

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۳۷۱۷۳

۱۳۸۰ / ۸ / ۳۰
وزارتخانه‌های دفاع و امور
تعمیرات

به نام خدا

دانشکده مکانیک

حل جریان روی بدنه و ناحیه wake آن در زاویه حمله به کمک VLM

مجتبی علی دولابی نژاد

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته

مهندسی هوا-فضا

استاد راهنما

دکتر رضا تقوی

013788

فروردین ۱۳۸۰

۳۷/۱۶۳

چکیده:

تاکنون روشهای مختلفی به منظور تحلیل جریان حول اشیاء پرنده ارائه شده که روش شبکه های گردابه ای (Vortex Lattice Method-VLM) از جمله مهمترین آنها می باشد [1,2,3,4,5].

وقتی که بدنه در زاویه حمله قرار می گیرد، جریان از نقاط خاصی روی بدنه جدا شده و بصورت roll up در پشت آن ظاهر می شود. روش VLM قادر به مدل کردن roll up نبوده، لذا کاربرد مؤثر آن عمدتاً در زوایای حمله کم مطرح می باشد. روش دیگری به نام شبکه گردابه ای غیر خطی (NLVLM) معرفی شده که در واقع اصلاح یافته روش VLM بوده و قادر به مدل کردن roll up در ناحیه Wake می باشد [9],[10]. در این روش محل نقطه جدایش جزء معلومات می باشد. پس از آن با توجه به موقعیت نقاط جدایش، بدنه و دماغه شبکه بندی شده و بر روی هر پنل یک گردابه نعل اسبی قرار می گیرد. دنباله های آزاد (trailing vortices) که از نقاط جدایش سر منشاء نمی گیرند در امتداد بدنه به بینهایت فرستاده می شوند ورشته هایی که به نقاط جدایش متصل هستند از روی بدنه جدا شده و با یک روند تکرار (از فرمولهای اوپلر) و با اعمال شرط نیرو آزاد در محل اصلی خود قرار گرفته و roll up را در پشت بدنه شکل می دهند.

در این پایان نامه روش حاضر بر روی یک بدنه استوانه ای با دماغه ogive مورد بررسی قرار گرفته و نتایج بدست آمده از آن با نتایج موجود تستهای انجام شده توسط سایر محققین مقایسه شده است.

سپاسگزاری

حمد و سپاس، پروردگاریگانه را، که جلوهای از جلوه های بخشایش بی پایان خویش را در ارزانی فرصت آموختن و توان اندیشیدن بر من آشکار نمود. تنها اوراستایش می نمایم و تنها از اویاری می جویم که به راه نیک رهنمونم سازد، تادرسرای هستی شایستگی پادشاهی نیک او را داشته باشم. آری، ستایش می نمایم. خداوند یکتا و مهربان را که به یاری او انجام این پایان نامه میسر گشت. و در این راستا از همکاری بی دریغ جناب آقای دکتر رضا تقوی استاد راهنمای پایان نامه، کمال تشکر را دارم. جای دارد مراتب سپاس خویش را از دوست و همکار گرامیم جناب آقای مهندس سید مسعود طیبیان که در امر بکارگیری نرم افزار MATLAB اینجانب را یاری کردند، ابراز نمایم. همچنین از جناب آقای مهندس جعفری و دیگر دوستان که به هر نحوی در انجام این پروژه بنده را یاری کردند قدر دانی می نمایم. هر چند توان جبران زحمات و تلاشهای این آقایان گرامی وارجمند را ندارم، اما امیدوارم خداوند امکان آنرا برایم مهیا سازد تا بتوانم آموخته هایم را در راه پیشرفت میهن اسلامیم بکار بندم. و بدین گونه خوشنودی و خرسندی این سروران را فراهم آورم.

روش شبکه گردابه

Vortex Lattice Method

هواپیما

Aircraft

برنامه نویسی

Computer program

Flow

جریان

Vortex

گردابه

Analysis

تحلیل و محاسبه

Computational

محاسبه

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: تاریخچه و مفاهیم مقدماتی

۲	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- تاریخچه
۵	۳-۱- مفاهیم مقدماتی
۵	۱-۳-۱- جریان گردابه
۶	۲-۳-۱- خط گردابه
۷	۳-۳-۱- سطح و لوله گردابه و رشته گردابه
۷	۴-۳-۱- قضیه هلمولتز
۷	۵-۳-۱- قانون بیوساوارت
۹	۶-۳-۱- سرعت القاء شده بواسطه خط گردابه مستقیم
۱۴	۷-۳-۱- محاسبه سرعت القایی توسط رشته های نیمه بینهایت در نقطه P
۱۷	۸-۳-۱- محاسبه بردار عمود بر هر پنتل
۱۷	۹-۳-۱- توزیع گردابه نعل اسبی در امتداد دلخواه

فصل دوم: معرفی روش شبکه گردابه (VLM)

۲۱	۱-۲- مقدمه
۲۱	۲-۲- مراحل روش VLM
۲۱	۱-۲-۲- انتخاب المان منفرد
۲۴	۲-۲-۲- گسته سازی و تولید شبکه
۲۵	۳-۲-۲- ضرائب تاثیر (Influence coefficients)
۲۶	۴-۲-۲- تشکیل بردار سمت راست RHS
۲۶	۵-۲-۲- حل دستگاه معادلات خطی
۲۶	۶-۲-۲- محاسبات ثانویه، فشارها، بارها، سرعتها و غیره
۲۷	۷-۲-۲- خاصیت اجسام متقارن
۲۸	۸-۲-۲- بدست آوردن موقعیت نقطه کنترل
۲۹	۳-۲- روشهای پنتلی با پتانسیل مرتبه یک
۲۹	۱-۳-۲- انتخاب المان منفرد
۳۰	۲-۳-۲- گسته سازی و تولید شبکه
۳۱	۳-۳-۲- ضرائب تاثیر (Influence coefficients)
۳۲	۴-۲-۲- بوجود آوردن RHS
۳۳	۵-۲-۲- حل معادلات خطی

۳۳ محاسبه سرعتها، فشارها و بارها ۶-۲-۲
۳۴ دنباله (Wake) ۴-۲
۳۴ قدرت دنباله ۱-۴-۲
۳۶ شکل wake ۲-۴-۲
۳۸ مدل‌های wake ۳-۴-۲
۳۸ مشاهده مستقیم جریان ۱-۳-۴-۲
۳۸ wake relaxation ۲-۳-۴-۲
۴۰ روش time stepping ۳-۳-۴-۲

فصل سوم: کاربرد روش شبکه گردابه غیرخطی

۴۳ مقدمه ۱-۳
۴۳ روش NLVLM ۲-۳
۴۷ محاسبه ضرائب آیرودینامیکی ۳-۳
۴۷ تعیین خط جدایش ۴-۳
۴۷ توضیح برنامه کامپیوتری ۵-۳

فصل چهارم: نتایج

۵۰ مقدمه ۱-۴
۵۰ مشخصات و هندسه بدنه ۲-۴
۵۱ حل جریان بدون در نظر گرفتن roll up ۳-۴
۵۲ اثر فواصل شبکه ۴-۴
۵۴ حل جریان با در نظر گرفتن roll up ۵-۴
۵۷ نتیجه ۶-۴
۵۷ پیشنهاد ۷-۴
۵۹ مراجع

فهرست شکلها و نمودارها

عنوان	صفحه
۱-۱- جریان گردابه	۶
۲-۱- خط گردابه	۶
۱-۲-۱- سرعت القایی در نقطه p بواسطه حجم dV	۸
۱-۲-۲-۱- سرعت القایی در نقطه p بواسطه قطعه گردابه به طول dl	۹
۱-۲-۳-۱- سرعت القا شده بوسیله یک قطعه گردابه مستقیم	۹
۱-۲-۴-۱- تعریف زوایای استفاده شده برای محاسبات سرعت القا شده بوسیله گردابه	۱۱
۱-۲-۵-۱- تعریف استفاده شده برای سرعت القایی بوسیله قطعه گردابه مستقیم و سه بعدی	۱۱
۱-۲-۶-۱- اثر یک گردابه مستقیم در نقطه p	۱۲
۱-۲-۷-۱- سرعت القا شده توسط یک رشته مستقیم گردابه از A تا بینهایت در نقطه p	۱۴
۱-۲-۸-۱- معرفی بردار ها روی گردابه	۱۵
۱-۲-۹-۱- تعیین بردار عمودی هر پتل	۱۶
۱-۲-۱۰-۱- وضعیت نقطه p نسبت به پتل	۱۷
۱-۲-۱۱-۱- گردابه نعل اسبی	۲۲
۱-۲-۱۲-۱- مشکلات ارضاء شرایط $wake$ موازی با سرعت محلی بوسیله یک گردابه	۲۲
۱-۲-۱۳-۱- مدل شبکه گردابه نعل اسبی برای حل مسئله خط لیفت زا	۲۳
۱-۲-۱۴-۱- المان گردابه نعل اسبی	۲۳
۱-۲-۱۵-۱- بردار نرمال صفحه	۲۵
۱-۲-۱۶-۱- ترتیب قطعات گردابه برای $down\ wash$ القایی روی بال سه بعدی	۲۷
۱-۲-۱۷-۱- تصویر خیالی طرف راست مدل بال متقارن	۲۸
۱-۲-۱۸-۱- موقیت نقطه کنترل در پتل	۲۹
۱-۲-۱۹-۱- ارائه هندسه سطح یک هواپیما، همراه با شبکه بندی (a : مدل کامل b : مدل جدا شده)	۳۱
۱-۲-۲۰-۱- روش ذخیره سازی اطلاعات شبکه روی پنلهای بال	۳۱
۱-۲-۲۱-۱- $wake$ جاری شده از پنلهای بالایی و پایینی لبه فرار	۳۲
۱-۲-۲۲-۱- مشخصات استفاده شده برای تغییر پتانسیل برای محاسبات سرعت مماس محلی	۳۴
۱-۲-۲۳-۱- اعمال شرط کاتا هنگام استفاده از عنصر حلقه گردابه	۳۶
۱-۲-۲۴-۱- شرط ممکنگی که می تواند یکار برده شود (a لبه فرار نوک تیز b) لبه فرار با زاویه مشخص	۳۶
۱-۲-۲۵-۱- اثرات هندسه $wake$ بر روی ضرائب آیرودینامیکی یک بال با $AR=1.5$	۳۸
۱-۲-۲۶-۱- صفحات قطع کننده $wake$ برای محاسبه $wake\ rollup$	۳۹
۱-۲-۲۷-۱- $wake\ rollup$ بال و کانارد با استفاده از روش $relaxation$	۴۰
۱-۲-۲۸-۱- اثر موقیت کانارد روی توزیع لیفت $span$	۴۰

- ۲۰-۲- ناپایداری یک جفت گردابه دنباله..... ۴۱
- ۱-۳- محل قرار گیری نقاط جدایش..... ۴۳
- ۲-۳- شبکه بندی جسم مورد نظر..... ۴۳
- ۳-۳- محل قرار گیری گردابه نعل اسبی در پنل..... ۴۴
- ۴-۳- موقعیت گردابه های دنباله ای و نقطه کنترلی روی پنل..... ۴۴
- ۱-۴- هندسه بدنه با دماغه ogive در زاویه حمله α ۵۰
- ۲-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در 10° مقطع و در زاویه حمله 20° درجه بدون مدل کردن rollup..... ۵۱
- ۳-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در 20° مقطع و در زاویه حمله 20° درجه بدون مدل کردن rollup..... ۵۱
- ۴-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در 10° مقطع و در زاویه حمله 30° درجه بدون مدل کردن rollup..... ۵۲
- ۵-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در 10° مقطع و در زاویه حمله 10° درجه بدون مدل کردن rollup..... ۵۲
- ۶-۴- تغییرات ضریب فشار با θ در زاویه حمله 20° درجه بدون در نظر گرفتن rollup..... ۵۳
- ۷-۴- اثر اندازه مش بندی روی توزیع عرضی فشار در زاویه 20° درجه ، با در نظر گرفتن rollup..... ۵۳
- ۸-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در زاویه حمله 20° درجه در مقطع $x/d=2$ با مدل کردن rollup و بدون آن..... ۵۴
- ۹-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در زاویه 20° درجه در مقطع $x/d=4.5$ با مدل کردن rollup و بدون آن..... ۵۴
- ۱۰-۴- توزیع فشار عرضی روی بدنه در زاویه حمله 20° درجه در مقطع $x/d=6$ با مدل کردن rollup و بدون آن..... ۵۵
- ۱۱-۴- موقعیت نقاط جدایش و مقاطع انتخاب شده برای نمایش rollup..... ۵۵
- ۱۲-۴- نمای rollup در مقطع $x/d=3.2$ (مقطع A-A شکل ۱۱-۴)..... ۵۶
- ۱۳-۴- نمای rollup در مقطع $x/d=4.4$ (مقطع B-B شکل ۱۱-۴)..... ۵۶
- ۱۴-۴- نمای rollup در مقطع $x/d=5.6$ (مقطع C-C شکل ۱۱-۴)..... ۵۷

فصل اول

تاریخچه و مفاهیم مقدماتی

۱-۱- مقدمه

هدف از این فصل ارائه روابط اصولی و قوانین کاربردی مربوط به VLM است. بنابراین مطالب این فصل مقدمه ای برای روشهای ارائه شده در فصلهای بعدی می باشد. علاوه بر اینها تاریخچه ای از روشهای پنلی در ابتدای فصل ارائه شده است.

۱-۲- تاریخچه

از مشاهده تاریخچه حل جریان پتانسیل واضح است که با افزایش تدریجی پیچیدگی، روند، بسمت استفاده از حلهای مقدماتی و تعیین قدرتهای مورد نظر از طریق شرایط مرزی می باشد. بنابراین اساساً اگر یک مسئله بتواند با توزیع مقادیر مجهول روی سطح مرزی حل شود، حل عددی سریع تری بدست می آید و بهتر از این است که کل حجم در بر گیرنده جسم مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. این مطلب برای اکثر مسائل جریان غیر لزج و تراکم نا پذیر صدق می کند.

کاهش میدان حل سه بعدی به دو بعدی (روی مرز سه بعدی) به توسعه سریع برنامه های کامپیوتری در مورد روشهای پنلی منتهی شده و بعضی از آنها در جدول (۱-۱) لیست شده است. شاید بتوان از برنامه HESS (Douglas - Neumann) به عنوان اولین برنامه موفقیت آمیز در روشهای پنلی نام برد، که بوسیله شرکت هواپیمایی Douglas ساخته شده و در آن شرط مرزی Neumann استفاده شده است. این روش بر اساس پنلهای مسطح چشمه است و قابلیت مدل کردن جریانهای بدون لیفت و سه بعدی پتانسیل را دارد.

برنامه (Wood ward I) که در Seattle area بوجود آمده، قابلیت حل جریان لیفت زا برای اجسام ضخیمی شبیه هواپیما را دارد. دیگر کاربرد این برنامه در جریان پتانسیل مافوق صوت می باشد. این برنامه بعد از اصلاحاتی تحت عنوان برنامه USSAERO (wood word II) منتشر شد. حدوداً همزمان با این برنامه ها، Hess المانهای دابلت را به روش بدون لیفت اضافه کرد تا بتواند جریان لیفت زا را مدل کند. این برنامه بطور وسیع در صنعت مورد استفاده قرار گرفت و برنامه Hess I نامیده شد. همه برنامه های کامپیوتری لیست شده در جدول (۱-۱) می توانند با استفاده از تبدیل پرائتل گلارث، اثرات تراکم پذیری در جریان سرعت پائین را لحاظ کنند.

برنامه های کامپیوتری بالا بعنوان نسل اول برنامه های پنلی در نظر گرفته شد، اما وقتی تکنولوژی کامپیوتر پیشرفت کرد، الگوریتمهای پیچیده که بر پایه تقریبات با مرتبه بالاتر بود مورد استفاده قرار گرفت. برای مثال برنامه MCAIR که بر اساس نقاط منفرد با مرتبه بالا نوشته شده دارای دو قسمت است که قسمت اول دارای

حل دو بعدی ایرفویل و المانهای زیاد می‌باشد و قسمت دوم یک روش تکرار است که با زیر برنامه لایه مرزی همراه شده است. سرعت و فشار بدست آمده از حل جریان پتانسیل به داخل این زیر برنامه فرستاده شده و ضخامت جابجایی و اصطکاک سطح محاسبه می‌شود. در خلال تکرار بعدی حل پتانسیل، هندسه پتل سه بعدی اصلاح شده و شامل ضخامت جابجایی لایه مرزی می‌شود. در همین زمانها برنامه SOUSSA نوشته شد. این برنامه از شرط مرزی دیربخله استفاده می‌کرد (همانند MCAIR) و قابلیت محاسبه جریان ناپایا (Unsteady Oscillatory mode) را داشت. همچنین شرکت هواپیمایی Douglas برنامه Hess I را به برنامه Hess II ارتقاء داد که از صفحات با شکل سهمی و توزیع نقاط منفرد با مرتبه بالا استفاده می‌کرد.

در خلال زمان توسعه نسل دوم برنامه های پتلی، بیشترین تلاش در توسعه برنامه PANAIR توسط شرکت Boeing و برای NASA انجام گرفت. این برنامه دارای المان پنج قسمتی (Five Flat Subplanes) و توزیع نقاط منفرد مرتبه بالا بود و از شرط مرزی دیربخله استفاده می‌کرد. اما شرط مرزی نیومن نیز روی سطوح آن بخوبی قابل استفاده بود. همچنین این برنامه قابلیت حل جریان پتانسیل سوپر سونیک را داشت.

تا قبل از سال ۱۹۸۰ اکثر برنامه های پتلی به شرکتهای بزرگ هوا فضایی محدود بود (بخاطر داشتن کامپیوترهای main)، اما با پیشرفت سریع کامپیوترها و کاهش قیمت آنها استفاده از این نوع برنامه ها برای شرکتهای کوچکتر هم اقتصادی به نظر می‌رسید. اولین برنامه پتلی که در دسترس صنایع کوچکتر قرار گرفت VSAERO بود. این برنامه را می‌توان به عنوان شروع نسل سوم برنامه های پتلی در نظر گرفت زیرا از پتلها و نقاط منفرد مرتبه اول استفاده کرده است. این برنامه از شرط مرزی دیربخله برای بدنه های ضخیم و شرط نیومن برای صفحات نازک استفاده کرده است. با تداخل با چندین روش، لایه مرزی در طول خطوط جریان بکار گرفته شد. اما اثر ضخامت جابجایی با اضافه کردن چشمه لحاظ شد همچنین یک زیر برنامه wake roll up اضافه شد تا سرعت القائی روی wake و حرکت گردابه های wake به موقعیت نیرو آزاد (Force Free) محاسبه شود. به تبع موفقیت این برنامه (ناشی از اقتصادی بودن از لحاظ کامپیوتر)، شرکت لاکهید یک برنامه جدید به این روش ساخت و نام آن را QUADPAN گذاشت.

در اینجا به نظر می‌رسد که تئوری روشهای پتلی به حد رشد رسیده و بیشتر تلاش در Pre Processing و Post Processing (تولید اتوماتیک شبکه و ارائه گرافیکی نتایج) صورت می‌گیرد.

بعضی اصلاحات دیگر این روشها در خلال نیمه دوم سال ۱۹۸۰، اضافه کردن یک قسمت برای حرکت ناپایا (Unsteady) و بهینه سازی کلی روش (از لحاظ حافظه مورد نیاز و توانایی solver) بوده است. این برنامه PMARC نامیده می‌شود که در NASA Ames نوشته شده و برای کامپیوترهای شخصی مناسب است [۱].

روندکاری اخیر بعضی از برنامه نویسان که به استفاده از روشهای با مرتبه پائین روی آورده بودند و این حقیقت که تعدادی زیادی از این روشها هم اکنون استفاده می‌شوند، به چندین مطالعه مقایسه ای منجر شد. این مطالعات نشان می‌دهند که روشهایی با مرتبه پائین سریع تر و ارزان تر عمل می‌کنند. بعضی از مزایای هر یک از این روشها در جدول (۲-۱) لیست شده است.

جدول (۱-۱) بعضی از روشهای پنبلی و جلوه های آنها

روش	هندسه پنبل	توزیع المان منفرد	شرایط مرزی	توضیحات
Douglas-Neumann 1962	مسطح	چشمه با قدرت ثابت	نیومن	
Wood ward I 1966	مسطح	چشمه با توزیع قدرت خطی و گردابه با قدرت ثابت	نیومن	M>1
USSAERO 1973	مسطح	چشمه با توزیع قدرت خطی و گردابه با قدرت خطی	نیومن	M>1
Hess I 1972	مسطح	چشمه با توزیع قدرت ثابت و دابلت با قدرت ثابت	نیومن	
MCAIR 1980	مسطح	چشمه با توزیع قدرت ثابت و دابلت با قدرت انحنای درجه ۲	دریخله	کوپل با مدل لایه مرزی
SOUSSA 1980	سه‌موی	چشمه ثابت، دابلت ثابت	دریخله	وابسته به زمان -خطی شده
Hess II 1981	سه‌موی	چشمه خطی، دابلت مربعی	نیومن	
PAN AIR 1981	مسطح	چشمه خطی، دابلت مربعی	نیومن و دریخله	M>1
VSAERO 1982	مسطح	چشمه ثابت، دابلت ثابت	نیومن و دریخله	کوپل با مدل لایه مرزی و مدل roll up
QUADPAN 1983	مسطح	چشمه ثابت، دابلت ثابت	دریخله	
PMARC 1987	مسطح	چشمه ثابت، دابلت ثابت	نیومن و دریخله	مدل roll up لحنه ای

جدول (۲-۱) مزایای کدهای پتلی مرتبه پائین و مرتبه بالا

روشهای با order پائین	روشهای با order بالا	
ساده	پیچیده تر	بدست آوردن ضرائب تاثیر
نسبتا ساده	تلاش بیشتری احتیاج دارد	برنامه نویسی کامپیوتری
کوتاه	بلند تر	اندازه برنامه
پائین	نسبتا بالا	هزینه اجرا
پائین برای همان تعداد پتل (دقیقت برای همان زمان اجرا)	دقت بالا برای پنلهای داده شده	دقت
خیلی حساس نیست	حساس نیست	حساسیت به فاصله در پتل بندی
ممکن	ساده برای هندسه دلخواه	$M > 1$

۱-۳-۳- مفاهیم مقدماتی

۱-۳-۱- جریان گردابه

شکل (۱-۱) جریانی را نشان می دهد که همه خطوط جریان آن دایره های هم مرکز حول یک نقطه دلخواه است. بعلاوه فرض کنیم که سرعت در امتداد هر یک از خطوط جریان دایره ای شکل ثابت باشد ولی این سرعت از یک خط جریان به خط دیگری چنان تغییر کند که با فاصله از مرکز نسبت معکوس داشته باشد. چنین جریانی را جریان گردابه می نامند. مولفه های سرعت در جهات شعاعی و مماسی به ترتیب V_r و V_θ هستند که در اینجا $V_r = 0$ و $V_\theta = -\Gamma/2\pi r$ و Γ به جز سیرکولاسیون (circulation)، بعنوان قدرت جریان گردابه نیز می تواند مطرح باشد و معادله V_θ میدان جریان گردابه ای به قدرت Γ را تعیین می کند. پتانسیل سرعت در جریان گردابه ای چنین بدست می آید [3].

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi = V_r = 0 \quad (1 a-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi = V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1 b-1)$$



شکل (۱-۱) جریان گردابه

با انتگرالگیری خواهیم داشت :

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta \quad (۲-۱)$$

به همین روش تابع جریان ψ برابر خواهد بود با:

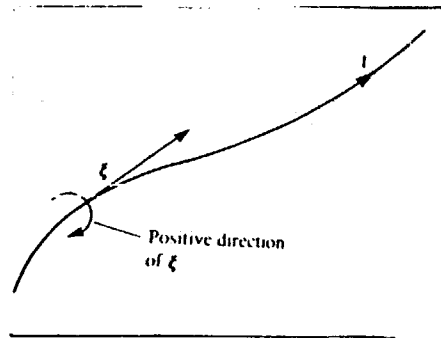
$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (۳-۱)$$

۱-۳-۲ - خط گردابه

خطوط میدان (مثلاً در شکل ۲-۱) که با بردار ورتیسیته موازی هستند خطوط گردابه نام دارد و این خطوط با رابطه زیر بیان می شوند:

$$\xi \times dl = 0$$

که dl یک قطعه در طول خط گردابه (مطابق شکل ۲-۱) می باشد.



شکل (۲-۱) خط گردابه

در دستگاه مختصات کارتزین معادله به معادلات دیفرانسیل برای خطوط گردابه منتهی می شود.

$$\frac{dx}{\xi_x} = \frac{dy}{\xi_y} = \frac{dz}{\xi_z}$$

۱-۳-۳- سطح و لوله گردابه و رشته گردابه

خطوط گردابه گذرنده از میان یک منحنی باز در فضا، یک سطح گردابه را تشکیل می دهد و خطوط گردابه گذرنده از یک منحنی بسته یک لوله گردابه (Vortex tube) را تشکیل می دهند. رشته گردابه (Vortex filament) به صورت یک لوله گردابه با سطح مقطع بینهایت کوچک تعریف می شود [1].

۱-۳-۴- قضیه هلمهولتز

- ۱- قدرت یک رشته گردابه در طول آن ثابت است.
- ۲- یک رشته گردابه نمی تواند در سیال شروع شود یا پایان پذیرد (آن باید به شکل یک منحنی بسته درآید یا از دو طرف تا بینهایت ادامه یابد).
- ۳- المانهای گردابه مثل خطوط گردابه، لوله گردابه، سطح گردابه و... با گذشت زمان، المان گردابه باقی می ماند [2].

۱-۳-۵- قانون بیوساوارت

در یک سیال تراکم ناپذیر معادله پیوستگی به صورت زیر می باشد:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4-1)$$

بطوریکه ورتیسیتی، ξ ، موجود بوده و هدف تعیین میدان سرعت متوجه از توزیع این ورتیسیتی می باشد. این میدان سرعت را می توان بصورت کرل بردار \mathbf{B} بیان کرد.

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (5-1)$$

از آنجایی که کرل گرادیان یک بردار برابر صفر می باشد، \mathbf{B} داخل گرادیان تابع اسکالر موقعیت و زمان، نامعین است و می تواند بدین صورت انتخاب شود.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6-1)$$

لذا ورتیسیتی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\xi = \nabla \times \mathbf{q} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

با بکار بردن معادله ۶-۱ رابطه بالا برای پتانسیل برداری \mathbf{B} به معادله پواسون تبدیل می شود.

$$\xi = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (7-1)$$

حل این معادله با استفاده از قضیه گرین به صورت زیر نوشته می شود.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\xi}{|r_0 - r_1|} dV$$

در اینجا \mathbf{B} در نقطه P محاسبه می شود (شکل ۱-۱، ۳) و نتیجه انتگرال گیری ورتیسیتی در حجم V