱)}{m!}$$

و $n = \frac{t-a}{h}$ و $\alpha \leqslant n$ می‌باشد معادله (۶.۱) مشتق گرانوالد-لتنیکوف نامیده می‌شود.

[۲۰] Grunwald-Letnikov

اگر در رابطه (۶.۱) ، α را با $-\alpha$ جایگزین کنیم چنین خواهیم داشت:

$$ {}_aD_x^{-\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \binom{-\alpha}{m} f(t-mh) \tag{7.1}$$

که در آن

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ m\end{bmatrix} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)}{m!}$$

$$\binom{-\alpha}{m} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-m+1)}{m!} = (-1)^m \begin{bmatrix}\alpha\\ m\end{bmatrix} \qquad \alpha > 0 \tag{8.1}$$

تعریف می‌شود. رابطه (۷.۱) انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف نامیده می‌شود. با محاسبه حدود (۶.۱) ، (۷.۱) رابطه زیر را داریم:

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{9.1}$$

که مشتق از مرتبه دلخواه تعریف می‌شود. در فرمول بالا $f^{(k)}(a)$ها برای $(k=1,...,m+1)$ در فاصله $[a,t]$ پیوسته فرض شده‌اند. همچنین $m\in\mathcal{N}$، $m<\alpha<m+1$ می‌باشد و در حالت کلی $\alpha=p$ داریم:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{-p}{r} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{(1-p)}}d\tau \tag{10.1}$$

و فرمول بالا انتگرال از مرتبه دلخواه تعریف می‌شود.

۲.۲.۱ حساب کسری ریمان-لیوویل

تعریف ۱.۲.۱. اپراتور انتگرال چپ کسری ریمان-لیوویل [۲۱] از مرتبه $\alpha > 0$ روی تابع $f(t)$ که $f\in\mathcal{C}[a,b]$ می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_a^RD_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \qquad \alpha>0, t>a \tag{11.1}$$

و انتگرال راست کسری ریمان-لیوویل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_t^RD_b^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \qquad \alpha>0, t<b. \tag{12.1}$$

برخی خواص مهم انتگرال ریمان-لیوویل عبارتند از:

[۲۱] Reimann-louville