دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

زیرکلاسی از توابع همساز در ارتباط با توابع فوق هندسی تعمیم یافته رایت

استاد راهنما:

دکتر شهرام نجف زاده

استاد مشاور:

دکتر اصغر رحیمی

پـژوهشگر:

روح الله ولی زاده زارنجی

مرداد ماه ۱۳۹۰

شماره پایان نامه: ۱۷

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت .

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر
توانشان رفت تا به توانایی برسم و موهایشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

و

همسفر مهربانم

که وجودش مایه آرامش زندگی ام می باشد.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر شهرام نجف زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این پایان نامه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر علی عبادیان که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسرم، برادران و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

روح الله ولی زاده زارنجی

مرداد ۱۳۹۰

نام خانوادگی: ولی زاده زارنجی نام: روح الله

عنوان پایان‌نامه: زیرکلاسی از توابع همساز در ارتباط با توابع فوق هندسی تعمیم یافته رایت

استاد راهنما: دکتر شهرام نجف زاده

استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۰ تعداد صفحه:۷۹

کلیدواژه‌ها: توابع تک ارز همساز، تابع فوق هندسی تعمیم یافته رایت، کرانهای دگرشکلی، نقاط نهائی، ضرب پیچشی،خاصیت شمول

چکیده: در این پایان نامه ابتدا توابع همساز ،تك ارز و خواص هندسی آنها و بسط سری این توابع را مطالعه می کنیم سپس با استفاده از حاصل ضرب پیچشی و تابع فوق هندسی تعمیم یافته رایت زیرکلاسی جدیدی از توابع تك ارز همساز را تعریف می کنیم. سعی می شود در خصوص این کلاس خواص جالبی از جمله کران ضرایب، نتایج شمول و خواص هندسی دیگری را اثبات مي كنيم. کارهای این پایان نامه بر اساس مقاله سال ۲۰۰۷ تحت عنوان زیر کلاسی از توابع همساز در ارتباط با تابع فوق هندسی تعمیم یافته رایت که توسط *G.Murugusundaramoorthy and R.K.Raina* در ژورنال *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* چاپ شده، جمع آوری و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

فهرست مطالب

فهرست مطالب آ

۱ مفاهیم اولیه **۱**

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۲.۱ توابع تک ارز،ستاره‌گون و محدب ۶

۳.۱ توابع همساز ۲۰

۴.۱ پیروی دیفرانسیلی ۲۲

۲ قضایا و لم کمکی **۲۴**

۱.۲ ضرب پیچشي ۲۴

۲.۲ تابع هندسی گاوس ۲۵

۳.۲ قضایا و لم های کمکی ۳۰

۴.۲ برآورد ضرایب برای کلاس های مختلف ۳۴

۵.۲ تابع فوق هندسی رایت ۳۹

۶.۲ عملگر خطی $w_q^p[\alpha_1]$ ۴۱

۳ نتایج اصلی **۴۷**

۱.۳ شرایط ضرایب کرانها ۴۷

۲.۳ کرانهای دگرشکلی ۵۵

۳.۳ نتایج شمول ۶۳

مراجع **۶۸**

۴ ضمیمه **۶۹**

۱.۴ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۹

۲.۴ واژه‌نامه‌انگلیسی به فارسی ۷۰

پیشگفتار

این پایان نامه بر اساس مقاله

On A Subclass Of Harmonic Functions Associated With Wrights Generalized Hypergeometric Functions .

در ۴ فصل نوشته شده است .

در فصل اول مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است ، که شامل ۴ بخش است .
در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی از جمله قضیه مدول ماکزیمم و لم شوارتز را بیان می کنیم . در بخش دوم توابع تک ارز ، ستاره گون و توابع محدب را تعریف کرده سپس به بیان قضایای مهمی در این زمینه می پردازیم .
در بخش سوم ،مفهوم تابع همساز را که مفهوم مهمی در این پایان نامه می باشد را تعریف می کنیم ؛ سپس قضایای مربوط به این مفهوم را بیان می کنیم . در بخش چهارم مفهوم پیروی دیفرانسیلی را تعریف می کنیم . سپس قضایای ابتدایی مربوط به این مفهوم را بیان می کنیم .
فصل دوم شامل ۶ بخش می باشد .در بخش اول ضرب پیچشی را تعریف کرده و خواص مهم آن را بیان می کنیم . در بخش دوم به مفهوم تابع هندسی گاوس ، خواص و قضایای مهم آن می پردازیم . در بخش سوم قضایا و لم های کمکی را بیان می کنیم . در بخش چهارم برآورد ضرایب برای کلاسهای مختلف را مطرح نموده . در بخش پنچم تابع فوق هندسی رایت را که موضوع اصلی پایان نامه است را بیان
می کنیم . در بخش ششم عملگر خطی $w_P^q([\alpha_1],\gamma)$ که اکثر قضایای فصل سوم برای این عملگر بیان شده است را معرفی می کنیم .
فصل سوم شامل ۳ بخش می باشد . در بخش اول شرایط ضرایب کرانها را برای کلاسهای $w_{\mathcal{H}}([\alpha_1],\gamma)$ و $w_{\bar{\mathcal{H}}}([\alpha_1],\gamma)$ بیان و اثبات می کنیم . در بخش دوم کرانهای دگرشکلی و نقاط اکسترمم و قضایای این بحث را برای کلاس $w_{\bar{\mathcal{H}}}([\alpha_1],\gamma)$ مطرح می کنیم . در بخش سوم نتایج شمول را برای کلاس$w_{\bar{\mathcal{H}}}([\alpha_1],\gamma)$ بیان و بررسی می کنیم .
فصل چهارم نیز شامل واژه نامه و کتاب نامه می باشد .

فصل ۱
مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

در فصل اول مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است ، که شامل ۴ بخش است . در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی از جمله قضیه مدول ماکزیمم و لم شوارتز را بیان می کنیم . در بخش دوم توابع تک ارز، ستاره گون و توابع محدب را تعریف کرده سپس به بیان قضایای مهمی در این زمینه می پردازیم.

در بخش سوم، مفهوم تابع همساز را که مفهوم مهمی در این پایان نامه می باشد را تعریف می کنیم؛ سپس قضایای مربوط به این مفهوم را بیان می کنیم . در بخش چهارم مفهوم پیروی دیفرانسیلی را تعریف می کنیم . سپس قضایای ابتدایی مربوط به این مفهوم را بیان می کنیم .

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و $f : \Omega \to \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه،

$$\lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد و آن را با$f'(z_\circ)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f در نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر باشد، گوییم f

در Ω تحلیلی[1] است .

تعریف ۲.۱.۱. اگر $r > ۰$ و a یک عدد مختلط باشد،

$$D(a;r) = \{z : |z-a| < r\}$$

یک قرص مستدیرباز[2] به مرکز a وشعاع r است.$\bar{D}(a;r)$ بست $D(a;r)$ است و

$$D'(a;r) = \{z : ۰ < |z-a| < r\}$$

قرص سفته به مرکز a و شعاع r می‌باشد.

تبصره ۳.۱.۱. قرص واحد را درصفحه مختلط بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$\Delta = \{z : z \in C, |z| < ۱\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. گوییم مجموعه E در فضای توپولوژیك X ناهمبند است، هرگاه E اجتماع دو مجموعه ناتهي مانند A و B باشد که، $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \oslash$. مجموعه E در فضاي توپولوژیک X همبند است هرگاه ناهمبند نباشد. به عبارت دیگر مجموعه E را ناهمبند گوییم هرگاه دو مجموعه باز غیرتهي مانند A وB موجود باشند بطوریکه، $E \cap B \neq \oslash$ ، $E \cap A \neq \oslash$ ، $E \subset A \cap B$

تبصره ۵.۱.۱. از حالا به بعدحرف Ω ، یعنی یک مجموعه‌ی باز در صفحه است.

تعریف ۶.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند ناتهي در $\mathbb{C}$ را يك ناحیه گوییم.

تذکر ۷.۱.۱. رده تمام توابع تحلیلي در Ω را با$H(\Omega)$ نمایش مي دهیم.

---
[1] Analytic
[2] Open circular disc

تعریف ۸.۱.۱. (نگاشت همدیس) [۳] نگاشت پیوسته‌ای که اندازه زاویه بین خمهای مار بر یک نقطه مفروض $z_\circ$ را حفظ نماید، حافظ زاویه در نقطه $z_\circ$ گوییم. اگر $f(z)$ در $z_\circ$ حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خمهای مار بر نقطه $z_\circ$ را نیز حفظ نماید، گوییم $f(z)$ درنقطه $z_\circ$ همدیس است .

قضیه ۹.۱.۱. هر گاه $f : G \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه f در هر نقطه‌ی $z_\circ \in G$ که $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد، همدیس است.

برهان. رجوع شود به [۷] ■

مثال ۱۰.۱.۱. نگاشت $f(z) = z^{۲}$ در هر نقطه‌ $z_\circ \neq \circ$ همدیس است زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = ۲z$در $z_\circ$ مخالف صفر است. اما $f(z) = z^{۲}$ در نقطه $z = \circ$ که f' صفر می شود، همدیس نیست زیرا در واقع،

$$argf(z) = argz^{۲} = ۲argz$$

این نگاشت هر زاویه به راس مبدا مختصات را دو برابر می کند.

تبصره ۱۱.۱.۱. مجموعه‌ی توابع تحلیلی بر Δ را با $H(\Delta)$ نمایش داده و قرار می دهیم:

$$A_n = \{f \in H(\Delta) : f(z) = z + \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k z^k\}.$$

همچنین،

$$A_۱ = A = \{f \in H(\Delta) : f(\circ) = f'(\circ) - ۱ = \circ\} = \{f \in H(\Delta) : f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k\}$$

[۳] Conformal mapping

نشان دهنده مجموعه‌ی توابع تحلیلی نرمالیزه بر قرص واحد Δ می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲ . تابع تعریف شده‌ی f در Ω بوسیله سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$ یک سری مانند $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

تذکر ۱.۱.۱۳ . هرگاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f \in H(\Omega)$ و f' با سری توانی در Ω قابل نمایش است. در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آنگاه به ازای این z ها داریم:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n(z-a)^n.$$

قضیه ۱.۱.۱۴ . (قضیه مدول ماکزیمم[۴]) فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ در این صورت،

$$|f(a)| \leq Max\left|f(a+re^{i}\theta)\right| \qquad , \qquad -\pi < \theta \leq \pi \ .$$

تساوی در عبارت فوق برقرار است اگر و فقط اگر f در Ω ثابت باشد. در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد، مگر اینکه f تابع ثابت باشد.

برهان. رجوع شود به [۷] . ■

لم ۱.۱.۱۵ . (لم شوارتز) فرض کنیم $f \in H(\Delta)$ ، $f(0) = 0$ و به

[۴] Maximum Modulus Theorem

ازای هر $z \in \Delta$ ، $|f(z)| < ۱$. در این صورت

$$|f(z)| \leq |z| \qquad (z \in \Delta) \,, \qquad (۲)$$

و

$$\left|f'(۰)\right| \leq ۱ \,. \qquad (۳)$$

هر گاه نامساوی (۲) یا(۳) به ازای یک $z \in \Delta$ بر قرار باشد، آنگا ه $f(z) = \lambda z$ که در آن λ ثابت است و$|\lambda| = ۱$. به تعبیر هندسی، فرض این است که f یک نگاشت تحلیلی از Δ بتوی Δ است که مبدا را ثابت نگه می دارد، بخشی از نتیجه این است که f یک دوران است یا هر نقطه $z \in \Delta - \{۰\}$ را از هرچه که بود. به مبدا نزدیکتر می سازد.

برهان. رجوع شود به [۷] ■

تذکر ۱.۱.۱۶ . تابعی که در لم شوارتز صدق کند، به تابع شوارتز[۵] معروف است.

قضیه ۱.۱.۱۷ . (قضیه‌ی مساحت [۶])هرگاه $F \in H(\Delta - \{۰\})$ ، FدرΔ یک به یک باشد و

$$F(z) = \frac{۱}{z} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n \quad , \qquad (z \in \Delta) \,,$$

آن‌گاه،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n|a_n|^۲ \leq ۱ \,.$$

برهان. رجوع شود به [۷] ■

[۵] Schwarz function

[۶] Area Theorem

۲.۱ توابع تک ارز،ستاره‌گون و محدب

تعریف ۱.۲.۱. تابع $f(z)$ را روی Δ تک ارز[۷] گوییم هرگاه برای هر z_1 و z_2 در Δکه $z_1 \neq z_2$داشته باشیم، $f(z_1) \neq f(z_2)$.گاهی اوقات نشان دادن اینکه تابع مختلط f تك ارز است مشکل می باشد. در سال ۱۹۷۳ کیدریاشف [۸] ماکزیمم مقدار M را چنان پیدا کرد که اگر نامساوی زیر برقرار باشد،

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq M$$

f یك تابع تك ارز است . وی همچنین نشان داد اگر $M = M_0 = 3/055...$ ریشه ی معادله ی زیر باشد،

$$[M(M-2)^3]^{\frac{1}{2}} - 3(3-M)^2 = 12$$

و

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq M_0 = 3/055...$$

آنگاه f در Δ تك ارز است.

ماکزیمم مقدار M نمیتواند بیشتر از π باشد، بعنوان مثال تابع $f(z) = e^{\lambda z}$ در شرط $\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| = |\lambda|$ صدق می کند، این تابع تك ارز است اگر و تنها اگر $|\lambda| \leq \pi$

قضیه ۲.۲.۱. (قضیه نگاشت باز)[۹] فرض کنیم Ω یک ناحیه باشد و $f \in H(\Omega)$، در این صورت $f(\Omega)$ یا یک ناحیه است یا یک نقطه.

[۷] Univalent
[۸] Kudryashov
[۹] Open maping Thorem

برهان. [۷] ■

تعریف ۳.۲.۱. تابع $f(z)$ را در نقطه$z_{\circ} \in \Omega$موضعا تک ارز گو ییم، هرگاه در یک همسایگی $z_{\circ}$تک ارز باشد.

مثال ۴.۲.۱. تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + ...$ را در نظر می گیر یم. این تابع در Δ تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه[۱۰] معروف است.

تذکر ۵.۲.۱. یک تابع تحلیلی روی یک دامنه ممکن است موضعاً تک ارز باشد، اما تک ارز نباشد.

مثال ۶.۲.۱. تابع $f(z) = z^2$ در دامنه‌ی $U = \{z : 1 < |z| < 2 \ , \ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ موضعاً تک ارزاست، اما تک ارز نیست.

تعریف ۷.۲.۱. یک نامساوی دقیق [۱۱]است اگر به ازای حداقل یک تابع، آن نامساوی تبدیل به مساوی شود.

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک ارز fکه در دیسک $\Delta = \{z : z \in \mathbb{C} \ |z| < 1\}$ تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کنند را با Sنمایش می دهیم. می توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر است،

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad |z| < 1 \ .$$

[۱۰] Koebe function
[۱۱] Sharp

قضیه ۹.۲.۱. به ازای هر مجموعه باز Ω در صحفه مختلط، هر تابع تحلیلی fقابل نمایش به صورت یک سری توانی روی Ω است.

برهان. رجوع شود به [۷] ■

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر $f \in H(\Omega)$ ، $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ و وجود داشته باشد یک تابع تحلیلی مانند g بطوریکه$f = e^{g}$. آنگاه $\varphi \in H(\Omega)$ وجود دارد، بطوریکه$f = \varphi^{۲}$.

برهان. رجوع شود به [۷] ■

تذکر ۱۱.۲.۱. خواص مربوط به کلاس $\mathcal{S}$:

الف) اگر $|\alpha| = ۱$، $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = \bar{\alpha} f(\alpha z)$ ، آنگاه $g \in \mathcal{S}$.

ب) اگر $f \in \mathcal{S}$ و وجود داشته باشد $g \in \mathcal{S}$ ، آنگاه برای هر $z \in \Delta$ داریم $g^{۲}(z) = f(z^{۲})$.

برهان. الف)چون f یك تابع یك به یك است پس gنیز یك به یك است. چون $f \in \mathcal{S}$ است پس fداراي نمایشی به صورت $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} b_n z^n$ است. لذا با توجه به تعریف تابع g داریم.

$$g(z) = \bar{\alpha} f(\alpha z) = \bar{\alpha}(\alpha z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n (\alpha z)^n)$$

$$= |\alpha|^{۲} z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n \alpha^n \bar{\alpha} z^n$$

$$= z + \sum_{n=۲}^{\infty} b_n z^n \ .$$

همچنین تابع gدر شرایط نرمالیزه صدق می کند. یعنی $g(۰) = g'(۰) - ۱ = ۰$.پس $g \in \mathcal{S}$.

ب) برای اثبات تابع φ را به شکل $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ تعریف می کنیم. چون $f \in \mathcal{S}$، پس دارای نمایشی بفرم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$است. پس $\varphi(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}$.

طبق شرایطی که داریم. یعنی$\varphi(۰) = ۱$ ، $\varphi \in H(\Omega)$ و φهیچ صفری در Δ ندارد. در نتیجه

$\frac{1}{\varphi} \in H(\Omega)$. لذا طبق قضیه (۱۰.۲.۱) $h \in H(\Omega)$ وجود دارد، بطوریکه

$\varphi(z) = h^{۲}(z) = \frac{f(z)}{z}$.چون ۱ $= \varphi(۰) = h^{۲}(۰)$ پس۱ $= h(۰)$.

حال تابع g موردنظر را به صورت$g(z) = zh(z^{۲})$ تعریف می کنیم. و شرط قضیه را بررسی می کنیم .

$$g^{۲}(z) = z^{۲}h^{۲}(z^{۲}) = z^{۲}\varphi(z^{۲}) = z^{۲}\frac{f(z^{۲})}{z^{۲}} \quad .$$

پس $g^{۲}(z) = f(z^{۲})$. حال کافی است نشان دهیم $g \in \mathcal{S}$. ابتدا شرایط نرمالیزه را بررسی می کنیم.

$$g(۰) = ۰ \quad , \quad h(۰) = ۰ \quad , \qquad g\prime(z) = h^{۲}(z) + ۲z^{۲}h'(z^{۲}) \quad .$$

پس.

$$g\prime(۰) = h(۰) + ۰ = h(۰) = ۱ \qquad \Rightarrow g\prime(۰) = ۱$$

اگر نشان دهیم تابع g یك به یك است. اثبات قضیه تمام خواهد شد.

فرض کنیم $z, w \in \Delta$ باشند. و $g(z) = g(w)$ نشان می دهیم $z = w$.

$$g(z) = g(w) \Rightarrow g^{۲}(z) = g^{۲}(w) \Rightarrow f(z^{۲}) = f(w^{۲})$$

چون f یك به یك است. پس

$$z^{۲} = w^{۲} \to z = \pm w$$

اگر $z = w$ باشد g یک به یک است. حال یک به یک بودن g را در حالت $z = -w$ بررسی می کنیم.

$$g(z) = zh^{۲}(z) = g(w) \Rightarrow zh(z^{۲}) = -wh(w^{۲}) = -g(w)$$

$$\Rightarrow g(z) + g(w) = ۰ \Rightarrow ۲g(z) = ۰ \Rightarrow g(z) = ۰ \Rightarrow g(w) = ۰$$

پس $g(z) = g(w) = 0$.اما در دایره واحد تنها صفر تابع gهمان نقطه صفر است.

لذا $z = w = 0$. پس g یک به یک است. ■

تذکر ۱.۲.۱۲ . حال به معرفی تبدیلات اولیه می پردازیم که تحت آن تبدیلات، خانواده $\mathcal{S}$ حفظ می شوند:

الف) تزویج: [۱۲] اگر $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + ...$ آنگاه $g \in \mathcal{S}$.

ب) دوران: [۱۳] اگر $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$. آنگاه $g \in \mathcal{S}$.

ج)انبساط: [۱۴] اگر$f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = r^{-1}f(rz)$ ، که $0 < r < 1$.آنگاه $g \in \mathcal{S}$

د) خود ریختی دیسکی: [۱۵] اگر $f \in \mathcal{S}$ و

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)}, \qquad |\alpha| < 1 .$$

آنگاه $g \in \mathcal{S}$

ه)تبدیل ریشه دوم: [۱۶] اگر $f \in \mathcal{S}$ و$g(z) = \sqrt{f(z^2)}$. آنگاه $g \in \mathcal{S}$

و) تبدیل مقدار حذف شده: اگر $f \in \mathcal{S}$ و$f(z) \neq \gamma$. آنگاه

$g(z) = \frac{\gamma f(z)}{\gamma - f(z)}$ به $\mathcal{S}$ تعلق دارد.

قضیه ۱.۲.۱۳ . (قضیه بابیر باخ) [۱۷] اگر $f \in S$آنگاه ، $|a_2| \leq 2$.

برهان. رجوع شود به [۷] ■

تعریف ۱.۲.۱۴ . تابع $p-$ ارز، تابعی است که هر مقداری را p بار می پذیرد. اگر تابعی p

---
[۱۲] Conjugation
[۱۳] Rotation
[۱۴] Dilation
[۱۵] Disk Automorphism
[۱۶] Squar-root transformation
[۱۷] Bieberbach Theorem

ارز باشد و $f(a)=b$، آنگاه $f(z)-b$ یک صفر از مرتبه p در $z=a$ دارد.

مجمو عه توابع $p-$ ارز بر قرص واحد Δ را با $\sum_p$نمایش می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sum_p = \{f \in H(\Delta) : f(z) = z^p + \sum_{k=p+۱}^{\infty} a_k z^k\} \quad .$$

تعریف ۱.۲.۱۵ . دامنه $\Omega \subset \mathbb{C}$ را نسبت به $z_۰$ ستاره گون [۱۸] گو ییم، هرگاه هر پاره خطی که نقاط Ω را به $z_۰$ وصل می کند، دقیقا در داخل Ω قرار گیرد.

تعریف ۱.۲.۱۶ . تابع ستاره گون، نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به مجموعه ستاره گونی نسبت به مبدا متناظر می کند. در واقع تابع تک ارز $f \in H(\Delta)$ را نسبت به مبدا ستاره گون می نامیم، هرگاه $f(\Delta)$ نسبت به مبدا ستاره گون با شد. مجموعه تمام توابع ستارگون نسبت به مبدا در $A_۱$ را با S^* نمایش می دهیم.

مثال ۱.۲.۱۷ . تابع کوبه $k(z)=\frac{z}{(۱-z)^۲}$یک تابع ستاره گو ن است.

برای اثبات، ملاحظه می‌شود که نگاشت $|z|<۱$ تحت تابع $k(z)$ ،صفحه‌ی W است که در امتداد پرتو $-\frac{۱}{۴}$ تا $-\infty$بریده شده است. بنابراین تصویرقرص واحد تحت این نگاشت ناحیه‌ای ستاره‌گون است.

تذکر ۱.۲.۱۸ . زیرکلاس P را که کلاس توابع تحلیلی است به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$P = \{\varphi \in H(\Omega) : \varphi(۰) = ۱, Re\varphi > ۰, z \in \Omega\}$$

تعریف ۱.۲.۱۹ . فرض کنیم $A(p,k)$ نشان دهنده کلاسی از توابع بفرم

$$f(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad (p < k \quad ; \quad p,k \in \mathbb{N} = ۱,۲,...)$$

---

[۱۸] Starlike

باشند که در دایره واحد Δ تحلیلی هستند، جائیکه $\mathcal{U}(r) = \{z : z \in \mathbb{C}, \mid z \mid < r\}$. همچنین تعریف می کنیم

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(۱) \qquad , \qquad \mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(p, p+۱) \ .$$

تعریف ۲۰.۲.۱ . یك تابع f متعلق به کلاس $\mathcal{A}(p)$را ستاره گون از مرتبه α در $\mathcal{U}(r)$ گوئیم، اگر و تنها اگر

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \qquad , \qquad (z \in \mathcal{U}(r) \ ; \ ۰ < r \leq ۱ \ , \ ۰ \leq \alpha < p) \ .$$

قضیه ۲۱.۲.۱ . فرض کنیمf تابعی تحلیلی در Δباشد و داشته باشیم

$$f(۰) = f'(۰) - ۱ = ۰$$

در این صورت $f \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P \ .$$

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}^*$. ادعا می‌کنیم f هر دیسک $|z| < \rho < ۱$ را به یک ناحیه ستاره‌گون می نگارد. یعنی $g(z) = f(\rho z)$ در برد g قرار دارد .($۰ < \rho < ۱$)

با فرض $U_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ خواهیم داشت:

$$f(U_\rho) = \{f(\rho z) : |z| < ۱\} \ .$$

نشان می‌دهیم $f(U_\rho)$ نسبت به مبدا ستاره‌گون است. باید ثابت کنیم به ازای هر t ثابت و دلخواه ($۰ < t < ۱$) و هر z نقطه $tg(z)$ روی پاره خط واصل بین ۰ و g قرار دارد، و نیز هر نقطه ω که بین ۰ و g قرار دارد به ازا ی هر ($۰ < t < ۱$) برابر با $\omega = tg(z)$ است.

لذا چون $f \in S^*$ و $z_۱ \in \Delta$ بطوریکه $f(z_۱) = f(z_۲)$. $z_۱$ وابسته به z را با $\omega(z)$ نمایش می‌دهیم،

در این صورت،

$$|\omega(z)| \leq |z| \ .$$

ثابت می‌کنیم $\omega(z)$ تحلیلی است. چون $f \in \mathcal{S}^*$ ، بنابراین f یک به یک و تحلیلی است. پس $\omega(z) = f^{-۱}(tf(z))$ تحلیلی بوده و

$$tg(z) = tf(\rho z) = f(\omega(\rho z)) = g(\omega_۱(z)) \ ,$$

که در آن $\omega_۱(z) = \frac{\omega f(z)}{\rho}$ و$|\omega_۱(z)| \leq |z|$، این امر ثابت می‌کند که f دایره $|z| < \rho < ۱$ را به منحنی C_ρ که یک ناحیه ستاره‌گون را احاطه می‌کند می‌نگارد. این بدان معنی است که $argf(\rho e^{i\theta})$ تابعی اکیدا صعودی نسبت به θ است. زیرا در غیر این صورت، بردار شعاعی می بایست مرز U_ρ را حداقل در دو نقطه قطع کند پس یک تابع در $\mathcal{S}^*$ با شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{argf(\rho e^{i\theta})\} > ۰$$

مشخص می‌گردد و بنا به تعریف لگاریتم بفرم $logz = |z| + iargz$، داریم،

$$.argf(\rho e^{i\theta}) = Imlogf(\rho e^{i\theta}) \ .$$

لذا خواهیم داشت:

$$۰ \leq argf(\rho e^{i\theta}) = Imlogf(\rho e^{i\theta}) \ .$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} ۰ < \frac{\partial}{\partial\theta}\{Imlogf(\rho e^{i\theta})\} &= Im\{\frac{\partial}{\partial\theta}logf(\rho e^{i\theta})\} \\ &= Im\{i\frac{\rho e^{i\theta}f'(\rho ei\theta)}{f(\rho ei\theta)}\} \\ &= Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} \ . \end{aligned}$$