بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان:

دنباله $g-$ قاب‌ها و قاب‌های $g-$ بسلی در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما:

دکتر محمّدرضا عبداله‌پور

استاد مشاور:

دکتر قاسم نریمانی

پژوهشگر:

زهرا جهانگیری

دانشگاه محقق اردبیلی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادرم که از نگاهشان صلابت،

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم.

تقدیر و سپاسگزاری:

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.

بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم‌داشت برای من بوده‌اند، از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمّدرضا عبداله‌پور که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از جناب آقای دکتر قاسم نریمانی که به عنوان استاد مشاور، در طول نگارش این پایان نامه اینجانب را با بزرگواری یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

زهرا جهانگیری

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: جهانگیری **نام:** زهرا

عنوان پایان نامه :
دنباله $g-$ قاب‌ها و قاب‌های $g-$ بسلی در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما: دکتر محمّدرضا عبداله‌پور

استاد مشاور: دکتر قاسم نریمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۶/۱۴ **تعداد صفحه:** ۷٦

کلید واژه‌ها :
$g-$ قاب؛ قاب‌های $g-$ بسلی ؛ دنباله $g-$ قاب ؛ پایداری

چکیده:
در این پایان نامه، دنباله $g-$ قاب را معرفی کرده و شرط معادل با دنباله $g-$ قاب بودن را به دست می‌آوریم. همچنین پایداری دنباله $g-$ قاب‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس، قاب‌های $g-$ بسلی را معرفی و ارتباط بین قاب‌های $g-$ بسلی و قاب‌های بسلی را بررسی می‌کنیم. از طرفی یک شرط لازم و کافی برای قاب $g-$ بسلی بودن فراهم می‌نمائیم. نهایتاً، پایداری قاب‌های $g-$ بسلی را تحت آشفتگی بررسی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت[۱]، برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین[۲] و شیفر[۳] برای مطالعه‌ی سری‌های فوریه[۴] غیر هارمونیک در [۹] معرفی شده است. در سال ۱۹۸۰ یانگ[۵] در [۲۲]، برخی از ویژگی‌های اساسی قاب‌ها را بیان کرد و دوباره قاب‌ها در مطالعه‌ی سری‌های فوریه غیر هارمونیک مورد استفاده قرار گرفت. بعد از انتشار مقاله‌ای اساسی توسط دابیچیز[۶]، گراسمن[۷] و می یر[۸] [۷] در سال ۱۹۸۶، نظریه‌ی قاب‌ها به طور وسیع مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و تعمیم‌های مختلفی از قاب‌ها مانند شبه قاب‌ها [۱۴]، قاب‌های ترکیبی [۱,۳]، قاب‌های مورب [۵] و ... ارائه شد. امروزه قاب‌ها در پردازش تصویر و سیگنال، متراکم سازی داده‌ها، نظریه‌ی نمونه‌گیری، نظریه‌ی فیلتر بانک‌ها، انتقال قوی اینترنت و بی‌سیم، برنامه‌نویسی و بسیاری از رشته‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در سال ۲۰۰۶ سان[۹]، g− قاب و g− پایه ریس را معرفی کرده و ویژگی‌های آن‌ها را مورد بحث و بررسی قرار داد. g− قاب‌ها یک تعمیم کلی از قاب‌ها هستند که شامل همه‌ی تعمیم‌های قبلی قاب‌ها می‌باشند. از یک g− قاب می‌توان یک قاب برای فضای هیلبرت مختلط ساخت. لازم به ذکر است که بسیاری از خواص g− قاب‌ها و g− پایه ریس‌ها مشابه با قاب‌ها و پایه‌های ریس هستند. و از جمله تفاوت آن‌ها این است که در قاب‌های معمولی، قاب‌های دقیق همان پایه‌های ریس هستند ولی در حالت کلی g− قاب‌های

---

[۱] Hilbert
[۲] Duffin
[۳] Schaeffer
[۴] Fourier
[۵] Young
[۶] Daubechies
[۷] Grossmann
[۸] Meyer
[۹] Sun

دقیق همان $g-$ پایه ریس‌ها نیستند. [۱۷,۱۸]

این پایان نامه براساس مقاله‌های [۸] و [۲۰] در ۳ فصل تدوین شده است که به قرار زیر می‌باشد:

در فصل اول، برخی از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعدی و برخی از ویژگی‌های قاب‌ها و پایه‌های ریس را مطرح می‌نماییم.

در فصل دوم، ابتدا برخی از خواص $g-$ قاب‌ها را بررسی می‌کنیم. سپس دنباله $g-$ قاب را تعریف کرده، شرایط لازم و کافی برای دنباله $g-$ قاب بودن را بیان می‌کنیم و پایداری دنباله $g-$ قاب‌ها را تحت آشفتگی بررسی می‌نماییم.

در فصل سوم، قاب $g-$ بسلی را معرفی کرده و ارتباط آن را با قاب بسلی پیدا می‌کنیم. همچنین ویژگی‌های قاب $g-$ بسلی را بیان کرده و در نهایت در مورد پایداری قاب $g-$ بسلی تحت آشفتگی بحث می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱. فرض کنید U یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی U نگاشتی مانند $\langle .,. \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

الف) به ازای هر $a,b,c \in U$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $\langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$؛

ب) به ازای هر $a,b \in U$، $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$؛

پ) به ازای هر $a \in U$، $\langle a, a \rangle \geq 0$ و $\langle a, a \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $a = 0$.

اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط U باشد، آنگاه $(U, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامند.

تعریف ۲.۱. اگر U یک فضای ضرب داخلی باشد و به ازای هر $a \in U$ تعریف کنیم

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

در آن صورت $(U, \|.\|)$ یک فضای نرم دار خواهد بود.

اگر U با نرم حاصل از ضرب داخلی بالا کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، آنگاه U را

یک فضای هیلبرت می‌نامند.

قضیه ۳.۱ ([۱۵] قضیه ۲.۱۲) اگر U یک فضای ضرب داخلی و $a, b \in U$ باشد. در آن صورت

الف) $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|.\|b\|$.

ب) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

نامساوی اول به نامساوی شوارتز و نامساوی دوم به نامساوی مثلثی معروف است.

تعریف ۴.۱. فرض کنید U یک فضای هیلبرت و $a, b \in U$. a و b را متعامد می‌نامند هرگاه $\langle a, b\rangle = 0$ در این صورت می‌نویسیم $a \perp b$. اگر M زیرمجموعه‌ای از U باشد، مکمل متعامد M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$M^{\perp} = \{a \in U \ : \ a \perp b \ , \ \ \forall b \in M\} \ .$$

گزاره ۵.۱ [۱۵] اگر M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت U باشد، آنگاه

$$(M^{\perp})^{\perp} = M \ .$$

گزاره ۶.۱ ([۱۵] قضیه ۴.۱۲) اگر M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت U باشد، آن گاه

$$U = M \oplus M^{\perp} \ .$$

تعریف ۷.۱. یک مجموعه از بردارهای u_α در فضای هیلبرت U، که در آن α در مجموعه اندیسگذاری مانند J تغییر می‌کند، متعامد یکه نام دارد هرگاه $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 1$ وقتی $\alpha = \beta$ و $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0$ وقتی $\alpha \neq \beta$.

تعریف ۸.۱. گوییم دنباله‌های $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ و $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ از فضای هیلبرت U، دومتعامدی هستند هرگاه

$$\langle f_i, g_j\rangle = \delta_{ij} \ .$$

تعریف ۹.۱. فرض کنید U یک فضای برداری باشد. یک پایه برای U مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای U است که فضای U را پدید می‌آورد.

گزاره ۱۰.۱ [۱۹] فرض کنید U فضای برداری پدید آمده توسط مجموعه‌ی متناهی متشکل از بردارهای $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ باشد. در این صورت، هر مجموعه‌ی مستقل از بردارهای V متناهی است و بیش از m عنصر ندارد.

قضیه ۱۱.۱ ([۴] قضیه ۳.۴.۲) فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در فضای هیلبرت U باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

الف) $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای U است.

ب) به ازای هر $a \in U$، $\quad a = \sum_{j=1}^{\infty}\langle a, e_j\rangle e_j$.

پ) به ازای هر $a, b \in U$، $\quad \langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle a, e_j\rangle\langle e_j, b\rangle$.

ت) به ازای هر $a \in U$، $\quad \|a\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|\langle a, e_j\rangle|^2$.

ث) $\overline{span}\{e_j\}_{j\in J} = U$.

ج) اگر $a \in U$ و به ازای هر j، $\quad \langle a, e_j\rangle = 0$ باشد، آنگاه $a = 0$.

تعریف ۱۲.۱. فضای هیلبرت U جدایی پذیر نامیده می‌شود هرگاه دارای زیر مجموعه‌ی چگال و شمارش پذیر باشد.

قضیه ۱۳.۱ ([۴] قضیه ۴.۴.۳) هر فضای هیلبرت جدایی پذیر U یک پایه‌ی متعامد یکه‌ی شمارا دارد.

قضیه ۱۴.۱ ([۱۶] قضیه ۱۲.۴) هرگاه φ یک تابع خطی پیوسته از U به $\mathbb{C}$ باشد، در این صورت عضو منحصربفرد $b \in U$ وجود دارد به قسمی که

$$\varphi(a) = \langle a, b\rangle, \qquad a \in U \ .$$

تعریف ۱۵.۱. اگر $1 < p < \infty$ آن گاه تعریف می‌کنیم

$$l^p = \Big\{ \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} \ : \ \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\} \ .$$

قضیه ۱۶.۱ ([۱۶] قضیه ۵.۳) فرض کنید $p, q \in (1, \infty)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $a \in l^p$ و $b \in l^q$، آنگاه

الف) $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q \Big)^{\frac{1}{q}}$.

ب) $\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$.

نامساوی اول به نامساوی هولدر[۱] و نامساوی دوم به نامساوی مینکوفسکی[۲] معروف است.

۲.۱ عملگرهای کراندار

[۱] Holder
[۲] Minkowski

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید V,U دو فضای هیلبرت باشند. برای عملگر $T:U\longrightarrow V$، نرم T را با $\|T\|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\|=\sup\Big\{\|T(a)\|: a\in U\ ,\ \|a\|\leq ۱\Big\}.$$

اگر $\|T\|<\infty$، آنگاه T را کراندار می‌نامند.
مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار از U به V را با $B(U,V)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $B(U,U)$ را با $B(U)$ نمایش خواهیم داد.

قضیه ۱۸.۱ ([۱۵] قضیه ۹.۱۲) اگر $T\in B(U)$. آنگاه عملگر منحصربفردی مانند T^* وجود دارد به طوری که

$$\langle Ta,b\rangle=\langle a,T^*b\rangle\ ,\qquad \forall a\in U\ ,\ \forall\, b\in U\ .$$

T^* عملگر الحاقی عملگر T نامیده می‌شود و $\|T^*\|=\|T\|$.

گزاره ۱۹.۱ [۱۵] اگر $T,S\in B(U)$. آنگاه

الف) $(T+S)^*=T^*+S^*$.

ب) $(TS)^*=S^*T^*$.

پ) $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$.

ت) $(T^*)^*=T$.

قضیه ۲۰.۱ ([۱۵] قضیه ۱۰.۱۲) فرض کنید $T\in B(U)$ و T^* عملگر الحاقی T باشد، در آن صورت $\ker T^*=T(U)^\perp$ و $\ker T=T^*(U)^\perp$. $\ker T$ و $T(U)$ را به ترتیب فضای پوچ و برد T می‌نامند.

گزاره ۲۱.۱ ([۴] لم A.۱.٦) فرض کنید $T \in B(U,V)$ و T^* عملگر الحاقی T باشد. در آن صورت $T(U)$ در V بسته است اگر و فقط اگر $T^*(V)$ در U بسته باشد.

تعریف ۲۲.۱. الف) عملگر $T \in B(U)$ خودالحاق نامیده می‌شود هرگاه $T^* = T$.

ب) عملگر $T \in B(U)$ مثبت نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a \in U$ داشته باشیم $\langle Ta, a\rangle \geq 0$، و به صورت $T \geq 0$ نشان می‌دهیم.

پ) اگر $T, S \in B(U)$. نماد $S \geq T$ یعنی $S - T \geq 0$؛ به عبارت دیگر به ازای هر $a \in U$،

$$\langle Sa, a\rangle \geq \langle Ta, a\rangle \ .$$

تعریف ۲۳.۱. اگر $T \in B(U)$، $S \in B(U)$ را ریشه‌ی دوم T گوئیم هرگاه $S^2 = T$.

قضیه ۲۴.۱ ([۱۵] قضیه ۳۳.۱۲) اگر $T \in B(U)$ مثبت باشد آنگاه T دارای یک ریشه‌ی دوم مثبت و منحصربفرد مانند $S \in B(U)$ است. همچنین اگر T معکوس پذیر باشد، آنگاه S نیز معکوس پذیر است.

قضیه ۲۵.۱ [۱۰] فرض کنید $T_1, T_2, T_3 \in B(U)$ عملگرهای خودالحاقی باشند. فرض کنید $T_1 \leq T_2$ و $T_3 \geq 0$ و T_3 با T_1 و T_2 جابجا شود. آنگاه $T_1T_3 \leq T_2T_3$.

تعریف ۲٦.۱. فرض کنید U یک فضای هیلبرت باشد، نگاشت خطی $P : U \longrightarrow U$ یک تصویر روی U نامیده می‌شود هرگاه $P^2 = P$.

حال اگر M زیر فضای بسته‌ای از U باشد و نگاشت $P : U \longrightarrow M$ به صورت زیر تعریف شود

$$Pa = a_1 \ , \qquad a = a_1 + a_2 \ \ , \ a_1 \in M \ , \ a_2 \in M^{\perp} \ ,$$

در آن صورت $P^2 = P$، P خطی و پیوسته است و $\|P\| \leq 1$، P تصویر متعامد از U به روی M نامیده می‌شود و معمولاً می‌نویسند $P = \pi_M$.

گزاره ۲۷.۱ اگر $P : U \longrightarrow U$ یک تصویر روی U باشد در این صورت $I - P$ نیز یک تصویر روی U خواهد بود.

اثبات. به ازای هر $a \in U$ داریم

$$(I-P)^{۲}a = Ia - ۲Pa + P^{۲}a = Ia - Pa = (I-P)a.$$

بنابراین $(I-P)^{۲} = I - P$ در نتیجه $I - P$ یک تصویر روی U است. ■

قضیه ۲۸.۱ [۱۵] فرض کنید P یک تصویر روی فضای هیلبرت U با فضای پوچ $\ker P$ و برد $P(U)$ باشد در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱) $P(U) = \ker(I-P) = \{x \in U : Px = x\}$ ؛

۲) $\ker P = (I-P)(U)$ ؛

۳) $P(U) \cap \ker P = \{۰\}$ و $U = P(U) + \ker P$ ؛

۴) اگر A و B زیرفضاهایی از U باشند به طوری که $A \cap B = \{۰\}$ و $U = A + B$، آن گاه تصویر منحصر به فرد P روی U با $A = P(U)$ و $B = \ker P$ وجود دارد.

قضیه ۲۹.۱ [۲] فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت U باشد. فرض کنید اعداد ثابت $\lambda, \beta \in [۰, ۱)$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $a \in U$،

$$\|Ta - a\| \leq \lambda\|a\| + \beta\|Ta\| \ .$$

در این صورت T کراندار و معکوس پذیر است و روابط زیر برقرار می‌باشد

$$\frac{۱-\lambda}{۱+\beta}\|a\| \leq \|Ta\| \leq \frac{۱+\lambda}{۱-\beta}\|a\| \quad , \quad \frac{۱-\beta}{۱+\lambda}\|a\| \leq \|T^{-۱}a\| \leq \frac{۱+\beta}{۱-\lambda}\|a\| \quad , \quad \forall a \in U \ .$$

قضیه ۳۰.۱ ([۴] قضیه A.۲.۵) هر عملگر دوسویی و کراندار در فضای هیلبرت یک معکوس کراندار دارد.

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید U و V فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $T : U \longrightarrow V$ را هومئومورفیسم گوییم هرگاه دوسویی و دارای وارون پیوسته باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید U و V فضاهای هیلبرت بوده و $T \in B(U,V)$. عملگر خطی و کراندار $S : V \longrightarrow U$، عملگر شبه معکوس T نامیده می‌شود هرگاه $TST = T$. عملگر شبه معکوس T را با $T^{\dagger}$ نشان می‌دهیم و به ازای هر $f \in T(U)$ داریم $TT^{\dagger}f = f$.

۳.۱ قاب‌ها

در این بخش U یک فضای هیلبرت مختلط است.

تعریف ۳۳.۱. دنباله‌ی $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت مختلط U یک قاب برای U نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $f \in U$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \,. \tag{1.1}$$

اعداد ثابت A و B را به ترتیب کران پایینی و کران بالایی قاب $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ می‌نامند. بزرگترین مقدار ممکن برای A و کوچکترین مقدار ممکن برای B که در رابطه‌ی (۱.۱) صدق می‌کند، را به ترتیب کران بهینه‌ی پایینی و کران بهینه‌ی بالایی قاب $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ می‌نامند.

اگر $A = B$، $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ را قاب تنگ و اگر $A = B = 1$، $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ را قاب پارسوال[۳] می‌نامند. اگر در رابطه‌ی (۱.۱) فقط نامساوی سمت راست به ازای هر $f \in U$ برقرار باشد، دنباله‌ی $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$، یک دنباله‌ی بسل[۴] با کران B نامیده می‌شود.

---

[۳] Parseval

[۴] Bessel

قاب $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ برای U، یک قاب دقیق نامیده می‌شود، هرگاه با حذف هر عنصر دلخواه از $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$، دنباله‌ی حاصل قابی برای U نباشد.

تعریف ۳۴.۱. اگر $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک قاب برای U باشد در آن صورت عملگر قاب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S : U \longrightarrow U \ , \qquad Sf = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, f_j \rangle f_j \ .$$

در لم زیر ویژگی‌های عملگر قاب S بررسی شده است.

لم ۳۵.۱ ([۴] لم ۵.۱.۵) فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq U$ یک قاب برای U با عملگر قاب S و کران‌های $A, B > 0$ باشد. در این صورت

الف) عملگر قاب S یک عملگر خودالحاق، مثبت و معکوس پذیر است و در روابط زیر صدق می کند

$$AI_U \leq S \leq BI_U \qquad , \qquad B^{-1} I_U \leq S^{-1} \leq A^{-1} I_U \ .$$

ب) $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^{\infty} = \{S^{-1} f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک قاب برای U با عملگر قاب S^{-1} و کران‌های $B^{-1}, A^{-1} > 0$ خواهد بود. قاب $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^{\infty}$ را قاب دوگان متعارف برای قاب $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ می‌نامند.

قضیه ۳۶.۱ ([۴] قضیه ۳.۲.۳) فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله در U باشد. در این صورت $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل با کران بسل B است اگر و فقط اگر عملگر

$$Q : l^2 \longrightarrow U \ , \qquad Q\{a_j\}_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j \ . \tag{۲.۱}$$

خوش تعریف و کراندار باشد و $\|Q\| \leq \sqrt{B}$.

لم ۳۷.۱ ([۴] لم ۱.۲.۳) فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله در U بوده و به ازای هر $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^2$، $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j$ همگرا باشد. در این صورت عملگر ترکیب Q که به صورت (۲.۱) تعریف شده، خطی و کراندار می‌باشد. هم چنین عملگر الحاقی Q به صورت زیر به دست می آید

$$Q^* : U \longrightarrow l^2 \quad , \qquad Q^* f = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j=1}^{\infty} \ . \tag{۳.۱}$$

به علاوه

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq \|Q\|^2 \|f\|^2 \quad , \qquad \forall f \in U \ .$$

تعریف ۳۸.۱. دنباله‌ی $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ از فضای هیلبرت U کامل نامیده می‌شود هرگاه

$$\overline{span}\{f_j\}_{j=1}^{\infty} = U \ .$$

گزاره ۳۹.۱ فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq U$. آن گاه $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک قاب برای U است اگر و فقط اگر عملگر زیر کراندار و پوشا باشد

$$Q : l^2 \longrightarrow U \quad , \qquad Q\{a_j\}_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j \ .$$

اثبات. فرض کنید $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^2$، ثابت می‌کنیم $Q\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ خوشتعریف است برای این منظور کافیست ثابت کنیم $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j$ همگراست.

فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ به طوری که $n > m$، در این صورت

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j f_j - \sum_{j=1}^{m} a_j f_j \Big\| \ = \ \Big\| \sum_{j=m+1}^{n} a_j f_j \Big\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{g\in U\\ \|g\|=1}} \Big|\Big\langle \sum_{j=m+1}^{n} a_j f_j, g\Big\rangle\Big| \\
&= \sup_{\substack{g\in U\\ \|g\|=1}} \Big| \sum_{j=m+1}^{n} \langle a_j f_j, g\rangle\Big| \\
&\leq \sup_{\substack{g\in U\\ \|g\|=1}} \sum_{j=m+1}^{n} |a_j \langle f_j, g\rangle| \\
&\leq \Big(\sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \sup_{\substack{g\in U\\ \|g\|=1}} \Big(\sum_{j=m+1}^{n} |\langle f_j, g\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{B}\Big(\sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

چون $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^2$ پس $\{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کوشی در $\mathbb{C}$ است. در نتیجه محاسبات بالا نشان می‌دهد که $\{\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کوشی در U است، چون U یک فضای هیلبرت است پس $\{\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\}_{n=1}^{\infty}$ در U همگراست بنابراین $Q\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ خوش تعریف است.

لم ۳۵.۱ نشان می‌دهد که عملگر قاب $S = QQ^*$ پوشاست درنتیجه Q پوشاست.

برعکس، فرض کنید Q عملگر خوش تعریفی از l^2 بتوی U باشد ثابت می‌کنیم $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک قاب برای U است.

لم ۳۷.۱ نشان می دهد Q کراندار و $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل است.

حال فرض کنید $Q^\dagger : U \longrightarrow l^2$ عملگر شبه معکوس Q باشد در این صورت به ازای هر $f \in U$ داریم

$$
f = QQ^\dagger f = \sum_{j=1}^{\infty} (Q^\dagger f)_j f_j .
$$

که $(Q^\dagger f)_j$ مختص j ام $Q^\dagger f$ می‌باشد. بنابراین

$$
\begin{aligned}
\|f\|^4 &= |\langle f, f\rangle|^2 = \Big|\Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} (Q^\dagger f)_j f_j, f\Big\rangle\Big|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big|(Q^\dagger f)_j \langle f, f_j\rangle\Big|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big|(Q^\dagger f)_j\Big|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 \\
&= \|Q^\dagger f\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq \|Q^\dagger\|^2 \|f\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 .
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j\rangle|^2 \geq \frac{1}{\|Q^\dagger\|^2} \|f\|^2 .
$$

در نتیجه $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک قاب برای U می‌باشد. ■