دانشگاه خوارزمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

عنوان

اندیس بهره‌وری مالم کوئیست

تدوین

الهه وحیدی کیا

استادان راهنما

دکتر غلامرضا جهانشاهلو

دکتر سعید محرابیان

شهریور ۱۳۹۱

من که باشم که برآن خاطر عاطر گذرم

لطف‌ها می‌کنی ای خاک درت تاج سرم

دلبرا بنده نوازیت که آموخت بگو

که من این ظن به رقیبان تو هرگز نبرم

همتم بدرقه راه کن ای طاهر قدس

که دراز است ره مقصد و من نو سفرم

تقدیم به:

قلب پرمهر و دستان مهربان
پدر
و
مادرم

قدردانی.

پروردکارا سپاس بی‌کرانم را تقدیمت می‌دارم که براین بنده به دادن نعمت‌های خوبت منت نهادی و مرا به غیر وانگذاشتی و به من فرصت عطا فرمودی تا بتوانم گوشه‌ای از خلقت با شکوهت را درک کنم. بهترین و صمیمانه‌ترین قدردانی‌ها را نثار آن‌هایی می‌کنم که وقت، عمر و دانش خود را با نهایت سخاوت در اختیارم قرار دادند و همواره از لطف و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام.

اینک که به لطف الهی نگارش این پایان‌نامه به انجام می‌رسد برخود فرض می‌دانم که موقع را غنیمت شمرده و از صمیم قلب مراتب قدرشناسی و سپاسگزاری خود رابه استاد فرهیخته جناب آقای دکتر غلامرضا جهانشاهلو و جناب آقای دکتر سعید محرابیان که افتخاری شاگردی ایشان را داشتم و همواره اینجانب را از راهنمایی‌ها و ارشادات و زحمات بی‌شائبه خود بی‌نصیب نگذاشته تقدیم می‌دارم.

از جناب آقای دکتر توحیدی بخاطر راهنمایی‌های بسیار و قبول زحمت داوری این پایان‌نامه بسیار سپاسگزارم.

همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بابلیان به خاطر قبول زحمت داوری این پایان نامه سپاسگزارم.

بی شک اگر توفیق اندکی در طی مراحل تحصیل نصیب گردیده، مدیون زحمات و تلاشهای اساتید بزرگواری هستم که در طول دوران تحصیل از حضورشان استفاده نمودم.

از زحمات و دلسوزی‌های پدر و مادرم که تکیه‌گاه اینجانب در زندگی بودند و رنج‌ها و مشتقهای فراوانی در این راه کشیدند سپاسگزارم و دستان پرمهر آنان را می‌بوسم.

از سرکار خانم گلزاری که زحمت تایپ این پایان نامه را کشیدند متشکرم.

الهه وحیدی‌کیا

شهریورماه ۱۳۹۱

چکیده

اندیس بهره‌وری مالم کوئیست تغییرات بهره‌وری یک واحد تصمیم گیرنده را بین ۲ دوره از زمان یعنی t و$t+1$ اندازه می‌گیرد. توسیع‌ها و تجزیه‌های بسیاری از اندیس مالم کوئیست صورت گرفته است، امّا هیچ یک از آن‌ها تغییر کارایی تخصیصی را که فرم مهمی از کارایی است، ذخیره نمی‌کند. از این رو اندیس بهره‌وری مالم کوئیست هزینه‌ای توسط مانیا داکیس و تاناسولیس در سال (۲۰۰۴) معرفی شد که سهم کارایی تخصیصی را در تغییرات بهره‌وری در نظر می‌گیرد. امّا اندیس مذکور مدور نیست، یعنی با محاسبه‌ی تغییرات بهره‌وری بین دوره‌های زمانی t و$t+1$ و بین دوره‌های زمانی $t+1$ و$t+2$، نمی‌توان تغییرات بهره‌وری بین دوره‌های زمانی t و$t+2$ را محاسبه کرد. از طرفی مؤلفه‌های دوره‌ی مجاور می‌توانند اندازه‌های متفاوتی از تغییرات بهره‌وری فراهم کنند که این باعث می‌شود برای اندازه‌گیری تغییرات بهره‌وری به میانگین هندسی متوسل شویم. همچنین وقتی تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی LP برای محاسبه‌ی اندیس استفاده می‌شوند، در حضور تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر نشدنی بودن می‌تواند اتفاق بیافتد. از این رو با الهام از اندیس بهره‌وری مالم کوئیست کلی، اندیس بهره‌وری مالم کوئیست هزینه‌ای کلی توسط دکتر توحیدی و همکاران در سال (۲۰۱۱) معرفی شد. اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای کلی تغییرات بهره‌وری را با رجوع به یک مرز هزینه‌ی مشترک محاسبه می‌کند. اندیس جدید مدورست و وقتی تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه‌ی اندیس استفاده می‌شوند، نشدنی بودن اتفاق نمی‌افتد. همچنین با توجه به منحصر بفرد بودن مرز هزینه، نیازی به استفاده از میانگین هندسی برای اندازه‌گیری تغییرات بهره‌وری بین دو دوره‌ی مورد نظر نیست و این مرز منحصر بفرد مقایسه را معنادار می‌کند. در این پایان نامه اندیس‌های هزینه‌ای مذکور و تجزیه‌هایشان معرفی شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی تخصیصی، مدور بودن، کارایی هزینه، اندیس مالم کوئیست.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2010: C14، C61.

مقدمه

اندیس بهره‌وری مالم کوئیست تغییرات بهره‌وری یک واحد تصمیم‌گیرنده را بین ۲ دوره‌ی زمانی اندازه می‌گیرد. ایده‌ی این اندیس توسط استن مالم کوئیست[1] مطرح شد. این اندیس برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط کیوز[2] و همکاران [1] مطرح شد و در سال ۱۹۸۹، فیر[3] و همکاران [6] اندیس مالم‌کوئیست بیان شده را به دو عامل تغییرات کارایی و تغییرات تکنولوژی واحد تحت ارزیابی در طول زمان تجزیه کردند و مدلهای ریاضی غیرپارامتری را برای محاسبه‌ی آن به کار بردند.

اندیس مالم کوئیست که توسط کیوز معرفی شد، مدور نیست یعنی با محاسبه‌ی تغییرات بهره‌وری بین دوره‌های زمانی t و $t+1$ و بین دوره‌های زمانی $t+1$ و $t+2$، نمی‌توان تغییرات بهره‌وری بین دوره‌های زمانی t و $t+2$ را محاسبه کرد. از طرف دیگر مؤلفه‌های دوره‌ی مجاور می‌توانند اندازه‌های متفاوتی از تغییرات بهره‌وری فراهم کنند.

فیر و کراسکوپف[4] در سال ۱۹۹۶ [5] شرایطی روی تکنولوژی‌های دوره‌ی مجاور قرار دادند تا اندیس در خاصیت مدور بودن صدق کند و به طور میانگین اندازه‌های یکسانی از تغییرات بهره‌وری فراهم کنند. امّا وقتی تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه‌ی این اندیس استفاده شد، LP نشدنی می‌توانست اتفاق بیافتد.

پاستور[5] و لول[6] در سال ۲۰۰۵ [9] یک اندیس کلی معرفی کردند که تکنولوژی آن همه‌ی مولدها در همه‌ی دوره‌های زمانی را در برمی‌گیرد. اندیس مذکور مدورست، LP نشدنی اتفاق نمی‌افتد و یک اندازه‌ی تنها از تغییرات بهره‌وری تولید می‌کند.

پرتلا[7] و تاناسولیس[8] در سال ۲۰۰۸ [10] اندیس فوق‌ـمالم کوئیست را مطرح کردند. این اندیس را می‌توان به مؤلفه‌های مدور از تغییر کارایی و تغییر تکنولوژیکی تجزیه کرد. اندیس فوق‌ـمالم کوئیست تغییرات بهره‌وری را با رجوع به یک فوق‌ـمرز اندازه می‌گیرد که همه‌ی واحدها در همه‌ی دوره‌های زمانی را شامل می‌شود. یکی از مزیت‌های اندیس فوق‌ـمالم کوئیست دستکاری ساده‌ی داده‌هاست که باعث می‌شود برای محاسبه‌ی اندیس تحت بازده به

1) Sten Malmquist 2) Caves 3) Fare 4) Grosskopf 5) Pastor 6) Lovell 7) Portela

8) Thanassoulis

مقیاس متغیر نشدنی بودن اتفاق نیافتد.

اندیس مالم کوئیست کاربردها و توسیع‌های بسیاری دارد، امّا هیچ یک از آن‌ها کارایی تخصیصی که فاصله‌ی بین هزینه‌ی حقیقی و مینیمم که یک واحد تولید به محض اینکه هر ناکارایی تکنیکی از آن واحد برطرف شود می‌تواند خروجی‌اش را فراهم کند، ذخیره نمی‌کند [4].

از این رو مانیاداکیس[1] و تاناسولیس در سال ۲۰۰۴ [8] یک اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای معرفی کردند که سهم کارایی تخصیصی را ذخیره می‌کند. اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای در عبارت‌هایی از هزینه به جای تابع‌های فاصله‌ی ورودی توسعه داده شده است و برای محاسبه‌ی آن از مدلهای LP غیرپارامتری استفاده شده است. امّا اندیس مذکور مدور نیست، LP نشدنی ممکن است اتفاق بیافتد و مؤلفه‌های دوره‌ی مجاور می‌توانند اندازه‌های متفاوتی از تغییرات بهره‌وری فراهم کنند.

لذا با الهام از اندیس بهره‌وری مالم کوئیست کلی در سال ۲۰۱۱ دکتر توحیدی و همکاران یک اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای کلی معرفی کردند [11] که تغییرات بهره‌وری را با رجوع به یک مرز هزینه‌ی مشترک محاسبه می‌کند و اندیس جدید بدون اینکه شرایط محدودکننده روی تکنولوژی‌ها یا داده‌ها تحمیل کند هر سه مشکل اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای را حل می‌کند. این پایان نامه به بررسی اندیس مالم کوئیست هزینه‌ای کلی می‌پردازد و در سه فصل نگاشته شده است.

فصل اوّل آن که به بیان تعاریف و مقدمات پرداخته شده، با استفاده از مراجعی که در متن به آن‌ها ارجاع داده شده است و کتاب تحلیل پوششی داده‌ها نوشته‌ی دکتر جهانشاهلو و همکاران [14] نگاشته شده است.
فصل دوم به معرفی اندیس مالم کوئیست و بعضی توسیع‌های آن می‌پردازد و بر اساس فصل ۱۱ کتاب کوپر و همکاران[2] [3] و دو مقاله‌ی زیر نگاشته شده است:

- Pastor J. T., Lovell C. A. K., A Global Malmquist Productivity index, Economic Letter 88 (2005), 266-271.

1) Maniadakis 2) Cooper

- Portela M. C. A. S., Thanassoulis E., A Circular meta-Malmquist index for measuring productivity, Ason Business School, Aston University, January 2008.

فصل سوم به معرفی اندیس‌های مالم کوئیست هزینه‌ای مذکور و تجزیه‌های آن‌ها می‌پردازد و براساس مقالات زیر نگاشته شده است:

- Maniadakis N., Thanassoulis E., A cost Malmquist productivity index, European Journal of Operational Research 154 (2004), 396-409.

- Tohidi G., Razavyan S., Tohidnia S., A global cost Malmquist productivity index using data envelopment analysis, Journal of the Operational Research Society, doi: 10.1057/ jors. 2011-23.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و مقدماتDEA

۱.۱ مقدمه

پیشرفت و نقش بی‌بدیل علم تحقیق در عملیات به جایی رسیده است که می‌توان از آن به عنوان ابزار بلامنازع هدایت و پیشرفت عرصه‌ی صنعت و یاری رسان مدیران در جهت نیل به اهداف متعالی خویش، نام برد. یکی از زاییده‌های تحقیق در عملیات شاخه‌ی برنامه ریزی خطی (LP)[1] می‌باشد که به علت قابلیت‌های بسیار بالای این مسائل، تحقیقات مؤثر و زیادی بر روی آن انجام گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا نموده است. مسأله‌ی ارزیابی عملکرد واحدها از زمان‌های دور مورد توجه کارشناسان و مدیران می‌باشد، از این رو یکی از زیرشاخه‌های برنامه‌ریزی خطی به نام علم تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[2] به این مهم می‌پردازد، که هدف آن ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU)[3] است.

اطلاع از عملکرد واحدهای تحت نظارت مدیر، مهمترین وظیفه مدیر در رابطه با واحدهای تصمیم‌گیرنده به منظور هدایت آنان است. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار عملکرد، اثرات عوامل بیرونی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد، تغییرات ناگهانی بر خط مشی به علت برخوردهای انفعالی با مشکلات حاد مانند بیکاری و غیره از جمله عواملی است که مدیر بدون بر خورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدهای تحت نظارت مطلع شده و تصمیم‌گیری مناسبی را

1) Linear Programming 2) Data Envelopment Analysis 3) Decision Making Unit

در جهت کارایی و بهره‌وری اتخاذ کند.

تا قبل از سال ۱۹۷۸ تحقیقات زیادی برای محاسبه‌ی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده یک سیستم صورت گرفته بود منظور از سیستم، مجموعه‌ای است که واحدهای تحت ارزیابی از آن انتخاب می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان دانشگاه را به عنوان سیستمی در نظر گرفت که واحدهای تصمیم‌گیری در آن دانشکده‌ها می‌باشند. عمده‌ی تحقیقات تا سال ۱۹۷۸ منجر به وجود آمدن روش‌های پارامتری[1] گردید. این روش‌ها اگر در برخی حالات خاص کارساز بودند ولی دو شکل عمده نظری و کاربردی، استفاده از آن‌ها را در حالات کلی غیرممکن می‌ساخت. یکی از مهمترین مشکلات این روش‌ها این است که فقط برای واحدهای با یک خروجی می‌توان از آن‌ها استفاده نمود. مشکل اساسی دیگر روش‌های پارامتری این است که شکل تابع تولید (تابعی که بیشترین خروجی را از ترکیب ورودی ها به دست می‌آورد) باید از قبل مشخص باشد که این ضعف بسیار بزرگی است، زیرا محدودیت‌های خاصی برای مسائل قائل می‌شود. همچنین روش‌های مختلف جهت پیدا نمودن پارامترها، توابع مختلفی را می‌دهد که تمیز دادن بهترین آن‌ها ممکن نیست. از طرفی تمایل منحنی تابع تولید، به سمت مشاهدات انباشته شده است. مشاهدات پرت، که ممکن است دقیق هم باشند، نقش زیادی در تعیین پارامترها ندارند. با توجه به مشکلات ذکر شده برای ارزیابی کارایی واحدها، بیشتر از روش غیرپارامتری استفاده می‌کنیم.

برای رفع مشکلات ذکر شده، در سال ۱۹۵۷ فارل[2] [7] تحقیقات گسترده‌ای انجام داد. در حقیقت فارل اولین کسی بود که تخمین تابع تولید را به طریق غیرپارامتری به دست آورد.

فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکارناپذیر حاکم بر علم تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه‌ای به نام مجموعه‌ی امکان تولید (PPS)[3] ساخت و مرز آن را تابع تولید نامید. هر واحد تصمیم‌گیرنده که روی این مرز قرار بگیرد کاراست و در غیر این صورت ناکارا تلقی می‌گردد.

در سال ۱۹۷۸ چارنز[4]، کوپر[5] و رودز[6] [2] بر پایهٔ کارهای فارل روش خلاقانه‌ای ارائه دادند که به مدل CCR برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری معروف گردید. این مدل پایه و اساس تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. پس از

1) Parametric Methods 2) Farrell 3) Production Possibility Set 4) Charnes 5) Cooper 6) Rhodes

معرفی مدل CCR مدل‌های دیگری نظیر مدل‌های BCC، FDH، SBM، مدل جمعی و غیره معرفی شدند. در این پایان‌نامه برخی از این مدل‌ها را معرفی می‌کنیم.

۲.۱ گزیده‌ای از اصول حاکم بر DEA

فرض کنید سیستم تحت نظارت، شامل n واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j $(j = ۱, \ldots, n)$ باشد که هر DMU، m ورودی[1] $x_j = (x_{۱j}, \ldots, x_{mj})$ $(j = ۱, \ldots, n)$ را برای تولید s خروجی[2] $y_j = (y_{۱j}, y_{۲j}, \ldots, y_{sj})$ $(j = ۱, \ldots, n)$ مصرف می‌نماید. البته لازم به ذکر است که تمام ورودی‌ها و خروجی‌های یک DMU نامنفی‌اند و هر DMU، حداقل یک ورودی مثبت و یک خروجی مثبت دارد.

برخی از اصول حاکم بر DEA عبارتند از:

۱) **متجانس بودن:** واحدهایی که عمل مشابه دارند و با مصرف ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌نمایند. به عنوان مثال، یک بانک را نمی‌توان با یک دانشگاه مقایسه کرد، زیرا این دو واحد متشابه نیستند. واحدهای تحت ارزیابی باید فعالیت‌های مشابهی داشته باشند و در عین حال، خروجی‌های مشابهی را نیز تولید کنند.

به تجربه ثابت شده است که اگر تعداد ورودی‌ها (m)، تعداد خروجی‌ها (s) و تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده (n) در رابطه‌ی $n \geq ۳(m + s)$ صدق کند، آنگاه نتایج قابل اطمینانی از تحلیل پوششی داده‌ها به دست می‌آید.

۳) **ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک زمان:** این اصل بیان کننده‌ی این مطلب است که همه‌ی واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک زمان باید ارزیابی شوند، زیرا ممکن است با ارزیابی آن‌ها در زمان‌های متفاوت، مقادیر کارایی به دست آمده به دور از واقعیت باشند.

1) Input 2) Output

اکنون قبل از ادامه‌ی مطلب به بیان برخی از توانایی‌های DEA می‌پردازیم:

۱) رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده

۲) ارائه واحدهایی جهت مقایسه‌ی کارایی و ارائه راهکارهای بهبود کارایی

۳) تعیین پیشرفت و پسرفت تکنیکی واحدها

۴) تخصیص بهینه‌ی منابع

۵) تحلیل حساسیت ورودی‌ها و خروجی‌ها

۶) تعیین پتانسیل‌های عملکردی

۳.۱ مجموعه امکان تولید (PPS)[1]

رابطه‌ی عملکرد یک سیستم با عوامل تأثیرگذار بر آن، به صورت تابعی تعریف می‌شود که به تابع تولید معروف است. تابع تولید[2] تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها بیشترین خروجی را می‌دهد. در سیستم‌های چند ورودی و یک خروجی، تابع تولید تابعی یک مقداری از دو بردار اثرگذار u و v می‌باشد که در آن u عوامل شناخته شده و v عوامل ناشناخته است ($y = F(u, v)$).

بردار u نیز می‌تواند از دو مؤلفه‌ی قابل کنترل و غیر قابل کنترل تشکیل گردد.

در حالتی که F تک مقداری نباشد تابع تولید به صورت زیر خواهد بود:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_s) = F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), \ldots, f_s(u, v))$$

بردارهای u و v، بردار $(y_1, \ldots, y_s)$ را تولید می‌کنند. بردارهای u و v را بردارهای ورودی و $(y_1, \ldots, y_s)$ را بردار خروجی می‌نامند. واضح است که به دست آوردن صورت دقیق ریاضی تابع فوق بسیار مشکل می‌باشد. به همین

1) Production Possibility Set 2) Production Function

دلیل فارل با استفاده از مشاهدات و اصول زیر، مجموعه‌ای به نام مجموعه‌ی امکان تولید ساخت و مرز آنرا تابع تولید نامید.

مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PPS = \{(x, y) | \text{خروجی } y \text{ بتواند توسط ورودی } x \text{ تولید شود}\}.$$

اصول زیر برای ساختن مجموعهٔی امکان تولید پذیرفته شده است:

۱) **اصل شمول مشاهدات:** به ازای هر $j \in \{۱, \cdots, n\}$، $(x_j, y_j) \in PPS$.

۲) **اصل بی‌کرانی اشعه:** به ازای هر $(x, y) \in PPS$ و به ازای هر عدد ثابت $\lambda \geq ۰$ داریم: $(\lambda x, \lambda y) \in \text{PPS}$.
اصطلاحاً به این اصل، اصل بازده به مقیاس ثابت [1] (CRS) می‌گویند.

۳) **اصل امکان‌پذیری:** اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \in PPS$، به ازای هر x و y که در آن $\bar{x} \geq x$ و $\bar{y} \leq y$ آنگاه $(x, y) \in PPS$.

۴) **اصل تحدب:** اگر $(x_۱, y_۱) \in PPS$ و $(x_۲, y_۲) \in PPS$ آنگاه به ازای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داریم:

$$\lambda(x_۱, y_۱) + (۱ - \lambda)(x_۲, y_۲) \in PPS.$$

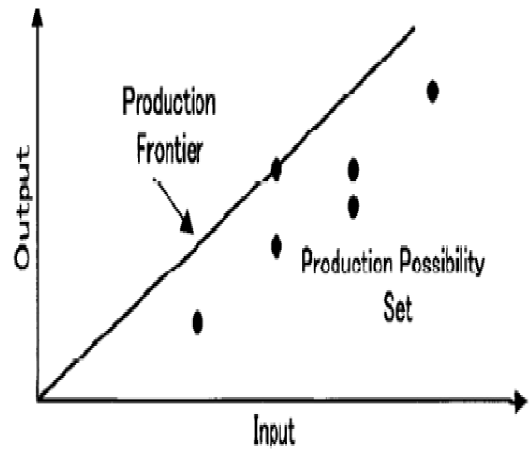
۵) **اصل کمینه درونیابی:** مجموعه‌ی امکان تولید کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول فوق صدق می‌کند.

۱.۳.۱ قضیه. مجموعهٔ منحصر به فردی که در پنج اصل فوق صدق می‌کند به صورت زیر است:

$$T_C = \{(x, y) : \ | x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, \ y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j \& \lambda_j \geq ۰, j = ۱, ۲, \cdots, n\}.$$

به مجموعه‌ی T_C، مجموعه‌ی امکان تولید مدل CCR می‌گویند و آن را با T_{CCR} نیز نمایش می‌دهند که در شکل (۱ـ۳ـ۱) [3] نمایش داده شده است.

1) Constant Returns to Scale



شکل ۱ـ۳ـ۱: مجموعه‌ی امکان تولید برای مدل CCR

۲.۳.۱ تعریف. بردار $z_{۱}$ غالب[1] بر بردار $z_{۲}$ است اگر و فقط اگر $z_{۲} \geq z_{۱}$ و $z_{۲} \neq z_{۱}$ در این صورت گوییم بردار $z_{۲}$ به وسیلهٔ بردار $z_{۱}$ مغلوب گردیده است.

به عبارت دیگر بردار $z_{۱}$ غالب بر بردار $z_{۲}$ است اگر $z_{۱j} \geq z_{۲j}$ $(j = ۱, \dots, n)$ و نامساوی حداقل برای یک مؤلفه به طور اکید برقرار باشد. فرض کنیم $\{۱, \dots, n\} \in ۰$.

۳.۳.۱ تعریف. $DMU_{۰}$ با بردار ورودی $x_{۰}$و خروجی $y_{۰}$ را کارای نسبی گوئیم اگر و فقط اگر هیچ امکان تولید $(x, y) \in PPS$ نتوان یافت که $(-x, y)$، $(-x_{۰}, y_{۰})$ را مغلوب کند.

۴.۳.۱ تعریف. $DMU_{۰}$ را کارای پاراتو-کوپمن[2] نامند اگر و فقط اگر امکان بهبود در هیچ یک از ورودی‌ها یا خروجی‌ها بدون بدتر شدن سایر ورودی‌ها یا خروجی‌ها وجود نداشته باشد.

۴.۱ مدل CCR

به طور کلی مدل CCR را می‌توان با دو ماهیت ورودی محور و خروجی محور بررسی کرد.

1) Dominate 2) Pareto-Kopman

۱.۴.۱ مدل CCR در ماهیت ورودی
اگر $DMU_\circ$ ناکارا باشد، از روش تصویر نمودن واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی یعنی $DMU_\circ$ روی مرز کارایی استفاده می‌کنیم و کاهش متناسب در ورودی‌ها را مشاهده می‌کنیم. هدف مدل CCR در ماهیت ورودی پیدا کردن DMU ای مجازی است که با حداقل ورودی ممکن بتواند خروجی $y_\circ$ راتولید کند. بنابراین، انقباض بردار ورودی $x_\circ$ به $\theta x_\circ$ می‌باشد، به طوری که بردار $\begin{bmatrix}\theta x_\circ \\ y_\circ\end{bmatrix}$ روی مرز PPS قرار بگیرد. بنابراین مسأله زیر را باید حل کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s\cdot t. \quad & (\theta x_\circ, y_\circ) \in T_C. \end{aligned} \qquad (۱-۴-۱)$$

با توجه به مجموعه‌ی T_C، مدل (۱ـ۴ـ۲) شکل گسترده‌ی مدل (۱ـ۴ـ۱) است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s\cdot t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{i\circ}; & i = ۱, ۲, \cdots, m \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{r\circ}; & r = ۱, ۲, \cdots, s \\ & \lambda_j \ge \circ; & j = ۱, ۲, \cdots, n. \end{aligned} \qquad (۲-۴-۱)$$

مدل (۱ـ۴ـ۲)را مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی می‌نامند.

۲.۴.۱ تعریف.
اگر مقدار بهینه‌ی تابع هدف در مدل (۱ـ۴ـ۲) برابر یک باشد ($\theta^* = ۱$)، آن گاه $DMU_\circ$ را کارای CCR می‌نامند. اگر $\theta^* < ۱$، آن گاه $DMU_\circ$ روی مرز کارایی قرار ندارد، لذا $DMU_\circ$ ناکاراست امّا اگر $\theta^* = ۱$ الزاماً $DMU_\circ$ کارای پاراتو-کوپمن نمی‌باشد. با معرفی متغییرهای کمکی، مدل (۱ـ۴ـ۲) را بازنویسی

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s \cdot t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i\circ}; \quad i = ۱, ۲, \cdots, m \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r\circ}; \quad r = ۱, ۲, \cdots, s \\ & \lambda_j \geq \circ, s_i^- \geq \circ, s_r^+ \geq \circ; j = ۱, ۲, \cdots, n, i = ۱, ۲, \cdots, m, r = ۱, ۲, \cdots s. \end{aligned} \qquad (۳-۴-۱)$$

اگر در مدل (۱ـ۴ـ۲) یا به طور معادل مدل (۱ـ۴ـ۳)، $\theta^* = ۱$ و حداقل یکی از متغیرهای کمکی مخالف صفر باشد، می‌توان نقطه‌ای (DMU مجازی) در T_C یافت به طوری که $DMU_\circ$ را مغلوب کند. به همین دلیل $DMU_\circ$، کارای پاراتو‌ـکوپمن نمی‌باشد. برای رفع این مشکل با تعریف ε در مدل CCR با ماهیت ورودی مدل زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=۱}^{m} s_i^- + \sum_{r=۱}^{s} s_r^+\right) \\ s \cdot t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i\circ}; \quad i = ۱, \cdots, m \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r\circ}; \quad r = ۱, \cdots, s \\ & \lambda_j \geq \circ,\ s_i^- \geq \circ,\ s_r^+ \geq \circ;\ j = ۱, ۲, \cdots, n,\ i = ۱, \cdots, m,\ r = ۱, \cdots, s. \end{aligned} \qquad (۴-۴-۱)$$

در مدل (۱ـ۴ـ۴)، ε عدد غیر ارشمیدسی بسیار کوچک مثبت می‌باشد. برای حل مدل (۱ـ۴ـ۴) معمولاً از یک روش دو مرحله‌ای استفاده می‌شود. در مرحله‌ی اول مدل (۱ـ۴ـ۲) را حل نموده و θ^* را به دست می‌آوریم.

در مرحله‌ی دوم با توجه به مشخص بودن θ^*، مدل (۱ـ۴ـ۵) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\ s \cdot t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}; \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}; \quad r = 1, 2, \cdots, s \\ & \lambda_j \geq 0,\ s_i^- \geq 0,\ s_r^+ \geq 0;\ j = 1, \cdots, n,\ i = 1, 2, \cdots, m,\ r = 1, 2, \cdots, s. \end{aligned} \tag{1-4-5}$$

۱.۴.۳ قضیه. DMU_o کارای پاراتوـکوپمن است اگر و تنها اگر $\theta^* = 1$ و مقدار بهینه‌ی مدل (۱ـ۴ـ۵) برابر صفر باشد.

۱.۴.۴ تعریف مجموعه‌ی مرجع[1] برای DMU_o ناکارا ($\theta^* < 1$) مجموعه مرجع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_o = \{j | \text{در یکی از جواب‌های بهینه در ارزیابی } DMU_o \text{ در مرحله‌ی دوم مثبت باشد } \lambda_j^*\}$$

۱.۴.۴ تعریف تابع فاصله ورودی. برای واحد تصمیم‌گیرنده با برادر ورودی x و خروجی y تابع فاصله‌ی ورودی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_i(y, x) = \sup\{\theta | (\frac{x}{\theta}, y) \in T_C,\ \theta > 0\}$$

که اندیس i جهت ورودی را نشان می‌دهد. $D_i(y, x)$ تکنولوژی تولید را کاملاً در این مفهوم مشخص می‌کند که $D_i(y, x) \geq 1$ شرط کافی برای $(x, y) \in T_C$ است و $D_i(y, x) = 1$ اگر و تنها اگر (x, y) روی مرز قرار داشته باشد به عبارت دیگر $D_i(y, x) = 1$ اگر و تنها اگر DMU با بردار ورودی x و بردار خروجی y کارا باشد.

$D_i(y, x)$ معکوس اندازه محور ورودی فارل[2] از کارایی تکنیکی است که از مدل (۱ـ۴ـ۲) به دست می‌آید.

1) Reference Set 2) Farrell

۵.۱ مدل CCR در ماهیت خروجی.

اگر $DMU_{\circ}$ ناکارا باشد، از روش تصویرکردن $DMU_{\circ}$ روی مرزکارایی استفاده می‌کنیم. هدف پیدا کردن واحد مجازی است که با حداکثر همان ورودی، حداکثر خروجی را تولید می‌کند.

بنابراین هدف مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varphi \\ s \cdot t. \quad & (x_{\circ}, \varphi y_{\circ}) \in T_C. \end{aligned} \qquad (۱-۵-۱)$$

با توجه به مجموعه‌ی تولید T_C، مدل (۱ـ۵ـ۲) معادل مدل (۱ـ۵ـ۱) است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varphi \\ s \cdot t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{i\circ}; && i = ۱, ۲, \cdots, m \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{r\circ}; && r = ۱, ۲, \cdots, s \\ & \lambda_j \geq \circ; && j = ۱, \cdots, n. \end{aligned} \qquad (۲-۵-۱)$$

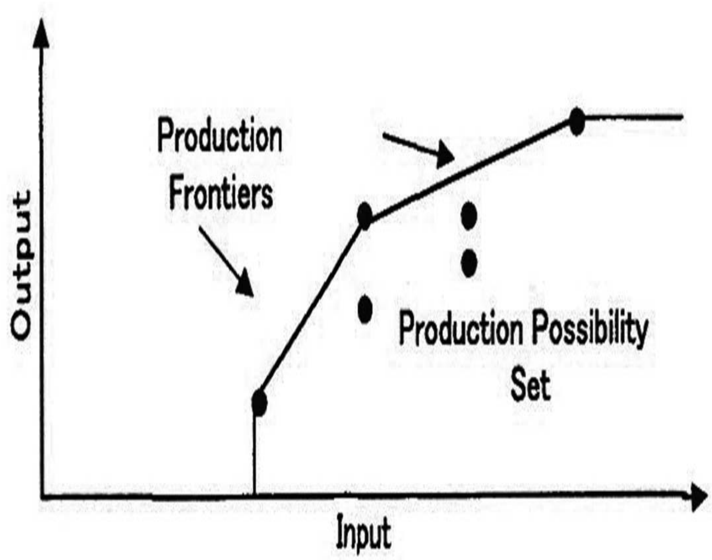
مدل (۱ـ۵ـ۲) را فرم پوششی CCR در ماهیت خروجی می‌گویند و سایر تعاریف مشابه آنچه در مدل CCR در ماهیت ورودی بیان شد، می‌باشد.

۶.۱ مدل BCC در ماهیت ورودی.

مدل BCC در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر[1]، چارنز و کوپر ارائه گردید. مجموعه امکان تولید این مدل با حذف اصل بی‌کرانی اشعه از مجموعه‌ی اصول موضوعی T_C به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$T_V = \{(x, y) | x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2 \cdots, n\}.$$

برای تشریح T_V، شکل (۱ـ۶ـ۱) را در نظر بگیرید.



شکل ۱ـ۶ـ۱: مجموعه‌ی امکان تولید برای مدل BCC

با در نظرگرفتن T_V به عنوان مجموعه‌ی امکان تولید، مشابه بخش (۱ـ۴ـ۱) مدل‌های مربوطه را به دست می‌آوریم.

مدل BCC در ماهیت ورودی به صورت مدل (۱ـ۶ـ۱) است.

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \theta \\ &s \cdot t. \quad (\theta x_0, y_0) \in T_V. \end{aligned} \qquad (1-6-1)$$

1) Banker