

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

کارشناسی ارشد فیزیک (گرایش اتمی و مولکولی)

مطالعه‌ی نظری اختلاف کوانتومی در زنجیره‌های اسپینی

استاد راهنما :

دکتر مهدی میرزایی

پژوهشگر :

فرشته عبدلی

زمستان ۹۲

خدای من! آن گاه که می خوانمت صدای مرا شنو به من نگاه کن وقتی که با تو راز و نیاز می کنم

معبود من!

از خشم توبه پونا می برم و از کین تو باز به آغوش تومی گیرم

خدایا مرا به آنچه دارم راضی کن

تا کوچکی آنچه ندارم آراشم را بر هم نند

خدایا اگر مرا به جرم بگیری تو را به عفو می گیرم

اگر مرا به گناه بگیری تو را به آمرزش می گیرم

و اگر مرا به دوزخبری اهل آتش را آگاه خواهم ساخت

که من تو را دوست دارم...

این پیمان نامه رابه اعتبار بی بازگشت ترین سخات زندکیم که در کسوت مقدس دانش آموزی گذشته

است تقدیم می کنم به زیباترین بهانه هایم برای زیستن؛ پر محنت ترین واژه های خلقت؛

پدر دلسوز و بزرگوایم و

مادر صبور و مهربانم


دو تندیس پر شکوه مهر و دو فرشته بی همتا؛

که در وجودشان تجلی عظیم آفریدگار بر تومی افکنند و عظمت و ذاکاری ایشان شکوه کوه

رابه زنجیر سخات می کشاند؛ و مهر کردون از فروغ جاودانشان نور می گیرد.

تقدیم به برادر عزیزم

به پاس مهربانی هایش...

A large pink flower with many petals is in a white ceramic vase. The vase sits on a light-colored bamboo tray. The background is a soft, out-of-focus white.

خداوند منان را شاکریم که ما را توفیق داد که در مسیر علم و دانش گامی هر چند کوچک برداریم، تا بدین وسیله به ناشناخته‌های خود پی ببریم. این مسیر، میسر نمی‌شود مگر به لطف معلمی دلسوز که چراغ راه پر حادثه علم شود.

از استاد صبور و مهربانم، جناب آقای دکتر مهدی میرزایی که در کمال سعی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم، از خدای بزرگ و مهربان برای ایشان و خانواده‌ی محترمشان آرزوی سلامتی و شادکامی دارم.

و همچنین از، جناب آقای دکتر اسماعیل نادری به پاس کمک‌های بی دریغ و یاری خالصانه‌شان و راهنمایی‌های با ارزش و صحبت‌های گرانبهایشان سپاسگزارم، و از خداوند متعال آرزوی تندرستی و بهروزی برای ایشان و خانواده‌ی محترمشان دارم.

مطالعه نظری اختلاف کوانتومی در زنجیره‌های اسپینی

فرشته عبدلی

هدف از انجام این تحقیق مطالعه‌ی نظری اختلاف کوانتومی در زنجیره‌های اسپینی است. در فصل اول ابتدا به بیان مقدمه و مفاهیم و تعاریف بنیادی و بررسی روابط مربوط به هم‌بستگی، اطلاعات متقابل و آنتروپی و بررسی روابط مربوط به تصویرگرها و جنبه‌ی کلاسیکی هم‌بستگی کوانتومی و بررسی شرایط هم‌بستگی کلاسیکی می‌پردازیم. در فصل دوم روابط اختلاف کوانتومی، ماتریس چگالی حالت ایکس و اندازه‌گیری‌های بهینه برای اختلاف کوانتومی $D_A(X)$ و $\tilde{D}_A(X)$ از یک حالت X حقیقی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم با استفاده از رهیافت دیسکورد کوانتومی به بررسی مدلی شامل برهم‌کنش هایزنبرگ دو اسپین در حضور میدان کوانتیزه تحت تقریب موج دوار می‌پردازیم. هم‌چنین به بررسی اثر برهم‌کنشی DM بر زنجیره‌ی اسپینی XXZ خواهیم پرداخت. در این راستا ضمن بررسی شرایطی که ذکر خواهیم کرد در محاسبه‌ی دیسکورد کوانتومی عملگر اندازه‌گیری بهینه را محاسبه کرده و به محاسبه‌ی اختلاف کوانتومی در زنجیره‌های مختلف و بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازیم و نمودار اختلاف کوانتومی را به صورت مجزا برای هر حالت رسم می‌کنیم.

عنوان.....	صفحه.....
چکیده.....	أ.....
فهرست.....	ب.....

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه و تعاریف اولیه

۱-۱- مقدمه، بررسی مفاهیم و تعاریف بنیادی.....	۲.....
۱-۲- بررسی روابط مربوط به همبستگی، اطلاعات متقابل و آنتروپی.....	۵.....
۱-۳- بررسی روابط مربوط به تصویرگرها.....	۶.....
۱-۴- جنبه‌ی کلاسیکی همبستگی کوانتومی.....
	۸

۱-۵- بررسی شرایط همبستگی کلاسیکی.....	۱۳.....
---------------------------------------	---------

فصل دوم: معرفی حالت‌های ایکس دو کیوبیتی و آنتروپی

۱-۲- مقدمه.....	۲۰.....
۲-۲- بررسی روابط مربوط به اختلاف کوانتومی.....	۲۰.....
۲-۳- بررسی ماتریس چگالی حالت ایکس.....	۲۱.....
۲-۴- بررسی روابط مربوط به آنتروپی.....	۲۴.....
۲-۵- محاسبات مربوط به اختلاف کوانتومی و اطلاعات متقابل.....	۲۶.....
۲-۶- اندازه‌گیری‌های بهینه برای اختلاف کوانتومی $D_A(X)$ و $\tilde{D}_A(X)$ از یک حالت X حقیقی.....	۳۴.....

فصل سوم : بحث و نتیجه گیری

- ۳-۱- مقدمه ۴۳
- ۳-۲- بررسی اثر برهم کنشی DM ۴۳
- ۳-۳- زنجیره‌ی اسپینی xxz هایزبرگ با برهم کنش DM ۴۴
- ۳-۴- بررسی روابط مربوط به محاسبات اختلاف کوانتومی ۴۵
- ۳-۵- بررسی حالت‌های مختلف اختلاف کوانتومی ۶۳

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: اختلاف حالت‌های معلوم در معادله‌ی (۱-۳-۹) با پایه‌های اندازه‌گیری مشخص ۸
- شکل ۱-۲: بررسی حالت‌های جداپذیر و جداناپذیر ۹
- شکل ۱-۳: نمایش هم‌بستگی برای دو حالت بل ۱۵
- شکل ۱-۴: نمایش هم‌بستگی برای حالت ورنر ۱۶
- شکل ۱-۵: نمایش اطلاعات متقابل و هم‌بستگی برای حالت جداپذیر ۱۷
- شکل ۲-۱: نمودار اختلاف کوانتومی و هم‌بستگی کلاسیکی و تلاقی ۲۸
- شکل ۲-۲: نمودار اختلاف کوانتومی و هم‌بستگی کلاسیکی ۲۹
- شکل ۲-۳: تلاقی، اختلاف کوانتومی و هم‌بستگی کلاسیکی برای حالت ورنر ۳۱
- شکل ۲-۴: نمودار اختلاف کوانتومی و هم‌بستگی کلاسیکی ۳۲
- شکل ۳-۱: بررسی شرط اول برای ماتریس چگالی رابطه‌ی (۳-۴-۵) به ازای مقادیر $\theta = 0, \beta = 1/2, J = 1, \Delta = 0.3$ ۴۸

شکل ۳-۲: بررسی شرط دوم برای ماتریس چگالی رابطه‌ی (۳-۴-۵) به ازای مقادیر

۴۹..... $\Delta = 0.3, J = 1, \beta = \frac{1}{2}, \theta = 0$

شکل ۳-۳: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های ۵ تا ۵ $D=0-5, B=-5$ و پارامترهای $J=1$

۵۴ $\Delta=0.3, \theta=\arctan(D/J), \beta = \frac{1}{0.2} = 5$

شکل ۳-۴: نمودار درهم‌تنیدگی برحسب برهم‌کنش D و میدان مغناطیسی همگن B به ازای

۵۵..... مقادیر $J=1, T=0.2, \Delta=0.3$

شکل ۳-۵: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های ۵ تا ۵ $D=0-5, B=-5$ و پارامترهای $J=1$

۵۶..... $\Delta=0.3, \theta=\arctan(D/J), \beta=1/25$

شکل ۳-۶: نمودار درهم‌تنیدگی با داده‌های ۵ تا ۵ $D=0-4, B=-5$ و پارامترهای $J=1, \Delta=0.3$ ،

۵۶..... $T=0.8$

شکل ۳-۷: نمودار اختلاف کوانتومی با پارامترهای $J=1, \beta=5, \theta=\arctan(D/J)$

۵۷..... $B=2$

شکل ۳-۸: نمودار درهم‌تنیدگی با داده‌های $J=1, B=2, T=0.2$

شکل ۳-۹: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های ۵ تا ۵ $D=0-5, B=-5$ و پارامترهای $J=1$

۵۹..... $\Delta=0.3, \theta=\arctan(D/J), \beta=0.5$

شکل ۳-۱۰: نمودار درهم‌تنیدگی بر حسب ثابت کوبلاژ Ω

شکل ۳-۱۱: نمودار درهم‌تنیدگی بر حسب ثابت کوبلاژ Ω

شکل ۳-۱۲: نمودار درهم‌تنیدگی بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای شرایط مختلف $J_z \leq J$

شکل ۳-۱۳: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz آنتی فرومغناطیسی Δ بر حسب ثابت کوبلاژ

۶۷ $J = 0, J_z = 1$ به ازای Ω

شکل ۳-۱۴: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz آنتی فرومغناطیس Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = 0.001, J_z = 1$ ۶۷

شکل ۳-۱۵: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz آنتی فرومغناطیس Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = 0.3, J_z = 1$ ۶۸

شکل ۳-۱۶: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz آنتی فرومغناطیس Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = J_z = 1$ ۶۸

شکل ۳-۱۷: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz آنتی فرومغناطیس Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = 1, J_z = 0$ ۶۹

شکل ۳-۱۸: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz فرومغناطیس دوکیوبیتی Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = J_z = -1$ ۶۹

شکل ۳-۱۹: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz فرومغناطیس دوکیوبیتی Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = -1, J_z = 0$ ۷۰

شکل ۳-۲۰: نمودار بررسی درهم‌تنیدگی مدل xxz فرومغناطیس دوکیوبیتی Δ بر حسب ثابت کوبلاژ Ω به ازای $J = 0, J_z = -1$ ۷۰

شکل ۳-۲۱: نمودار بررسی شرط اول برای ماتریس چگالی در رابطه‌ی (۳-۵-۲۲) برای Δ در بازه ۱- تا ۱ ۷۵

شکل ۳-۲۲: نمودار بررسی شرط دوم برای ماتریس چگالی در رابطه‌ی (۳-۵-۲۲) برای Δ در بازه ۱- تا ۱ ۷۶

شکل ۳-۲۳: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های ۱ تا $\Delta = -1$ و پارامترهای $J = -1$ ۸۱

..... $t=0.2, v=0.5, j_z=0.8, n=1$ ۸۱

شکل ۳-۲۴: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های ۱ تا $\Delta = -1$ و پارامترهای $J = -1, t=0.2, v=0.5$ ۸۱

..... $j_z=0.8, n=1-10$ ۸۱

شکل ۳-۲۵: نمودار اختلاف کوانتومی با داده‌های 1 تا $\Delta = 0$ و پارامترهای $J = -1$	۸۲
..... $t=0.2, v=0.5, j_z=0.8, n=1-10$	
شکل ۳-۲۶: نمودار بررسی شرط اول برای ماتریس چگالی در رابطه‌ی (۳-۵-۷)	
به ازای $B=3, t=0.6, J=1, J_z=1$	۸۶
شکل ۳-۲۷: نمودار بررسی شرط دوم برای ماتریس چگالی در رابطه‌ی (۳-۵-۷)	
به ازای $B=3, t=0.6, J=1, J_z=1$	۸۷
شکل ۳-۲۸: نمودار اختلاف کوانتومی به ازای مقادیر $J=0-5$ و $\theta=0-3\pi$	۹۱
شکل ۳-۲۹: نمودار بررسی رابطه‌ی (۳-۵-۱۴) به ازای مقادیر	
..... $\Delta=0.11, \beta=5, J_x=1, J_y=0.8, J_z=1.2, J=1.8$	۹۵
شکل ۳-۳۰: نمودار بررسی رابطه‌ی (۳-۵-۱۶) به ازای مقادیر	
..... $\Delta=0.11, \beta=5, J_x=1, J_y=0.8, J_z=1.2, J=1.8$	۹۶
شکل ۳-۳۱: نمودار بررسی رابطه‌ی (۳-۵-۲۶) به ازای مقادیر	
..... $\Delta=0.11, \beta=5, J_x=1, J_y=0.8, J_z=1.2, J=1.8$	۱۰۱
نتیجه گیری.....	۱۰۱
منابع.....	۱۰۳

فصل اول

مقدمه و تعاریف اولیه

۱-۱ در ابتدا به بررسی مفاهیم و تعاریف بنیادی می‌پردازیم.

هم‌بستگی: دو نوع هم‌بستگی داریم، هم‌بستگی کلاسیکی و هم‌بستگی کوانتومی، هم‌بستگی کلاسیکی می‌تواند به عنوان اطلاعات به دست آمده درباره یک زیر سیستم باشد اگر اندازه‌گیری بر روی دیگری انجام پذیرد ولی در هم‌بستگی کوانتومی اگر اندازه‌گیری روی سیستم انجام شود این اندازه‌گیری سیستم کوانتومی را مختل می‌کند.

درهم‌تنیدگی: اگر دو ذره یا سیستم، که در ابتدا با هم برهم‌کنش داشته اند از هم جدا شوند، اندازه‌گیری روی یکی از این ذرات، حالت و وضعیت ذره‌ی دوم را هر چه قدر هم دور باشد مشخص می‌کند.

اختلاف کوانتومی یا ناهم‌خوانی کوانتومی^۱: معیاری برای هم‌بستگی کوانتومی است. اگر از هم‌بستگی کلی، هم‌بستگی کلاسیکی را کم کنیم این اختلاف صرفاً هم‌بستگی کوانتومی است. در واقع باید اشاره کرد که تا کنون کمیت‌های مختلفی به عنوان معیار تشخیص هم‌بستگی کوانتومی پیشنهاد شده است و اختلاف کوانتومی مناسب‌تر از بقیه می‌باشد. ارسال کوانتومی: فرایندی است که طی آن اطلاعات مورد نظر از مکانی به مکان دیگر با استفاده از یک کانال کوانتومی منتقل می‌شود بدون این‌که در این میان ماده یا جسمی جا به جا شود. در ابتدا تصور این بود که درهم‌تنیدگی معیاری برای تشخیص هم‌بستگی کوانتومی است ولی در ادامه مشخص شد که عدم وجود درهم‌تنیدگی به معنی عدم هم‌بستگی کوانتومی نیست. ناهم‌دوسی: از برهم‌کنش با محیط ایجاد می‌شود و شامل تخریب هم‌دوسی کوانتومی بین حالت‌های مرتبط مورد نظر با نمایش مشاهده پذیرها است. هم‌دوسی: هم‌بستگی فازی بین دو یا چند موج است.

^۱Quantum discord

موقعیت‌های اشاره‌گر: مانند پایه‌های فضا تحت هر شرایطی ثابت هستند، با وجود این که با محیط برهم‌کنش دارند اما با آن درهم‌تنیده نیستند [۱ و ۲ و ۳].

فرانتخاب^۱ [۴]، شامل قوانینی می‌شوند که معیاری برای کمیت‌های قابل اندازه‌گیری هستند. درهم‌تنیدگی از پدیده‌های شگفت آور و راز آمیز فیزیک کوانتومی است. درهم‌تنیدگی حتی در فواصل دور هم امکان پذیر است و این اثر از راه دور هسته‌ی اصلی بسیاری از فناوری‌های شگرف فیزیک کوانتومی مدرن است. درهم‌تنیدگی کوانتومی نقش مهمی را در فرآیند ارسال اطلاعات کوانتومی ایفا می‌کند.

کشف حالت‌های درهم‌تنیده‌ی کوانتومی و ممانعت مکانیک کوانتومی از کپی برداری [۵] از حالت‌ها، زمینه‌ی مناسبی را برای استفاده از خواص کوانتومی سیستم در تکنولوژی پردازش و ارسال اطلاعات فراهم می‌کند که اولین تلاش‌ها در این راستا با ارائه‌ی پروتکل‌های رمزنگاری [۵] کوانتومی آغاز شد، که استفاده از این روش‌ها امکان گسیل ایمن اطلاعات را بین دو نقطه فراهم می‌کند، یکی از کاربردهای درهم‌تنیدگی کوانتومی استفاده از آن در ارسال کوانتوم است. ارسال کوانتوم فرآیندی است که طی آن اطلاعات مورد نظر از مکانی به مکان دیگر منتقل می‌شود بدون آن که در این میان ماده یا جسمی جا به جا شود. بسیاری از فیزیکدانان مایلند که درهم‌تنیدگی را تولید کنند و آن را کنترل و حتی ذخیره کنند. در ۵۰ سال اخیر پژوهش‌های بسیاری روی تولید و استفاده از درهم‌تنیدگی صورت گرفته است. کریستوف کلاسن^۲ و همکارانش در دانشگاه ژنو توانستند دستگاهی را طراحی کنند که قادر به ذخیره سازی درهم‌تنیدگی و آزاد سازی درهم‌تنیدگی به شکل اولیه اش است [۶].

^۱superselction

^۲Christoph Clausen

دستگاه آن‌ها متشکل از دسته‌ای از اتم‌های نئودیمیوم^۱ است که در بدنه‌ی یک بلور سیلیکات ایتربیوم^۲ جاسازی شده است، این سیستم بعد از سرد شدن می‌تواند فوتون‌ها را جذب و ذخیره کند. این گروه سوئیسی یک زوج فوتون درهم‌تنیده تولید کردند، یکی از آن‌ها را به داخل این سیستم فرستادند تا ذخیره شود، وقتی فوتون جدیدی از این سیستم ساطع شد آن‌ها به روش متعارف، به روش بل^۳ این فوتون و زوج فوتون دیگر را آزمودند و مشاهده کردند که این دو نیز درهم‌تنیده هستند. حالت‌های بل را در ادامه توضیح خواهیم داد. این مشاهده به چندین دلیل مختلف قابل توجه است، نخست این که برای بقای درهم‌تنیدگی لزوماً همه‌ی بدنه‌ی بلور که شیئی به ابعاد تقریبی یک سانتی‌متر است، باید در درهم‌تنیدگی دخیل باشد. مبادله‌ی درهم‌تنیدگی بین فوتون (یک جسم میکروسکوپی) و بلور (یک جسم ماکروسکوپی) امری فوق‌العاده است [۵].

دوم توانایی انتقال درهم‌تنیدگی از یک فوتون متحرک به یک جسم ثابت (بلور) است و با توجه به این که این آزمایش با فوتون‌های طول موج مخابراتی (۱۳۳۸ نانومتری) انجام شده است، نشان داده شده است که درهم‌تنیدگی متحرک با سرعت نور می‌تواند ساکن شود و دوباره به حرکت درآید. نکته‌ی شگفت‌آور این که بشر موفق شده است که درهم‌تنیدگی را ذخیره و تولید کند [۵].

درهم‌تنیدگی پدیده‌ی بسیار گذرا و ناپایدار است و به آسانی در برهم‌کنش ذره و محیط از بین می‌رود.

توانایی ذخیره‌ی این پدیده‌ی کوانتومی می‌تواند در راه‌ی فناوری‌های جدید مانند مخابرات کوانتومی و حتی اینترنت کوانتومی باز کند [۷ و ۸].

^۱ Neodymium

^۲ ytterbium silicate

^۳ Bell test

در ادامه با توجه به مقدمه‌ای که از درهم‌تنیدگی بیان شد، اختلاف کوانتومی را که معیاری از درهم‌تنیدگی است بررسی می‌کنیم.

اختلاف کوانتومی را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم، اما در تمام این حالت‌ها یک وجه اشتراک وجود دارد و آن این است که اختلاف کوانتومی در تمام حالت‌ها مثبت است.

۲-۱ بررسی روابط مربوط به هم‌بستگی، اطلاعات متقابل و آنتروپی

دستگاه کوانتومی A و سیستم S را در نظر می‌گیریم. قبل از اندازه‌گیری، حالت سیستم را به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۹ و ۱۰ و ۱۱]:

$$|\Psi_{S,A}\rangle^P = \sum_i \alpha_i |S_i\rangle |a_i\rangle \quad (1-2-1)$$

هم‌چنین ماتریس چگالی ناشی از برهم‌کنش با محیط به صورت زیر است:

$$\rho_{S,A}^P = |\Psi_{S,A}\rangle^P \langle\Psi_{S,A}|^P \rightarrow \sum_i |\alpha_i|^2 |S_i\rangle \langle S_i| \otimes |a_i\rangle \langle a_i| = \rho_{S,A}^D \quad (2-2-1)$$

که تبدیل یک $\rho_{S,A}^P$ خالص به $\rho_{S,A}^D$ ناهم‌دوس به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\rho_{S,A}^D = \sum_i P_i^A \rho_{S,A}^D P_i^A \quad (3-2-1)$$

P_i^A منطبق با بخش فرانتخاب دستگاه است، که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$P_i^A = |a_i\rangle \langle a_i| \quad (4-2-1)$$

در تئوری اطلاعات کلاسیکی آنتروپی $H(X)$ توصیف‌کننده‌ی بی‌اطلاعی درباره‌ی متغیر تصادفی X است که رابطه‌ی آن چنین است:

$$H(X) = -\sum_x P_X = x \log P_X = x \quad (5-2-1)$$

هم‌بستگی بین دو متغیر تصادفی Y, X توسط اطلاعات متقابل به صورت زیر است:

$$J(X:Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (6-2-1)$$

در رابطه‌ی بالا $H(X|Y) = \sum_y P_Y = y H(X|Y=y)$ آنتروپی مشروط از X با توجه به Y

است [۱۳].

تابع توزیع احتمال به صورت زیر تعریف شده است:

$$P_X = \sum_y P_{X,Y=y} \quad P_Y = \sum_x P_{X=x,Y} \quad (7-2-1)$$

$$P_{X|Y=y} = P_{X,Y=y} / P_{Y=y} \quad (8-2-1)$$

رابطه‌ی (۸-۲-۱) قانون بیز^۱ است. بنابراین اطلاعات متقابل، آنتروپی روی X را وقتی Y مشخص است کاهش می‌دهد. بیان کلاسیکی دیگری برای اطلاعات متقابل به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (10-2-1)$$

آنتروپی وان نیومن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۴]:

$$H(S) = H(\rho_S) = -Tr_S \rho_S \log \rho_S \quad (11-2-1)$$

$$I(S : A) = H(S) + H(A) - H(S, A) \quad (12-2-1)$$

۳-۱ بررسی روابط مربوط به تصویرگرها

روی اندازه‌گیری‌های تعریف شده از A توسط مجموعه‌ای از تصویرگرهای یک بعدی $\{\Pi_j^A\}$ تمرکز می‌کنیم [۴] حالت S با توجه به $\{\Pi_j^A\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_{S|\Pi_j^A} = \Pi_j^A \rho_{S,A} \Pi_j^A / Tr_{S,A} \Pi_j^A \rho_{S,A} \quad (1-3-1)$$

با احتمال $P_j = Tr_{S,A} \Pi_j^A \rho_{S,A}$.

$H(\rho_{S|\Pi_j^A})$ ، اطلاعات از دست رفته درباره‌ی S است. آنتروپی $H(\rho_{S|\Pi_j^A})$ ، با احتمال P_j ،

حاصل آنتروپی مشروط S با توجه به مجموعه‌ی کامل $\{\Pi_j^A\}$ روی A است به طوری که:

$$H(S | \{\Pi_j^A\}) = \sum_j P_j H(\rho_{S|\Pi_j^A}) \quad (2-3-1)$$

که منجر به یک تعمیم کوانتومی به صورت زیر می‌شود:

^۱Bayes rule

$$J(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} = H(S) - H(S|\{\Pi_j^A\}) \quad (3-3-1)$$

این کمیت نشان دهنده‌ی اطلاعات سودمندی درباره‌ی سیستم S، با توجه به اندازه‌گیری‌های

$\{\Pi_j^A\}$ است. اختلاف کوانتومی را با توجه به روابط قبل به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} = I(S:A) - J(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} = H(A) - H(S,A) + H(S|\{\Pi_j^A\}) \quad (4-3-1)$$

اختلاف کوانتومی تحت تبدیل $S \rightarrow A$ نامتقارن است به طوری که آنتروپی مشروط به صورت

رابطه‌ی (5-3-1) است، که شامل اندازه‌گیری روی یک طرف است و به ناظر اجازه می‌دهد

حالت S را حدس بزند. این نمونه شامل افزایش آنتروپی است. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$H(S|\{\Pi_j^A\}) \geq H(S,A) - H(A) \quad (5-3-1)$$

و برای هر اندازه‌گیری روی $\{\Pi_j^A\}$ داریم:

$$\delta(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} \geq 0 \quad (6-3-1)$$

مجموعه‌ی $\{\Pi_j^A\}$ اختلاف یک $\rho_{(S,A)}$ معین را به حداقل می‌رساند.

$$\rho_{(S,A)} = \sum_j \Pi_j^A \rho_{(S,A)} \Pi_j^A \Rightarrow \delta(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} = 0 \quad (7-3-1)$$

بنابراین اختلاف صفر می‌تواند به عنوان شاخصی از قوانین فرانتخاب مطرح شود. وقتی δ

برای هر مجموعه‌ای از تصویرگرها بزرگ باشد، اطلاعات زیادی از دست می‌رود اما وقتی δ

کوچک باشد تقریباً همه‌ی اطلاعات درباره‌ی S که در درهم‌تنیدگی S-A وجود دارد از حالتی

از دستگاه قابل دست‌یابی است. اختلاف کوانتومی را می‌توان در یک مدل ساده‌ی اندازه‌گیری

توضیح داد. فرض می‌کنیم حالت پایه‌ی S چنین باشد، $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

قبل از اندازه‌گیری داریم:

$$|\psi_{S,A}\rangle^P = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \quad (8-3-1)$$

اگر $|0\rangle$ و $|1\rangle$ موقعیت‌های اشاره‌گر برای A باشند ناهم‌دوسی جزئی مانع شرط قطری شدن

ماتریس چگالی می‌شود:

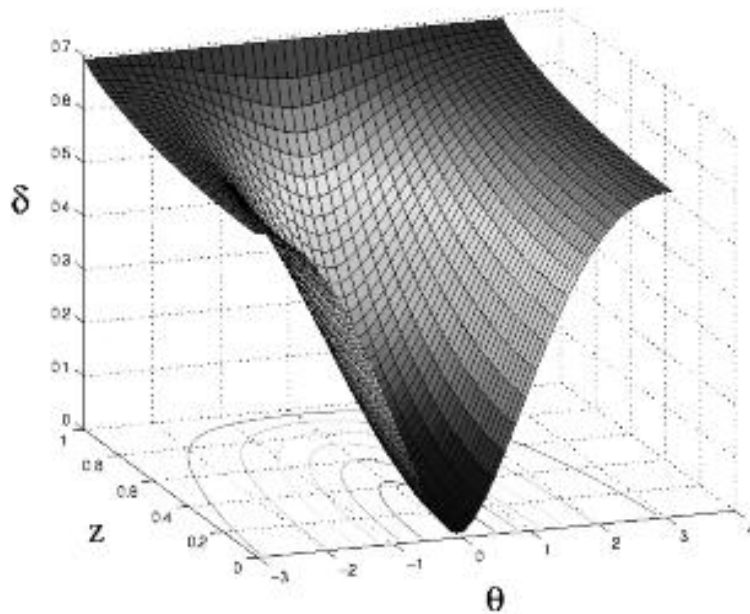
$$\rho_{S,A} = \frac{1}{2} \left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + \frac{z}{2} (|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) \right) \quad (9-3-1)$$

که $0 \leq z < 1$.

شکل (1-1)، δ را برای مقادیر مختلف z و پایه‌های مختلف اندازه‌گیری توسط θ نشان می‌دهد. θ معرف زاویه بر حسب رادیان است.

$$\left\{ \cos(\theta)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta)|1\rangle, e^{-i\varphi} \sin(\theta)|0\rangle - \cos(\theta)|1\rangle \right\}$$

$$\varphi = 1 \text{ rad}$$



شکل 1-1: اختلاف حالت‌های معلوم در معادله‌ی (9-3-1) با پایه‌های اندازه‌گیری تعریف شده را نشان می‌دهد.

1-4 جنبه‌ی کلاسیکی همبستگی کوانتومی

ماتریس چگالی جداپذیر ترکیبی از ماتریس‌های چگالی است:

$$\rho_{S,A}^i = \sum_j P_j^{(i)} |S_j^{(i)}\rangle \langle a_j^{(i)}| \langle a_j^{(i)}| \langle S_j^{(i)}| \quad (1-4-1)$$

اگر مجموعه‌ی کاملی از تصویرگرها وجود داشته باشد به طوری که $\delta(S:A)_{\{\Pi_j^A\}} = 0$ ، آن‌گاه

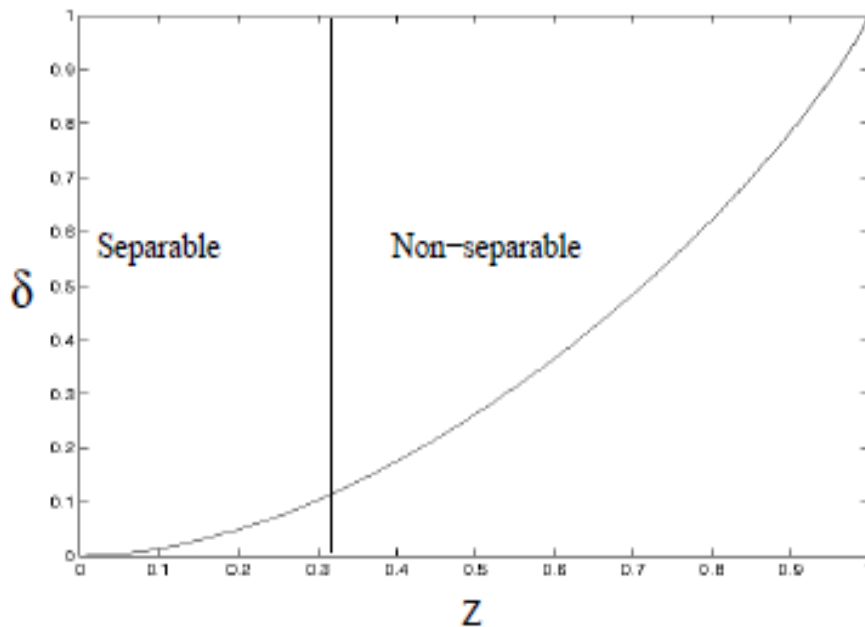
$\rho_{S,A}$ توسط تمام اندازه‌گیری‌ها مختل می‌شود. به ازای هر نتیجه‌ای از یک مجموعه‌ای از $\{\Pi_{j,k}^S\}$ ، تصویرگرهای یک بعدی مشروط وجود دارد:

$$\rho_{S,A} = \sum_j \sum_k \pi_{j,k}^S \Pi_j^A \rho_{S,A} \Pi_j^A \pi_{j,k}^S \quad (2-4-1)$$

شکل (۲-۱) اختلاف برای حالت ورنر را نشان می‌دهد [۱۰]، به طوری که:

$$|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \rho_{S,A} = \frac{1-z}{4} 1 + z |\psi\rangle\langle\psi| \quad z > 0$$

است اختلاف بزرگ‌تر از صفر می‌شود.



شکل ۲-۱: نمودار حالت جداپذیر و جدا ناپذیر را نمایش می‌دهد، در این جا اختلاف وابسته به پایه‌های اندازه‌گیری نیست زیرا $|\psi\rangle$ تحت دوران ناوردا است.

اختلاف کوانتومی معیاری از اطلاعات است که شاخص خوبی برای هم‌بستگی کوانتومی است.

ماتریس چگالی جدید $\hat{\rho}_{S,A}$ با حذف عناصر $\rho_{S,A}$ و مزدوج مختلط آن به دست آمده است. که

$\hat{\rho}_{S,A}$ وابسته به حالت فیزیکی است، $H(\hat{\rho}_{S,A})$ و در تئوری اطلاعات کوانتومی،

تشخیص اطلاعات کلاسیکی خالص، سنجش ذرات و اطلاعات کوانتومی که معیاری از کیوبیت-