بسم الله الرحمن الرحيم
Designed By : Zainab Emad

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم فاطمه رجبی** رشته **ریاضی‌کاربردی** به شماره دانشجویی **۸۸۵۲۶۴۱۰۰۴** تحت عنوان: **«منظم سازی آرنولدی تیخونوف برای مسایل بد حالت خطی با مقیاس بزرگ»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمدرضا پیغامی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته **ریاضی کاربردی** است که در سال **۱۳۹۰** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر**سیدمحمد حسینی** ، از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

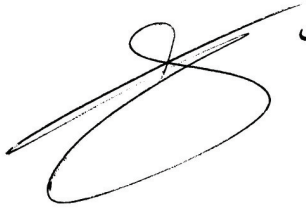
ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **فاطمه رجبی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد**

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **فاطمه رجبی**

تاریخ و امضا: **۱۳۹۰/۱۱/۱۱**



آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **فاطمه رجبی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** ورودی سال تحصیلی ۸۹-۸۸ مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.....

تاریخ: ۱۳۹۰/۱۱/۱۱

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گروه ریاضی کاربردی

منظم‌سازی آرنولدی تیخونوف برای مسائل بدحالت خطی با مقیاس بزرگ

نگارنده
فاطمه رجبی

استاد راهنما
دکتر سید محمد حسینی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم

به خانواده عزیزم

خداوندا...

جز به فضل و احسان تو دل نبسته ام. هر چه کرده ام به لطف و کرم وجود و بخشش تو بوده است. هر حسنی که در آن است از آن توست و هر کمی و کاستی برخاسته از ضعف و ناتوانی من. تو را حمد و سپاس.

وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمد حسینی که بسیار مهربان و صبور در طول انجام این پایان نامه همواره راهنمایی موثری داشتند کمال تشکر و سپاسگزاری بنمایم. همچنین از آقایان دکتر محمد رضا اصلاحچی بعنوان مدیر گروه و بعنوان داور و حضور در جلسه دفاع، دکتر عباس حیدری بعنوان داور و حضور در جلسه دفاع، دکتر محمد رضا پیغامی بعنوان داور و حضور در جلسه دفاع صمیمانه تشکر می نمایم. و نیز از سایر اساتید، ریاست محترم دانشکده ریاضی و کارکنان گرامی دانشکده که همواره مرا مورد لطف و محبت خود قرار دادند سپاسگزاری می کنم.

چکیده

روش منظم‌سازی تیخونوف یکی از روشهای مهم برای حل مسائل بد وضع گسسته خطی با ابعاد بزرگ است. این مسائل معمولا از گسسته‌سازی مسائل بد وضع پیوسته حاصل می‌شوند. ماتریس ضرایب اینگونه مسائل، بسیار بد حالت بوده و بردار سمت راست آنها آلوده به نویز است. و این امر باعث انتشار نویز در جواب مسئله می‌شود. بنابراین برای کم کردن اثر نویز روی جواب، از روشهای منظم‌سازی استفاده می‌کنند. کارایی روشهای منظم‌سازی وابسته به پارامتری است که اصطلاحاً، پارامتر منظم‌سازی گفته می‌شود. تعیین مناسب این پارامتر باعث معنی‌دار بودن جواب مسئله می‌شود.

روشهای مختلفی برای تعیین این پارامتر پیشنهاد شده است. یکی از روشهای مورد توجه روش اصل تفاوت (discrepancy principle) است، که در این پایان‌نامه برای تعیین پارامتر منظم‌سازی تیخونوف از آن استفاده می‌کنیم. همچنین به بررسی روش $L-$نوار برای پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی خواهیم پرداخت.

همچنین در این پایان‌نامه فرآیند دو قطری‌سازی لانچوز جایگزین تجزیه آرنولدی شده و در مثالهای عددی نشان داده شده است که تجزیه آرنولدی نیاز به محاسبه حاصلضرب بردار-ماتریس کمتری نسبت به دو قطری‌سازی لانچوز بوده و بنابراین هزینه محاسباتی آن کمتر است. از طرفی، از روشهای تکراری نیز برای حل اینگونه مسائل استفاده می‌کنند. یکی از این روشها که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم روش Range Restricted Generalized Minimal Residual (RRGMRES) است. هدف این پایان‌نامه مقایسه روشهای آرنولدی با روش منظم‌سازی بر پایه دو قطری‌سازی لانچوز و روش تکراری RRGMRES از نظر کارایی و هزینه محاسباتی می‌باشد و همچنین تاثیر پارامتر منظم‌سازی تیخونوف روی جواب حاصل از این روشها و خطای نسبی را بررسی می‌کنیم.

در مثالهای عددی روش تکراری RRGMRES را با روش منظم‌سازی تیخونوف از نظر کارایی و هزینه محاسباتی مقایسه کرده و تاثیر پارامتر منظم‌سازی را روی جواب حاصل و همینطور روی خطای نسبی بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که روش منظم‌سازی تیخونوف به دلیل وجود پارامتر در این روش از نظر کارایی و خطای نسبی بهتر عمل می‌کند. همچنین با دو مثال عددی کارایی روش $L-$نوار را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که برای مسائل بزرگ از نظر هزینه محاسباتی این روش بسیار مناسب می‌باشد.

کلمات کلیدی: مسائل بد وضع گسسته خطی، منظم‌سازی ، تجزیه آرنولدی، اصل تفاوت، مسئله وارون.

فهرست مطالب

فهرست مطالب آ

لیست تصاویر پ

لیست جداول ث

۱ مقدمه ۱

۲ مفاهیم پایه ۴

۱.۲ مسائل بدوضع گسسته خطی ۵

۲.۲ روشهای زیر فضای کریلف ۸

۳.۲ تجزیه آرنولدی ۹

۴.۲ دو قطری‌سازی لانچوز ۱۱

۵.۲ ماتریسهای دوری و توپلیتز ۱۳

۶.۲ مات‌زدایی از تصویر ۱۹

۷.۲ روش تکراری RRGMRES ۲۲

۳ گسسته‌سازی معادلات انتگرالی ۲۶

۱.۳ انتگرال عددی گاوس لاگور ۲۷

۲.۳ روش گالرکین ۳۰

۴ منظم سازی تیخونوف ۳۱
۱.۴ آرنولدی تیخونوف محدود شده RRAT ۳۴
۲.۴ روش آرنولدی تیخونوف AT ۳۶
۳.۴ روش تیخونوف بر اساس تجزیه دو قطری سازی لانچوز (**LBDT**) ۳۷
۴.۴ تخمین پارامتر منظم سازی ۴۱
۱.۴.۴ روش اصل تفاوت ۴۲
۲.۴.۴ روش $L-$نوار ۴۹
۳.۴.۴ نتایج عددی ۵۵
۵.۴ نتیجه گیری ۶۰

۵ نتایج عددی ۶۲
۱.۵ نتایج عددی برای مسئله مات زدایی ۶۷
۲.۵ نتیجه گیری ۷۲

مراجع ۷۶

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۲

لیست تصاویر

۱.۲ نمودار یک نویز سفید و مقادیر تکین مسئله Baart(۱۰۰) ۷
۲.۲ نمودار مقادیر تکین سمت راست ماتریسbaart با بعد ۱۰۰ . . . . . ۸

۱.۴ نمودار مقادیر تکین ماتریس ضرایب دستگاه خطی (۵۵.۴) ۵۶
۲.۴ بردار سمت راست ۵۷
۳.۴ نمودار جواب تقریبی حاصل از روش RRAT با استفاده از روش L–نوار برای تخمین پارامتر منظم‌سازی ۵۸
۴.۴ نمودار مقادیر تکین ماتریس ضرایب دستگاه خطی (۵۷.۴) ۶۰
۵.۴ نمودار بردار سمت راست دستگاه (۵۷.۴) ۶۱
۶.۴ نمودار جواب تقریبی حاصل از روش RRAT با استفاده از روش $L-Ribbon$ برای تخمین پارامتر منظم‌سازی ۶۱

۱.۵ نمودار جواب دقیق و جوابهای تقریبی بدست آمده از روشهای RRAT و AT و RRGMRES و LBDT. ۶۴
۲.۵ نمودار تاثیر پارامترمنظم‌سازی روی خطای نسبی در مثال baart ۶۶
۳.۵ نمودار جواب دقیق و جوابهای تقریبی بدست آمده از روشهای RRAT و AT و RRGMRES و LBDT. ۶۷
۴.۵ نمودار تاثیر پارامترمنظم‌سازی روی خطای نسبی در مثال $i-laplace$ ۶۸
۵.۵ نمودار تابع گسترش نقطه ای ۶۹
۶.۵ تصویر دقیق و مات شده آلوده به نویز برای مسئله satellite به ترتیب از چپ به راست ۷۰
۷.۵ تصاویر بازسازی شده توسط روش‌های AT و RRAT و LBDT و RRGMRES برای مسئله satellite ۷۳

۸.۵ تصویر دقیق و مات شده آلوده به نویز برای مسئله Cameraman به ترتیب از چپ به راست ۷۴
۹.۵ تصاویر بازسازی شده توسط روش‌های AT و RRAT و LBDT و RRGMRES برای مسئله Cameraman ۷۵

لیست جداول

۱.۲ الگوریتم آرنولدی ۱۱
۲.۲ الگوریتم لانچوز ۱۳
۳.۲ الگوریتم RRGMRES ۲۵

۱.۵ نتایج عددی برای مسئله ilaplace(۱۰۰) با روش‌های ارائه شده ۶۳
۲.۵ نتایج عددی برای مسئله baart(۲۰۰) با روش‌های ارائه شده ۶۵
۳.۵ نتایج حاصل از مات زدایی برای مسئله Satellite با روش‌های ارائه شده . . . ۶۹
۴.۵ نتایج حاصل از مات زدایی برای مسئله cameraman با روش‌های ارائه شده . ۷۰

فصل ۱

مقدمه

در بسیاری از علوم و مهندسی معادلاتی به صورت

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad x, b \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۱}$$

پدید می‌آیند که لازم است تا یک تقریب مناسبی از جواب این دستگاه بدست آوریم که در آن ماتریس A بسیار بدحالت بوده بدین معنی که تعدادی از مقادیر تکین آن حول صفر بوده و ممکن است به صفر برسند و این مقادیر تکین نزدیک به صفر، بسیار نزدیک هم می‌باشند به طوری که به آسانی نمی‌توان بین دو مقدار تکین اختلاف قابل ملاحظه ای نسبت به مقادیر تکین دیگر پیدا کرد. همچنین بردار سمت راست آلوده به نویز است. اینگونه مسائل از گسسته‌سازی مسائل بدوضع پیوسته مانند معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول بدست می‌آیند و آنها را مسائل بدوضع گسسته خطی گویند [۲۲].

بدحالتی ماتریس همراه با وجود نویز در سمت راست باعث بوجود آمدن خطای بسیار بزرگ در جواب مسئله می‌شود. و همین عامل باعث می‌شود که با روشهای معمول نتوان تقریب خوبی از جواب دستگاه پیدا کرد. برای رفع این مشکل و غلبه بر عامل نویز در جواب از منظم‌سازی استفاده می‌کنند.

یکی از روشهای مهم منظم‌سازی ، روش منظم‌سازی تیخونوف است [۱۴، ۲۲]. کارایی این روش وابسته به پارامتری است که آن را پارامتر منظم‌سازی می‌گویند و حساسیت جواب به اندازه

نویز در بردار سمت راست را نشان می‌دهد بدین معنی که تغییرات کوچک در بردار سمت راست باعث تغییرات بزرگی در جواب مسئله می‌شود و بنابراین جواب تقریبی از جواب واقعی فاصله زیادی گرفته و خطا بزرگ می‌شود و به همین دلیل پارامتر منظم‌سازی باید به‌درستی تخمین زده شود.

یکی از روشهای تخمین این پارامتر که به بررسی آن می‌پردازیم روش اصل تفاوت است که به اندازه (نرم) نویز موجود در داده‌های سمت راست وابسته است و به آسانی تفاوت بین جواب‌های روشهای مختلف را مقایسه می‌کند. روش‌های دیگری نیز وجود دارند که به اندازه نویز نیازی ندارند، از بین این روشها می‌توان به روش اعتبار متقابل و L -خم و در صورتی که مسئله بزرگ باشد می‌توان به L- نوار نیز اشاره کرد. در بین روشهایی که به اندازه نویز نیازی ندارند به بررسی روشL-نوار و تفاوت آن با روش L -خم می‌پردازیم و دلیل استفاده از آن برای تخمین پارامتر منظم‌سازی را بیان می‌کنیم و نشان خواهیم داد این روش با استفاده از فرآیند لانچوز انجام می‌گیرد و برای مسائل با اندازه بزرگ برای کاهش هزینه‌های محاسباتی و نتایج بهتر و قابل قبول استفاده از L -نوار بسیار به صرفه خواهد بود.

در روش اصل تفاوت از روش‌های صفر یابنده مثل نیوتن و همگرای مرتبه سه برای پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی استفاده می‌کنند اما به دلیل بزرگ بودن این مسائل استفاده از آنها از نظر هزینه محاسباتی به صرفه نیست، برا ی حل این مشکل در روش‌های منظم‌سازی تیخونوف پیشنهاد شده است تا از تجزیه آرنولدی برای کوچک کردن ابعاد مسئله استفاده شود یکی از دلایل مهم استفاده از این تجزیه این است که در این روش نیاز به ماتریس کمکی به عنوان پیش‌حالت‌ساز نداریم.

زیرا یکی از مشکلات مهم برای مسائل بدوضع گسسته چگونگی ساختن پیش حالتهای مناسب است. در مسائل بدوضع گسسته به دلیل وجود نویز، استفاده از پیش‌حالت‌سازی، نه تنها سرعت رسیدن به جواب را افزایش نخواهد داد بلکه باعث انتشار نویز در جواب خواهد بود [۲].

یکی از مهمترین اهداف پایان‌نامه حاضر مقایسه کیفیت جوابهای تقریبی و تعداد محاسبات حاصلضرب بردار-ماتریس مورد نیاز توسط روش‌های منظم‌سازی تیخونوف از جمله Range Restricted Arnoldi Tikhonov(RRAT) و LBDT و روش تکراریRRGMRES است. در این

پایان‌نامه تاثیر پارامتر منظم‌سازی روی جواب تقریبی حاصل، خطای نسبی و هزینه محاسباتی بررسی خواهد شد و نشان داده می‌شود اگر پارامتر منظم‌سازی بطور مناسب تخمین زده شود باعث جلوگیری از پخش نویز در جواب حاصل شده و از این لحاظ روشهای منظم‌سازی تیخونوف نسبت به روش تکراری RRGMRES از نظر جواب تقریبی و خطای نسبی عملکرد بهتری دارد.

روشهای مستقیم برای حل مسائل بزرگ مناسب نمی باشند زیرا در آنها خطا به سرعت منتشر می‌شود و باعث ایجاد خطا در جواب مسئله می‌شود بنابراین از روشهای تکراری برای حل اینگونه مسائل استفاده می‌کنند که هزینه محاسباتی کمتری دارند.

همچنین روش‌های آرنولدی تیخونوف را با روش LBDT از لحاظ هزینه محاسباتی مقایسه کرده و نتایج عددی نیز نشان می‌دهند که روش RRAT هزینه محاسباتی کمتری نسبت به روش LBDT دارد و از نظر محاسباتی استفاده از آن به صرفه‌تر است.

مثالهای عددی محاسبه شده نشان می‌دهند که روش آرنولدی تیخونوف نیازمند محاسبه‌ی حاصلضرب بردار-ماتریس کمتری نسبت به روش Lanczos Bidiagonalization Tikhonov (LBDT) است که به دلیل ابعاد بزرگ ماتریس این موضوع دارای اهمیت فراوانی می‌باشد.

در ادامه ساختار پایان نامه به صورت زیر است. در فصل دوم، مفاهیم اولیه و ضروری مورد بحث قرار می‌گیرد. در فصل سوم، روش‌هایی برای گسسته‌سازی معادلات انتگرالی بیان می‌کنیم. در فصل چهارم، مفهوم منظم‌سازی و روشهای منظم‌سازی تیخونوف با استفاده از فرآیند آرنولدی تیخونوف و فرآیند لانچوز بررسی خواهد شد و همچنین تخمین پارامتر منظم‌سازی با ارائه روش اصل تفاوت و روش L-نوار بررسی می‌شود. در فصل پنجم، نتایج عددی حاصل از مقایسه روشهای گفته شده برای معادلات انتگرالی و همچنین مات‌زدایی از تصاویر ارائه خواهد شد.

فصل ۲

مفاهیم پایه

همانطور که گفته شد، در حل مسائل بدوضع خطی به صورت

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad x, b \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۲}$$

بدحالتی ماتریس همراه با نویز در بردار سمت راست باعث می‌شود تا خطاهای بسیار کوچک موجود در بردار سمت راست باعث بوجود آمدن خطاهای بسیار بزرگ در جواب مسئله شوند. به عنوان نمونه‌ای از اینگونه مسائل می‌توان به گسسته‌سازی معادلات انتگرالی به‌صورت

$$\int_a^b K(s,t)f(t)dt = g(s) \tag{۲.۲}$$

اشاره کرد که در آن، g خروجی حاصل از ورودی f در سیستم است و K نقش تجهیزات آزمایشگاهی را بازی می‌کند (مثلا نقش دوربین در مقابل نقطه نورانی در مسائل پردازش تصویر). هدف مسئله (۲.۲) بدست آوردن ورودی f از روی خروجی g است که به اینگونه مسائل، مسائل وارون می‌گویند [۲۲].

در حالت کلی معادله انتگرالی (۲.۲) ممکن است به‌صورت تحلیلی موجود نباشد و یا تنها مقدار $g(s)$ در تعداد متناهی نقطه موجود باشد. بنابراین مناسب‌ترین کار برای به‌دست آوردن f،

گسسته‌سازی آن است. هنگامی که سمت راست این معادله آلوده به نویز باشد، دستگاه حاصل از گسسته سازی به صورت (۱.۲) خواهد بود.

۱.۲ مسائل بدوضع گسسته خطی

برای تعریف بدوضعی یک مسئله، ابتدا مسئله $F(x,d)=۰$ را با مجموعه داده d که جواب مسئله یعنی x به آن وابسته است و F تابعی است که رابطه بین x و d را نشان می‌دهد، بررسی می‌کنیم. منطبق بر نوع مسئله متغیرهای x و d ممکن است اعداد حقیقی، بردار یا تابع باشند. اگر F و d مشخص و x نامعین باشد یک مسئله مستقیم نامیده می‌شود و اگر F و x مشخص و d نامشخص باشد یک مسئله وارون نامیده می‌شود [۳۱]. مفهوم یک مسئله خوش‌وضع که توسط هادامارد در اوایل قرن بیستم ارائه شد بدین صورت بیان شده است، یک مسئله خوش‌وضع است اگر در شرایط زیر صدق کند [۲۲]:

۱. مسئله دارای جواب باشد.

۲. مسئله دارای جواب یکتا باشد.

۳. جواب x به طور پیوسته به داده‌های d وابسته باشد.

شرط اول و دوم به ترتیب پوشا و یک به یک بودن تابع F را نشان می‌دهد و شرط سوم بدین معنی است که اختلال کوچک در داده d باعث تغییرات کوچک در جواب x شده باشد، به عبارتی اگر تغییرات δd در داده باعث تغییرات δx در جواب x شود به طوریکه $F(x+\delta x, d+\delta d)=۰$، آنگاه

$$\forall \eta > ۰, \exists K(\eta,d) : \|\delta d\| < \eta \Longrightarrow \|\delta x\| \leq K(\eta,d)\|\delta d\|$$

نرمهای استفاده شده برای x و d به دلیل نوع این متغیرها ممکن است با هم منطبق نباشند.

با این تعریف از مسئله خوش وضع، به طور ساده می‌توان بیان نمود که مسئله بدوضع مسئله‌ای است که خوش وضع نباشد یعنی در شرایط گفته شده صدق نکند.

معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول یک نمونه از مسائل بدوضع هستند. اولین قدم برای حل اینگونه معادلات، گسسته‌سازی آنها است. فرم گسسته آنها به صورت

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{۳.۲}$$

بوده که در آن A بدحالت و بردار سمت راست b آلوده به نویز است یعنی $b = \bar{b} + e$، که در آن $\bar{b}$ بدون خطا و e نشان دهنده نویز است. به اینگونه دستگاهها که حاصل گسسته‌سازی یک مسئله بدوضع هستند، مسائل بدوضع گسسته خطی گویند[۴].

تجزیه مقادیر تکین (SVD) برای ماتریس A می‌تواند اطلاعات خوبی در تحلیل جواب به‌دست دهد.

تجزیه SVD ماتریس A به صورت

$$A = U\Sigma V^T, \tag{۴.۲}$$

است، که در آن $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس قطری با عناصر قطری نزولی نامنفی است، یعنی

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq ... \geq \sigma_n \geq ۰$$

همچنین ماتریس‌های $V = [v_۱, ..., v_n]$ و $U = [u_۱, ..., u_n]$ متعامد نرمال هستند و v_i و u_i به ترتیب بردارهای تکین راست و چپ A نامیده می‌شود [۱۷].

وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد، مقادیر تکین A نزدیک هم بوده و اکثر آنها نیز حول نقطه صفر تجمع خواهند کرد. و در نتیجه ماتریس حاصل بدحالت بوده و به اغتشاشات در داده‌ها حساس خواهد بود.

در اینجا مفروضات زیر را برای دستگاه

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad x, b \in \mathbb{R}^n \tag{۵.۲}$$

خواهیم داشت:

۱. فرض بر این است که نویز e، یک نویز سفید است. نویز سفید یک متغیر تصادفی مستقل است که هر یک از مولفه‌های این نویز دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ است.