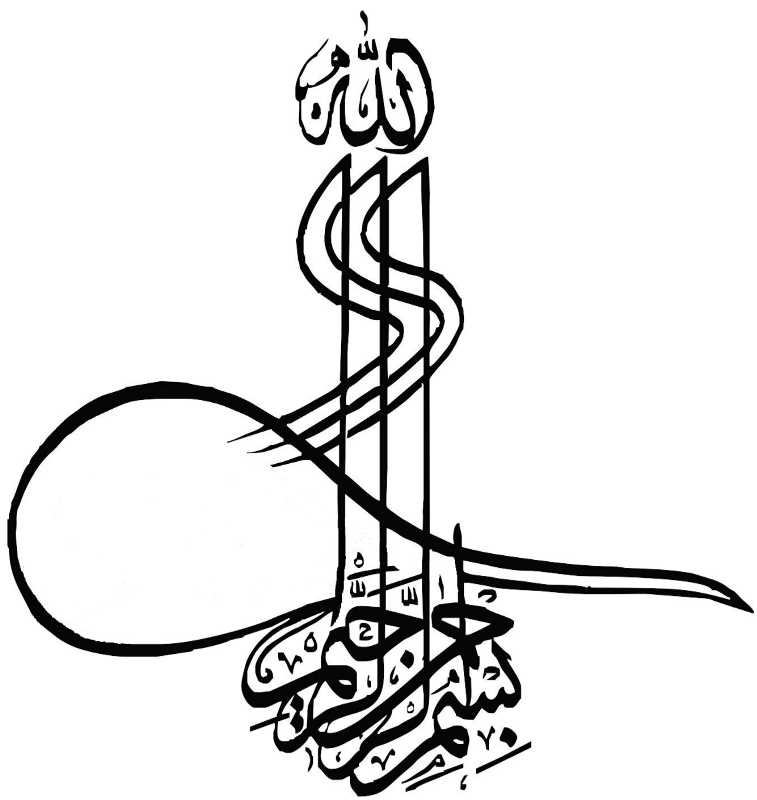
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

همریختی های مدولی و ضرب گرها روی کوانتوم گروه های فشرده ی موضعی

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

مریم سیری

اردیبهشت ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکـــارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضـــوع ایـــن پایـــان نامـــه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

قدردانی

حمد و سپاس خدای را که کلمات قاصر است از ستایش او زبان ناتوان است از بیان آن چه که در خور اوست. الهی، زمین و آسمان پیوسته نام تو را به زبان آورند و ساکنان فرمانروایت که همگان را شامل است، پیوسته به تسبیح تو مشغول؛ واگر هزار هزار برابر این، حمد تو گوییم هنوز شایسته ی عظمت تو نیست.

بارخدایا؛ هم اکنون که مرحله ای دیگر از راهی که پیش روست را پشت سر می گذارم، هم چون همیشه می دانم که هرچه هست همه از لطف و عنایت بی کران توست. به هرجا که قدم نهم به خواست تو و به هرچه دست یابم از رحمانیّت و رحمیّت توست. پس پیوسته حمد تو گویم و بزرگیت را قدر دانم.

در این مقال که فرصتیست برای سپاس گذاری، شایسته می دانم مقدم بر همه از پدر و مادرم قدردانی کنم که هرچه دارم مدیون تلاش، صبر، بزرگواری و همّت آن دو ام؛ که نه فقط در این مرحله ی کوتاه چه تمام زندگی مرا از محبّت بی دریغ خود بهره مند کردند و همواره دلگرم از مهربانی و پشتیبانیشان بوده ام.

اگرچه تمامی آن چه در هستی است برای قدردانی از مقام بزرگ معلّمی کم است، اما آن چه تکلیف خود می دانم سپاس گذاری از تمام معلّانم از روز آغازین تا امروز است؛ خصوصاً بزرگ ترین و صبورترین معلّم دکتر علی رجالی که از ابتدای تحصیل، برای من اسوه ی آموزگاری بوده اند و هر چه آموخته ام ذرّه ای از دانش بی کران ایشان بوده؛ نه تنها در حیطه ی علمی بلکه در عرصه ی زندگی بزرگ ترین و عزیزترین الگوی طیّ طریق بوده اند و همواره با صبر و مهربانی راهیابی به تمامی مسیرها را بر من آسان نموده اند. گر چه کمتر از آنم که بتوانم ذرّه ای از همّت و بزرگواری ایشان را جبران کنم، اما با هر چه در توانم است قدردان مهربانی معلّم بزرگوارم هستم.

هم چنین از استاد گران قدرم، دکتر محمود لشکری زاده که در این سال های تحصیل از دانش، صبر و شکیبایی ایشان در مسیر آموزش بهره مند بوده ام، با اینکه شایسته ی مقام بزرگ ایشان نیست، تقدیر و تشکّر می کنم.

و از تمامی معلّانم که سالها در محضرشان کسب معرفت نموده ام و همه ی کسانی که تا به امروز در محضرشان درس راهیابی به هدف نهایی ام را فرا گرفته ام، سپاس گذاری می کنم؛ باشد که قطره ای از دریای بی کران لطف و بزرگواریشان را پاسخ گفته باشم.

تقدیم به:

مهربان ترین آموزگارم؛ مادرم

و صبورترین حامی، پدرم.

چکیده

در این پایان نامه، پس از بیان نکات و قضایایی از نظریه ی وزن ها، ساختار کوانتـــوم گروه فشرده ی موضعی را که یک C^*- جبر است، تعریف می نماییم.

برای جبر باناخ A، همریختــی های A- مدولی روی زیر فضاهای خودبرگـردان A^* را بررسی نموده و نشـان می دهیم همه ی همریختی های A- مدولی A^* نرمال اند اگر و تنها اگر A ایده آلـی از A^{**} باشد. هم چنیـن نشان می دهیم بـرای کوانتوم گروه فشرده ی موضعی G که هم میانگین پذیر باشد، همریختی های $L^1(G)$- مدولی $L^\infty(G)$ نرمال اند اگر و تنها اگر G فشرده باشد. در نتیجه ی این هم ارزی نشـان می دهیم G فشـرده است اگـر و تنهـا اگر $LUC(G)=WAP(G)$ و $M(G)=Z(LUC(G)^*)$؛ که این پاسخی به مسئله ی باز مطرح شده توسط والکر راندی[1] است.

کلیــد واژه ها: کوانتـوم گروه فشـرده ی موضـعی، همریختــی های مدولـی، جبـر ضرب گرها، جبر هاپـف- ون نویمـــان، مرکز توپولوژیکی.

[1] Valker Runde

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، قصد داریم به سؤالی که توسط راندی در [۲۴] در زمینه‌ی بررسی رابطه‌ی توابع پیوسته‌ی یکنواخت چپ با توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف روی کوانتوم گروه‌های فشرده‌ی موضعی مطرح گردیده است، پاسخ دهیم. در اینجا تعریف ما از کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی همان تعریف کاسترمنز—ویز است.

برای رسیدن به این منظور، روی هر جبر باناخ A با همانی تقریبی کران‌دار، هم‌ریختی‌های $A-$مدولی از زیرفضاهای خود برگردان A^* را بررسی می‌کنیم. در ضمن نشان می‌دهیم هم‌ریختی‌های $A-$مدولی راست از A^* نرمال اند اگر و تنها اگر A یک ایده‌آل راست از A^{**} باشد. به ویژه با بررسی کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی $\mathbb{G}$ نشان می‌دهیم هم‌ریختی‌های $C_\circ(\mathbb{G})-$مدولی از $M(\mathbb{G})$ نرمال هستند اگر و تنها اگر $\mathbb{G}$ گسسته باشد. در ادامه نشان می‌دهیم جبرهای ضرب‌گر $L^1(\mathbb{G})$ می‌توانند با $M(\mathbb{G})$ مشخص شوند و با استفاده از این مطلب نشان می‌دهیم $M(\mathbb{G})$ در $LUC(\mathbb{G})^*$ قابل نشاندن است. این نتیجه به ما کمک می‌کند تا به هدف اصلی خود در این پایان‌نامه برسیم که نشان می‌دهد هرگاه کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی $\mathbb{G}$ هم‌میانگین‌پذیر باشد، آنگاه $\mathbb{G}$ فشرده است اگر و تنها اگر دو رابطه‌ی زیر هم‌زمان برقرار شوند؛

$$M(\mathbb{G}) = Z(LUC(\mathbb{G})^*), \quad WAP(\mathbb{G}) = LUC(\mathbb{G}).$$

این پایان‌نامه در پنج فصل گردآوری شده است؛ فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه و برخی قضایا می‌پردازد که در فصل‌های دیگر کاربرد زیادی دارند.

چون یک کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی، یک جبر ون نویمان با یک ساختار جمعی است و برای تعریف این ساختار جمعی لازم است بعضی نتایج اولیه راجع به وزن‌های وفادار نیم متناهی نرمال $(n.f.s)$ را روی جبرهای ون نیومن بدانیم، در فصل دوم به بررسی نتایجی از نظریه‌ی وزن‌ها می‌پردازیم.

در فصل سوم، ابتدا با تعریف کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی آشنا می‌شویم؛ در می‌یابیم که یک کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی، یک جبر ون نویمان است که با یک هم‌ضرب و دو تابع وزن، که یکی پایای چپ و دیگری پایای راست است، مجهز گردیده است. در این فصل، هم‌چنین به بیان برخی خواص کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی، به خصوص هم‌میانگین‌پذیری می‌پردازیم. هم‌چنین توابع پیوسته‌ی یکنواخت کران‌دار را روی هر کوانتوم گروه فشرده‌ی موضعی تعریف نموده و به شرح خصوصیات اولیه‌ی آن می‌پردازیم. به علاوه چند قضیه‌ی ابتدایی نیز در مورد توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف بیان می‌کیم.

فصل چهارم روابطی از زیر فضاهای خودبرگردان کوانتوم گروه‌های فشرده‌ی موضعی و هم‌ریختی‌های مدولی روی آن‌ها را بیان می‌کند.

در فصل پنجم که فصل آخر است، روابطی از جبر ضرب‌گر $L^1(\mathbb{G})$ را می آوریم و پس از بیان چند قضیه، در پایان فصل به هدف مطلوبمان می‌رسیم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ مفاهیم اولیه

در تمامی تعاریف، G یک گروه فشرده‌ی موضعی است.

تعریف ۱.۱ . برای گروه فشرده‌ی موضعی G:

- منظورمان از $C(G)$، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار کران‌دار روی G است که معمولاً با $C_b(G)$ نشان داده می‌شود.
- مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار f روی G، که برای هر $\varepsilon > 0$، یک مجموعه‌ی فشرده F از G وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x \in G \setminus F$ داریم $| f(x) | < \varepsilon$ را با $C_0(G)$ نشان می‌دهیم.
- مجموعه‌ی توابع روی G که $\int_G |f| \; d\iota < \infty$ و ι اندازه‌ی هار در G باشد را با $L^1(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ . جبر توابع پیوسته با محمل فشرده روی G را با $K(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ . الف) فرض کنیم $\mathcal{P}$ خانواده‌ای از نیم‌-نرم‌ها روی فضای توپولوژیکی X باشد. $\sigma(X,\mathcal{P})$ را ضعیف‌ترین توپولوژی روی X می‌گیریم که هر نیم‌-نرم $P \in \mathcal{P}$ در این توپولوژی پیوسته باشد.

ب) فرض کنید X و X^* در دوگانگی باشند؛ هرگاه $\mathcal{B}$ خانواده‌ی تمام زیر مجموعه‌های $\sigma(X, X^*)$-کران‌دار از X باشد، توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{B}$ روی X^*، $\tau_{\mathcal{B}}$ را توپولوژی قوی روی X^* می‌نامند.

تبصره ۱.۱ . با توجه به تعریف فوق، اگر X^* فضای دوگان X باشد، برای هر $T \in X^*$ تعریف می‌کنیم

$$P_T(x) = \|T(x)\|, \qquad \text{برای هر} \quad x \in X.$$

بنابراین P_T یک نیم‌-نرم است و می‌توان توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ را تعریف نمود که همان توپولوژی ضعیف روی X است.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ است. برای هر فضای دلخواه M و نگاشت $(a,m) \mapsto am$ از $A \times M \to M$ مفروض است. گوییم M یک A-مدول باناخ چپ است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر عنصر ثابت a از A، نگاشت $m \mapsto am$ روی M خطی باشد؛

۲) برای هر عنصر ثابت m از M، نگاشت $a \mapsto am$ روی A خطی باشد؛

۳) برای هر $a_۱, a_۲ \in A$ و $m \in M$ داشته باشیم

$$a_۱(a_۲m) = (a_۱a_۲)m;$$

۴) عدد مثبت K موجود باشد به طوری که برای هر $m \in M$ و $a \in A$

$$\|am\| \leq K\|a\| \ \|m\|.$$

M را همراه با نگاشت $(a,m)\mapsto ma$ از $A\times M$ به M، A–مدول باناخ راست گوییم، هرگاه شرط (۱)، (۲) و (۴) را مشابه بالا داشته باشد و شرط (۳) را این گونه بیان کنیم:

$$(ma_۱)a_۲=m(a_۱a_۲).$$

تعریف ۵.۱ . فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد؛ طیف a را با مجموعه‌ی زیر تعریف می‌نماییم

$$\sigma(a)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\ \lambda-a\notin Inv(A)\};$$

جایی که $Inv(A)$، مجموعه‌ی تمام عناصر وارون پذیر A باشد؛

در واقع منظورمان از λ در تعریف بالا، $\lambda\cdot ۱_A$ است ($\mathbb{C}=\mathbb{C}\cdot ۱_A\subseteq A$).

تعریف ۶.۱ . الف) یک برگشت[۱] روی جبر A، یک نگاشت خطی–مزدوج از A به A است که a را به a^* می‌نگارد و دارای این خاصیت است:

برای هر $a,b\in A$

$$(ab)^*=b^*a^*,\quad a^{**}=a;$$

زوج $(A,*)$ را $*$–جبر یا جبر برگشتی نامیم.

ب) یک $*$–جبر باناخ A، یک $*$–جبر است که دارای یک نرم زیرضربی کامل باشد به طوری که برای هر $a\in A$ داشته باشیم

$$\|a^*\|=\|a\|.$$

اشاره می‌کنیم که یک نرم $\|\cdot\|$ هنگامی زیر ضربی است که برای هر $a,b\in A$

$$\|ab\|\leq\|a\|\ \|b\|.$$

[۱] $involution$

ج) یک C^*−جبر، یک $*$−جبر باناخ است که برای هر $a \in A$

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲.$$

د) عنصر $a \in A$ را خودالحاق گوییم هرگاه $a^* = a$.

ه) فرض کنید A و B دو $*$−جبر باشند؛ هرگاه $\varphi : A \to B$ یک هم‌ریختی باشد که حافظ برگشت است، یعنی برای هر $a \in A$

$$\varphi(a^*) = \big(\varphi(a)\big)^*;$$

آن‌گاه φ را یک $*$−هم‌ریختی می‌نامیم.

تذکر ۲.۱ . یک عنصر از C^*−جبر A، مثبت گفته می‌شود هرگاه طیف نامنفی داشته باشد و خودالحاق باشد. به علاوه منظورمان از A^+ مجموعه‌ی تمام عناصر مثبت A است.

تعریف ۷.۱ . الف) فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد؛ E را یک فضای خطی روی همان میدان $\mathbb{F}$ می‌گیریم. نمایش T از A هم‌ریختی $x \mapsto T_x$ از A به فضای تمام عملگرهای روی E است. برای هر $x \in A$، T_x یک عملگر روی E است و برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داریم

$$T_{\alpha x} = \alpha T_x, \quad T_{xy} = T_x T_y, \quad T_{x+y} = T_x + T_y.$$

فضای خطی E را فضای نمایش T نامیم.

ب) فرض کنید A یک $*$−جبر و T نمایش A با عملگرهای کران‌دار روی فضای هیلبرت H باشد. هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $T_{x^*} = T_x{}^*$، آن‌گاه T یک $*$−نمایش A نامیده می‌شود.
یادآور می‌شویم اگر T عملگری روی A باشد، T^* الحاق عملگر T است که برای هر $x, y \in A$ داریم

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

تعریف ۸.۱ . اگر A یک C^*−جبر و ω یک تابعک خطی مثبت روی A باشد، سه‌تایی (H, π, ν) را یک GNS−ساختار مدور برای ω نامیم هرگاه خصوصیات زیر را دارا باشد:

۱) H یک فضای هیلبرت باشد؛

۲) π یک $*-$ نمایش از A روی H باشد؛

۳) ν برداری در H باشد که برای هر $a \in A$ دو فضای تولید شده توسط $\omega(a) = \langle \pi(a)\nu, \nu \rangle$ و $\pi(A)\nu$ در H چگال باشند.

تبصره ۳.۱ . ۱) فضای متریک X را کران‌دار کلی نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ مجموعه‌ی متناهی از نقاط X مانند مجموعه $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$،

$$\min\{d(x_۱, x), d(x_۲, x), \ldots, d(x_n, x)\} < \varepsilon.$$

۲) هر فضای متریک فشرده است اگر و تنها اگر کامل و کران‌دار کلی باشد.

۳) زیرمجموعه A از فضای متریک کامل X دارای بستار فشرده است اگر و تنها اگر کران‌دار کلی باشد.

تعریف ۹.۱ . اگر A و B دو فضای باناخ و $u : A \to B$ خطی باشد، نگاشت u را فشرده گوییم هرگاه $u(S)$ در B فشرده‌ی نسبی باشد؛ جایی که S گوی یکه در A است؛

$$S = \{x \in X \mid \|x\| \leq ۱\}.$$

این ویژگی معادل با این است که $u(S)$ کران‌دار کلی باشد که در این صورت کران‌دار نیز خواهد بود؛ بنابراین، u کران‌دار و لذا پیوسته است.

مثال ۴.۱ . اگر $I=[\circ.\mathsf{1}]\subseteq\mathbb{R}$ و $X=C(I)$ را با سوپریمم نرم در نظر بگیریم، برای $K\in C(I^{\mathsf{2}})$ عملگر $u\in B(X)$ را برای هر $f\in X$ و $s\in I$ به شکل زیر تعریف می‌نماییم:

$$u(f)(s)=\int_{\circ}^{\mathsf{1}} K(s,t)\ f(t)\ dt.$$

عملگر تعریف شده به فرم فوق فشرده است.

در اینجا، $M(A)$ یا جبر ضرب‌گر A را معرفی می‌کنیم:
به هر C^*−جبر A یک C^*−جبر یک‌دار $M(A)$ نسبت می‌دهیم که A را به عنوان یک ایده‌آل شامل است. این جبر نقش مهمی در نظریه‌ی C^*−جبرها دارد. بنابراین از نظر ما نیز حائز اهمیت است.

تعریف ۱۰.۱ . برای یک جبر باناخ A، یک ضرب‌گر روی A، زوج (L,R) از نگاشت‌های خطی کران‌دار روی A است به طوری که برای هر $a,b\in A$

$$L(ab)=L(a)b,\quad R(ab)=aR(b),\quad R(a)b=aL(b).$$

اگر نرم

$$\|L\|=\sup\{\ \|L(a)\|:\ a\in A,\ \|a\|\leq \mathsf{1}\ \}$$

را روی فضای تمام نگاشت‌های خطی کران‌دار A تعریف کنیم، می‌توان نتیجه گرفت برای هر ضرب‌گر (L,R) روی A،

$$\|L\|=\|R\|.$$

از آن جایی که

$$\|aL(b)\|=\|R(a)b\|\leq\|R\|\|a\|\|b\|$$

داریم

$$\|L(b)\|=\sup_{\|a\|\ \leq \mathsf{1}}\|aL(b)\|\leq\|R\|\|b\|;$$

وبنابراین $\|R\| \leq \|L\|$ است. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $\|L\| \leq \|R\|$ و در نتیجه $\|R\| = \|L\|$.

برای هر C^*–جبر A، مجموعه‌ی تمام ضرب‌گرهای A را با $M(A)$ نشان می‌دهیم. نرم هر ضرب‌گر (L, R) را این گونه تعریف می‌کنیم

$$\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|.$$

هرگاه ضرب دو نگاشت دلخواه $L_۲$ و $L_۱$ را به شکل زیر در نظر بگیریم

$$L_۱ L_۲(a) = L_۱(a) L_۲(a) \qquad a \in A \ \ \text{برای},$$

ضرب دو عنصر از $M(A)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$(L_۱, R_۱).(L_۲, R_۲) = (L_۱ L_۲, R_۲ R_۱) \qquad (L_۱, R_۱), (L_۲, R_۲) \in M(A) \ \ \text{برای}.$$

به وضوح ضرب دو عنصر از $M(A)$ خود یک ضرب‌گر است.

هرگاه " $*$ " عمل برگشت روی یک C^*–جبر A باشد و $L : A \to A$ یک نگاشت خطی باشد، $L^* : A \to A$ را این گونه تعریف می‌نماییم

$$L^*(a) := \Big(L(a^*)\Big)^*.$$

آن‌گاه L^* خطی است و نگاشت $L \mapsto L^*$ یک نگاشت خطی–مزدوج طولپا از جبر نگاشت‌های کران‌دار به خودش است به طوری که

$$(L_۱ L_۲)^* = L_۲^* L_۱^*, \quad L^{**} = L.$$

اگر (L, R) یک ضرب‌گر برای A باشد عمل برگشت روی $M(A)$ را این گونه تعریف می‌نماییم

$$(L, R)^* = (R^*, L^*).$$

آن‌گاه نگاشت $(L, R) \mapsto (L, R)^*$ یک برگشت روی $M(A)$ است.

به وضوح $M(A)$ تحت ضرب و برگشت و نرم تعریف شده در بالا یک C^*−جبر است. چون کافیست برای هر $\tau \in M(A)$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\|\tau\|^{۲} = \|\tau^*\tau\|;$$

برای $\tau = (L, R) \in M(A)$ داریم

$$\begin{aligned} \|L(a)\|^{۲} = \|L(a)^* \cdot L(a)\| &= \|L^*(a^*)L(a)\| \\ &= \|a^*R^*\Big(L(a)\Big)\| \le \|R^*L\| = \|\tau^*\tau\|. \end{aligned}$$

برای هر $a \in A$ که $\|a\| \le ۱$ باشد.

بنابراین

$$\|\tau\|^{۲} = \sup_{\|a\|\le ۱} \|L(a)\|^{۲} \le \|\tau^*\tau\| \le \|\tau\|^{۲}$$

ولذا

$$\|\tau^*\tau\| = \|\tau\|^{۲}.$$

جبر $M(A)$ را جبر ضرب‌گر A می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد؛ تور $\{e_\lambda\}_{\lambda\in I}$ در A را همانی تقریبی چپ از A گوییم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$e_\lambda x \to x;$$

همانی تقریبی راست A به طور مشابه (با تغییر همگرایی به صورت $xe_\lambda \to x$) تعریف می‌شود.

هرگاه تور $\{e_\lambda\}_{\lambda\in I}$ همانی تقریبی چپ و راست باشد، آن را همانی تقریبی دوطرفه یا به اختصار همانی تقریبی جبر باناخ A می‌نامیم.