بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

تحلیل روش های رانگ کوتای جمعی و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سهیلی

تحقیق و نگارش:

فردین رحمانپورفرح آبادی

فروردین ۱۳۸۷

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان روش های رانگ کوتای جمعی و کاربردهای آن قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی توسط دانشجو فردین رحمانپورفرح آبادی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکترعلیرضا سهیلی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

فردین رحمانپور فرح آبادی

این پایان نامه ..۶..... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۱۳۸۷/۱/۲۶ توسط هیئت داوران بررسی و درجه ..عالی..... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر علیرضا سهیلی		
داور ۱:	دکتر پرویز سرگلزایی		
داور ۲:	دکترحسن میش مست نهی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتراکبرگلچین		

۱۳۸۷/۶/۱۰

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب فردین رحمانپور فرح آبادی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: فردین رحمانپورفرح آبادی

امضاء

هوالمحبوب

به کوی میکده گریان و سرافکنده روم

چرا که شرم همی آیدم ز حاصل خویش

سپاس او را که عشق بیافرید و حب تعلیم و تعلم در آدمی بنهاد همو که اندیشه بیافرید و قلم به او سپرد.

شاکرم پروردگاری که هدایتم فرمود به نور علم تا از سیاهی جهل برهم و آن که هستی را بنا نمود تا آموزگارم باشد در ترکیب طبایع متضاد و مرا رهنمون ساخت به علم حساب تا دریابم که علم او در قیاس با آن چه می دانم اقیانوسی است در تقابل ملکول، چه بسا من کمتر از آنم.

سپاس تو را ای آموزگار هستی بخش

تـقـدیـم بـه :

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

شرمسارم از این بضاعت کم آن گاه که به خاطر می آورم چگونه علاوه بر محبت های بی دریغ تان در ایجاد فضای امن وآرام هم صدا با معلمین و اساتیدم مرا به تعلیم فراخواندید تا به آگاهی دست یابم. فراموش نخواهم کرد شبهای خستگیتان را عاشقانه و به بدیل موقوف یاری تکالیف مدرسه ام می نمودید. می دانم آری، می دانم بیش از من شادمانید چرا که تنها آرزوی زندگیتان طی درجات تعالی فرزندانتان بوده و هست.

سپاسگزاری

خداوند را سپاس می گویم که توفیق علم آموزی را به بند گانش عنایت فرمود. اکنون که این پایان نامه به انجام رسیده است برخود لازم می دانم از تمامی عزیزانی که مرا در تهیه این پایان نامه یاری داده اند تشکر و قدردانی نمایم .

از جناب آقای دکتر علیرضا سهیلی استاد بزرگوارم که بدون راهنماییهای ایشان پیمودن این مسیر میسر نمی شد و همواره مزاحمت های وقت و بی وقت مرا با سعة صدر پاسخ گو بوده اند و به حق زکات علم خویش را با نشر آن اداء نموده اند و از جناب آقای دکتر پرویز سرگلزایی و جناب آقای دکتر حسن میش مست نهی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته اند تشکر می کنم.

جا دارد از تمامی دوستان و عزیزانی که مرا در گذراندن برگهٔ دیگری از زندگی یاری نموده اند تشکرو قدردانی نمایم واز خداوند متعال برایشان توفیقات روزافزون را خواستارم.

چکیده :

بسیاری از مسائل فیزیک، مهندسی، شیمی و حتی زیست شناسی و دیگر زمینه های علوم که شامل جواب عددی است، عموما در حل آن ها از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می شود، جواب عددی با انجام عمل گسسته سازی و استفاده از روش های تفاضل متناهی، روش های جداسازی ویا اجزاء متناهی قابل دستیابی است. در سیستم های بزرگ معادلات دیفرانسیل شامل دو قسمت معادلات سخت و معادلات غیر سخت به دلیل این که در حل قسمت سخت استفاده از روش های صریح مناسب نیست، سعی بر این است تا از روش های رانگ کوتای جمعی صریح - ضمنی که در حالت سخت از روش های ضمنی و در حالت غیر سخت از روش های صریح بهره می برد استفاده کرد، که خود یک تکنیک قوی در حل این گونه معادلات به شمار می رود.

در این پایان نامه سعی شده تا شرایط مرتبه را برای روش های رانگ کوتای جمعی به دست آورده و با ارائه مفهوم پا یداری، شرایط پایداری را برای این روش ها بررسی کرده و ناحیۀ پایداری را برای این روش ها به دست می آوریم. با استفاده از الگوریتم ارائه شده جواب عددی مناسب برای معادلات دیفرانسیل جمعی به دست می آوریم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

روش های عددی درحل معادلات دیفرانسیل

مقدمه

یکی از ابزارها در مدل های علمی، معادلات دیفرانسیل می باشد در روش های عددی تاکید بر این است که اغلب مسائل قابل بحث با جواب های معلوم در نظر گرفته شود تا بتوان کیفیت ورفتار روش های عددی را بررسی نمود در این گونه معادلات عموما x به عنوان متغیر مستقل و y نمایانگر متغیر وابسته است، معادلات دیفرانسیل در حالت کلی فرم زیر را دارند.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

اگر درمعادلات دیفرانسیل فقط از مشتق های معمولی استفاده شود معادله از نوع معمولی است، ودرصورت وجود مشتقات جزئی معادله از نوع معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خواهد بود.

۱—۱ مرتبهٔ معادله دیفرانسیل

بالاترین مرتبهٔ مشتق در معادله، مرتبهٔ معادله خواهد بود. معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n به فرم $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ است، وبرای سادگی به فرم $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ نمایش داده می شو که y تابعی از x است .

۱—۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل چند معادلهٔ هم مرتبه است که به طور هم زمان حل می شوند، مرتبهٔ دستگاه نیز مشابهاً تعیین می شوند. معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
y'_۱(x) &= f_۱(x, y_۱,, y_۲, \ldots, y_N) \\
y'_۲(x) &= f_۲(x, y_۱,, y_۲, \ldots, y_N) \\
&\vdots \\
y'_N(x) &= f_N(x, y_۱,, y_۲, \ldots, y_N)
\end{aligned}$$

که به صورت زیر بیان می شود:

$$y' = f(x, y(x)) \qquad x \in [a, b] \qquad f : R \times R^m \to R^m \qquad y(a) = y^{(\circ)} \qquad (۱-۱)$$

که در آن $f=[f_1,\dots,f_N]^T$ و $y=[y_1,\dots,y_N]^T$ و $y^{(0)}=[y_1^{(0)},\dots,y_N^{(0)}]$ است .

معادله دیفرانسیل f را خود گردان گویند اگر وابسته به x نباشد.قابل ذکر است که همواره امکان تبدیل معادلات غیر خود گردان به معادلات خود گردان امکان پذیر است که مستلزم اختصاص یک مولفه اضافی y_{N+1} به بردار y است ($(y'_{N+1}$)، بااصلاح سیستم داریم.

$$
\begin{aligned}
y'_1(x) &= f_1(y_{N+1}, y_1,, y_2, \dots, y_N)\\
y'_2(x) &= f_2(y_{N+1}, y_1,, y_2, \dots, y_N)\\
&\vdots\\
y'_N(x) &= f_N(y_{N+1}, y_1,, y_2, \dots, y_N)\\
y'_{N+1}(x) &= 1
\end{aligned}
$$

اگر مقدار $y(x_0)=y_0$ داده شده باشد معادله $y'(x)=f(x,y(x))$ به مساله مقداراولیه مشهوراست هدف به دست آوردن جواب تقریبی برای مقادیر$y(x)$ به ازای مقادیر ویژه x است.

روش های عددی بیشتر به عنوان تقریبی از جواب واقعی در علوم کاربردی مورد توجه قرار می گیرد، برای این که جواب به دست آمده منحصر به فرد باشد نیاز به تحمیل شرایطی بر روی معادله است، با برقراری شرایط قضیهٔ زیر می توان این نیاز را برآورده نمود.

قضیه ۱—۱: اگر $f: R\times R^m \to R^m$ در تمام ناحیهٔ $D=\{x|a\le x\le b\}$ پیوسته باشد و $t=1,\dots,N$، $-\infty\le y_t\le+\infty$ ، مقادیر a و b هر دو متناهی باشند، در صورتی که ثابتی مانند L موجود باشد که :

$$||f(x,y)-f(x,y^*)|| \le L||y-y^*|| \qquad (1-2)$$

و رابطهٔ فوق برای هر $(x,y),(x,y^*)\in D$ برقرار باشد. آن گاه برای هر$y^{(0)}\in R^m$ یک جواب منحصر به فرد $y(x)$ برای معادلهٔ (۱—۱) وجود دارد که پیوسته و مشتق پذیر در ناحیهٔ D است.

رابطهٔ (۱—۲) شرط لیپ شیتز و L ثابت لیپ شیتز است، مشتق پذیربودن f برای هر $(x,y)\in D$ می تواند شرط لیپ شیتز را برای $f(x,y)$ فراهم کند، اگر$f(x,y)$ مشتق پذیر است با توجه به قضیهٔ مقدارمیانی :

$$f(x,y)-f(x,y^*) = J(y-y^*)$$

که $J=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$، بنابراین برای تمام نقاط D می توان $L=sup||J||$ درنظرگرفت.

۱—۳ روش های عددی

روش های عددی بر نظریهٔ گسسته سازی استواراست بنابراین بازهٔ پیوسته $x \in [a,b]$ را با نقاط x_n که

$$x_n = a + nh \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad N = \frac{b-a}{h}$$

جایگزین می کنیم، پارامتر h طول گام نامیده می شود و می تواند به دو شکل ثابت و متغیر در روش های عددی استفاده شود، فرض کنید y_n تقریب $y(x_n)$ باشد هدف یافتن فرآیندی برای تعریف مناسب $\{y_n\}$ در نقاط گسسته $\{x_n\}$ است.

یک روش عددی k گامی، تقریب های متوالی y_{n+j}، $j = 0, 1, \ldots, k$ را برای یک معادله دیفرانسیل تا $\{y_n | n = 0, 1, \ldots, N\}$ محاسبه می کند، اگر $k = 1$ روش تک گامی و اگر $k > 1$ روش را k گامی گویند.

فرم عمومی روش های عددی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h) \qquad (3-1)$$

α_j هاضرائب روش و ϕ تابعی از f است که باتوجه به روش عددی به کار گرفته شده تعریف می شود.

تعریف ۱—۲ : در روش های چند گامی خطی تابع $\phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h)$ یک ترکیب خطی از مقادیرتابع f در (x_{n+j}, y_{n+j}) است $(f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j}), j = 0, 1, \ldots, k)$.

یک روش خطی k گامی در حالت استاندارد به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

α_j و β_j ثابت هایی وابسته به شرایط α_k و $|\beta_0| + |\alpha_0| \neq 0$ هستند، اگر $\beta_k = 0$ روش را صریح و اگر $\beta_k \neq 0$ روش را ضمنی گویند، چندجمله‌ای مشخصهٔ اول به صورت $\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j$ وچند جمله‌ای مشخصهٔ دوم نیز $\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j$ خواهد بود که $\zeta \in C$:

تعریف ۱—۳ : روش عددی از مرتبه ی p خواهد بود هر گاه :

$$y(x_n) - y_n = O(h^{P+1})$$

$y(x_n)$ جواب دقیق و y_n جواب تقریبی به دست آمده از روش عددی در گام n ام است.

۴—۱ انواع روش های عددی

روش های چند گامی

در این روش ها مقدارتقریب عددی در هر گام از ترکیب خطی تقریب های محاسبه شده در گام های قبلی به دست می آید، اگردرسمت راست رابطهٔ (۱—۳)، y_{n+1} وجود داشته باشد روش راضمنی و درغیراین صورت روش را صریح گویند. در این روش ها برای تقریب $f(x,y)$ از چند جمله ایهای نیوتن —پیشروَ و پسرو یا استرلینگ استفاده می شود آدامز—بشفورت و آدامز—مولتون نمونه هایی از این روش ها می باشند هم چنین روش پیشگو—اصلاح گر جزء روش های چند گامی است .

روش های تک گامی

یکی از ساده ترین روش های عددی قانون اویلر است که یک روش خطی تک گامی است و خطای آن $O(h^2)$ می‌باشد وبرای معادلهٔ دیفرانسیل زیر این گونه بیان می شود

$$y' = f(x,y) \qquad f : R \times R \to R \qquad x \in [a,b] \qquad y(a) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

روش اصلاح شدهٔ اویلر به فرم زیر است که خطای آن $O(h^3)$ می باشد.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n^*)}{2}$$

که

$$y_n^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

روش های رانگ کوتا تعمیمی از روش اویلر است و هدف، گسترش روش اویلر برای یک تکرارازارزیابی f در هر گام به وسیله رانگ بود که بعدهاتوسط کوتاو هیون [1] ادامه پیدا کرد، اویلر برای جواب یک مساله مقدار اولیه، دنباله ای از طول گام های کوچک را که درآن هاسرعت تغییر جواب ثابت است استفاده کرد . رانگ الگوریتم را به یک گام محدود کرد. در این حالت تقریب تنها به آخرین نقطه محاسبه استوار است.

$$y_n = y_{n-1} + hf_{n-1}$$

در معادله دیفرانسیل $y'(x) = f(x, y(x))$ با مقدار اولیهٔ $y(x_0) = y_0$، اولین گام از مقدار اولیهٔ x_0 به x_1 است و جواب تقریبی در این نقطه از رابطهٔ زیر به دست می آید

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

[1] hune

در حالت کلی برای یک دنباله از مقادیر $x_0, x_1, \ldots$ ، جواب تقریبی متناظر $y_0, y_1, \ldots$ از رابطهٔ زیر حاصل می شود

$$y_n = y_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

که به صورت بسط $\int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi(x)dx = (x_n - x_{n-1})\phi(x_{n-1})$ می توان نمایش داد.

روش های رانگ کوتا فاقد خاصیت خطی بودن هستند ودارای تقریب دقیق تری نسبت به روش اویلر است که به عنوان روش های چند مرحله‌ای شناخته می شوند، این گونه روش ها به صورت های صریح، ضمنی و نیمه ضمنی ارائه می شود، دراین پایان نامه روش های رانگ کوتا (RK) به تفصیل بیان شده است.

روش زیر نمونه ای از روش رانگ کوتای دو مرحله ای است

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h\frac{k_1}{2} + h\frac{k_2}{2})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

روش های عددی که از ترکیب این دو روش ایجاد می شود به عنوان روش ترکیبی معرفی می شوند. از جملهٔ این روش ها، روش رزنبرگ [2] است که از خطی سازی سیستم های غیرخطی رانگ کوتای ضمنی باهدف کاهش هزینهٔ محاسبات استفاده می کند، به طور کلی روش های عددی به دو دسته صریح وضمنی تقسیم می شوند. در روش های ضمنی برای محاسبات نیاز به روش های تکراری است که نسبت به روش های صریح هزینهٔ محاسبات بیشتری دارد اما دقت وپایداری آن به مراتب از روش صریح مناسب تر است .

۱—۵ همگرایی و سازگاری روش عددی

روش عددی دررابطهٔ (۱—۳) باشرط اولیهٔ داده شده همگرا خواهند بود هر گاه شرایط قضیهٔ (۱—۱) برقراربوده و رابطهٔ زیر نیز برقرار باشد:

$$max_{h \longrightarrow 0} ||y(x_n) - y_n|| \longrightarrow 0 \qquad 0 \leq n \leq N$$

اگر خطای برشی (LTE) را با R_{n+k} نمایش دهیم :

$$R_{n+k} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h\phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y(x_n), h)$$

[2] Rosenbrock

در این صورت روش سازگاراست اگر برای تمام مسائلی که در قضیهٔ (۱—۱) صدق کند داشته باشیم :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{R_{n+k}}{h} = 0 \qquad x_n = a + nh$$

با استفاده از قضیهٔ (۱—۱) و فرض وجود $y(x)$ در $[a, b]$ وقضیهٔ مقدار میانی دو شرط لازم و کافی برای سازگاری روش عددی به دست می آید.

۱) $\rho(1) = 0$

۲) $\rho'(1) = \sigma(1)$

برای توضیحات بیشتر به مرجع [۸] مراجعه شود.

تعریف ۱—۴ : اگر تمام ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ اول $\rho(\zeta)$ کمتر یا مساوی یک باشد در این صورت روش عددی در شرط ریشه صدق می کند.

تعریف ۱—۵ : روش عددی در رابطهٔ (۱—۳) صفر پایداراست هر گاه در شرط ریشه صدق کند.

قضیه ۱—٦: شرط لازم و کافی برای همگرایی روش آن است که سازگارو صفرپایدارباشد.

باکمک قضیهٔ فوق و برقراری قضیهٔ لیپ شیتز در صورتی که پایداری موجود داشته باشد جواب منحصر به فرد خواهد بود و با توجه به تعاریف بالا اگردرشرط ریشه صدق کند می توان همگرایی رانتیجه گرفت. [۷]

۱—٦ پایداری در روش عددی

شرایط لازم و کافی برای همگرایی روش، داشتن پایداری وسازگاری است. پایداری، میزان خطای برشی را کنترل می کند ولازمهٔ پایداری روش، کران داربودن خطای روش عددی است. اگر روش عددی اویلر را برای مسالهٔ نمونهٔ $y'(x) = \lambda y(x)$ به کار رود خواهیم داشت

$$y_n = (1 + h\lambda)^n y_0$$

درصورتی روش پایداراست اگر

$$n \to 0 \quad \exists M \qquad \lim(1 + h\lambda)^n \leq M$$

اگر $z = \lambda h$ فرض شود ناحیهٔ پایداری روش به فرم زیر خواهد بود

$$s = \{z \in C : |1 + z| \leq 1 \quad Re(z) \leq 0\}$$

تعریف ۱—۷ : برای سیستم همگن $y' = Ay$ که ماتریس A دارای مقادیر ویژهٔ λ_r باشد، چندجمله ای پایداری به فرم

$$\pi(r,\hat{h}) = \rho(r) - \hat{h}\sigma(r) \qquad (۱-۴)$$

خواهد بود که $\hat{h} = h\lambda_r$، هر گاه ریشه های (۱—۴) در شرط $|r_s| \leq ۱$، $s = ۱, ۲, \dots$ صدق کند آن گاه $\hat{h}$ به طور مطلق پایداراست. ناحیه ای که توسط این $\hat{h}$ مشخص می شود ناحیهٔ پایداری گویند.

تعریف ۱—۸ : روش را A— پایدار[۳] گویند هر گاه

$$\{z|R(z) \leq ۰\} \subseteq R$$

تعریف ۱—۹ : درروش عددی تک گامی تابع پایداری $R(z)$، $z = h\lambda$ به صورت $y_n = R(z)y_{n-۱}$ بیان می شود، روش L— پایدار[۴]است هر گاهA— پایدار باشد وتابع پایداری در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{|h| \longrightarrow \infty} R(z) = ۰$$

روش های عددی صریح A— پایدارنیستند بنابراین در مسائل سخت کاربرد ندارند، توضیحات لازم درمرجع [۸] آمده است .

---

[۳] A-stable
[۴] L-stable

فصل ۲

شرایط مرتبه برای روش های رانگ کوتا