دانشگاه کاشان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه دکتری در
رشته ریاضی (گرایش جبر)

عنوان:

ساختار زوج‌های n-ایزوکلینیک و ν-ایزولوژیک گروه‌ها

استاد راهنما:
دکتر احمد غلامی

بوسیله:
شهرام حیدریان

شهریور ۱۳۸۹

چکیده

در سال ۱۹۴۰، فیلیپ هال به منظور رده بندی p-گروه های متناهی مفهوم ایزوکلینیسم را تعریف کرد. کمی بعد، هال در یک مقالهٔ کوتاه ایزوکلینیسم را به ایزولوژیسم نسبت به واریتهٔ ν تعمیم داد.

در این رساله، مفهوم $n-$ایزوکلینیسم و$\nu-$ایزولوژیسم را برای ردهٔ تمام زوج‌های گروه‌ها تعمیم می‌دهیم. پس از مطالعهٔ جزییات این مفاهیم جدید، زوج گروه‌های تحویل‌ناپذیر خارج قسمتی و زیرگروهی را تعریف و نشان می‌دهیم، چگونه یک زوج از گروه‌ها با یک زوج از زیرگروه‌ها یا با یک زوج از گروه‌های خارج قسمتی‌اش $n-$ایزوکلینیک است. همچنین ثابت می‌کنیم، هر زوج از گروه‌ها با یک زوج تحویل‌ناپذیر از گروه‌ها $\nu-$ایزولوژیک است. سرانجام، با استفاده از نتایج بدست آمده، نابرابری‌هایی را برای پایای بیر زوج گروه‌ها بدست می آوریم.

کلمات کلیدی: زوج گروه‌ها، $n-$ایزوکلینیسم، زوج گروه $n-$ریشه‌ای، $\nu-$ایزولوژیسم، پایای بیر

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم ایزوکلینیسم اولین بار در سال ۱۹۴۰ توسط فیلیپ هال، به منظور رده‌بندی p−گروه‌های متناهی معرفی شد. ایده‌ی ابتدایی هال بر این حقیقت استوار بود که، اگر $x, y \in G$ و $x', y' \in Z(G)$، آنگاه $[xx', yy'] = [x, y]$. او ثابت کرد، دو p−گروه متناهی و ایزوکلینیک از یک گونهٔ مزدوجی هستند. همچنین او نشان داد در هر کلاس هم‌ارزی ناشی از رابطهٔ هم‌ارزی ایزوکلینیسم، گروهی وجود دارد که مرکز آن مشمول در زیرگروه مشتقش است. هال این گروه‌ها را گروه‌های ریشه‌ای نامید و نشان داد در حالتی که کلاس هم‌ارزی ایزوکلینیسم شامل یک گروه متناهی باشد، گروه‌های ریشه‌ای دقیقاً گروه‌هایی با کوچکترین مرتبه در آن کلاس هم‌ارزی هستند. اندکی بعد هال در مقالهٔ دیگری ایزولوژیسم نسبت به یک واریته، که تعمیمی از ایزوکلینیسم می‌باشد، را تعریف کرد. در این رساله مفاهیم ایزوکلینیسم و ایزولوژیسم را برای زوج‌های گروه‌ها معرفی می‌نماییم و پس از بدست آوردن پاره‌ای از ویژگی‌های این مفاهیم جدید، کاربردهایی از آنها را مشاهده خواهیم کرد.

فصل اول رسالهٔ حاضر به بیان مقدمات و معرفی مفاهیم ایزوکلینیسم، ایزولوژیسم و برخی از نتایج شناخته شده مربوط به آنها اختصاص داده شده است. همچنین برخی از کاربردهای این مفاهیم از جمله در درجهٔ تعویض‌پذیری گروه‌ها، ضربگر شور، پایای بیر و گروه‌های پوششی را در بخش انتهایی این فصل بیان می‌کنیم.

فصل دوم به معرفی زوج‌های $n-$ایزوکلینیک و بررسی ساختار آنها اختصاص دارد. در این فصل، پس از معرفی مفهوم $n-$ایزوکلینیسم زوج گروه‌ها، برخی از نتایج مربوط به این مفهوم جدید را بدست می‌آوریم و بعد از معرفی مفهوم تحویل‌ناپذیری، نشان می‌دهیم هر زوج از گروه‌ها با یک زوج تحویل‌ناپذیر خارج‌قسمتی $n-$ایزوکلینیک است.

در فصل سوم رسالهٔ حاضر مفهوم $n-$ایزوکلینیسم زوج گروه‌ها را به $\nu-$ایزولوژیسم نسبت به یک واریتهٔ ν تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم چگونه یک زوج از گروه‌ها با یک زوج از زیرگروه‌ها یا یک زوج از گروه‌های خارج‌قسمتی‌اش $\nu-$ایزولوژیک است. همچنین برای دو زوج $\nu-$ایزولوژیک (G_1, M_1) و (G_2, M_2) از گروه‌ها، زوجی چون (G, M) را چنان می‌سازیم که (G, M) با هر دو زوج (G_1, M_1) و (G_2, M_2) $\nu-$ایزولوژیک بوده و زوج‌هایی خارج‌قسمتی از (G, M) با (G_1, M_1) و (G_2, M_2) یکریخت باشند. در پایان این فصل، با استفاده از نتایج بدست آمده، نابرابری‌هایی را برای پایای بیر زوج گروه‌ها بدست می‌آوریم.

فصل ۱

ایزوکلینیسم و ایزولوژیسم

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۴۰، فیلیپ هال[۱] [۵]، به منظور رده بندی p-گروه های متناهی، مفهوم ایزوکلینیسم را ابداع کرد. ایده‌ی ابتدایی هال در رده بندی گروه ها بر این حقیقت استوار بود که، اگر $x, y \in G$ و $x', y' \in Z(G)$، آنگاه $[xx', yy'] = [x, y]$. از آنجا که رابطه ایزوکلینیسم یک رابطه هم ارزی روی کاتگوری گروه هاست، این رابطه کاتگوری گروه ها را به خانواده ها (کلاس های هم ارزی) افراز می کند. هال نشان داد، در هر خانواده می توان گروه S را چنان یافت که $Z(S) \subset S'$. او این گروه را گروه ریشه‌ای نامید و ثابت کرد، اگر یک خانواده شامل گروهی متناهی باشد، آنگاه گروه‌های ریشه‌ای دقیقاً گروه های با کوچکترین مرتبه در خانواده هستند. کمی بعد، هال ایزوکلینیسم را به ایزولوژیسم نسبت به واریتهٔ ν تعمیم داد. هر گاه ν واریته گروه های آبلی در نظر گرفته شود، مفهوم ایزولوژیسم

---

[۱] $P.\ Hall$

همان ایزوکلینیسم خواهد بود. در [۹]، هکستر[1] واریتهٔ تمام گروه‌های پوچتوان از درجهٔ حداکثر n را در نظر گرفت و ساختار کلاس‌های n−ایزوکلینیسم را بررسی کرد. هکستر نشان داد، دو گروه ایزوکلینیک G_1 و G_2 را می‌توان در گروهی چون G چنان نشاند که G، G_1 و G_2 ایزوکلینیک باشند. همچنین بیوچ[2] [۳]، نشان داد برای دو گروه n−ایزوکلینیک G_1 و G_2 می‌توان گروه G را چنان یافت که G_1 و G_2 با گروه‌های خارج قسمتی از G یکریخت باشند، در حالی که G، G_1 و G_2 با هم n−ایزوکلینیک هستند.

در این فصل پس از تعریف گروه‌های ایزوکلینیک و ν−ایزولوژیک، برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای شناخته شدهٔ آنها را بیان می‌کنیم.

۲.۱ ایزوکلینیسم

فرض کنیم G یک گروه و $x_1, ..., x_{n+1} \in G$. در این صورت جابجاگر $[x_1, x_2]$ به صورت $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ تعریف می‌شود. همچنین، قرار می‌دهیم $[x_1, ..., x_{n+1}] = [[x_1, ..., x_n], x_{n+1}]$ و قرارداد می‌کنیم که $[x_1] = x_1$. اگر H و K زیرگروه‌های G باشند، آنگاه $[H, K]$ نشان دهندهٔ زیرگروهی از G تولیدشده توسط تمام جابجاگرهایی به صورت $[h, k]$ است که در آن $h \in H$ و $k \in K$.

دنبالهٔ $\{\gamma_n(G)\}$ از زیرگروه‌های G را به استقراء به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G], \quad (n > 1).$$

دنبالهٔ $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq ...$ را سری مرکزی پایینی G می‌نامیم. همچنین، دنبالهٔ

[1] N. H. Hekster
[2] J. C. Bioch

$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$ از زیرگروه‌های G با تعریف زیر را سری مرکزی بالایی G می‌نامیم:

$$Z_1(G) = Z(G), \quad \frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} = Z(\frac{Z}{Z_{n-1}(G)}), \quad (n \geq 1).$$

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G و H دو گروه باشند. یک هموکلینیسم از G به H زوج (α,β) از همریختی‌ها است چنان که $\alpha : \frac{G}{Z(G)} \to \frac{H}{Z(H)}$، $\beta : G' \to H'$ و دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} \frac{G}{Z(G)} \times \frac{G}{Z(G)} & \xrightarrow{\gamma_G} & G' \\ \alpha^2\downarrow & & \downarrow\beta \\ \frac{H}{Z(H)} \times \frac{H}{Z(H)} & \xrightarrow{\gamma_H} & H' \end{array}$$

که در این جا $\gamma_G : \frac{G}{Z(G)} \times \frac{G}{Z(G)} \to G'$ همریختی خوشتعریفی است که به صورت

$$\gamma_G(xZ(G), yZ(G)) = [x,y]$$

تعریف می‌شود.

۲.۲.۱ گزاره. اگر (α,β) یک هموکلینیسم از G به H باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

(الف) اگر α پوشا باشد، β نیز پوشاست؛

(ب) اگر β یک به یک باشد، α هم یک به یک است.

برهان. (الف) فرض کنیم α پوشا باشد و $y_1,\ y_2 \in H$. در این صورت $x_1,\ x_2 \in G$ وجود دارند چنان که برای $i = 1, 2$، $\alpha(x_iZ(G)) = y_i(Z(H))$. اینک داریم،

$$\begin{aligned} [y_1, y_2] &= \gamma_H(y_1Z(H), y_2Z(H)) = \gamma_H(\alpha(x_1Z(G)), \alpha(x_2Z(G))) \\ &= \beta(\gamma_G(x_1Z(G), x_2Z(G))) = \beta([x_1, x_2]) \end{aligned}$$

پس $Im\beta = H'$ و β پوشاست.

(ب) فرض کنیم $gZ(G) \in Ker\alpha$ و $x \in G$ دلخواه باشد. اگر $h \in \alpha(gZ(G)) = Z(H)$، آنگاه برای هر $t \in \alpha(xZ(G))$، $[h,t] = ۱$. چون β یک به یک است، نتیجه می‌گیریم، $[g,x] = ۱$. از آنجا که رابطهٔ اخیر برای هر $x \in G$ برقرار است، پس $g \in Z(G)$. بنا بر این $gZ(G) = Z(G)$ و α یک به یک است. □

فرض کنیم (α, β) یک هموکلینیسم از G به H باشد. هستهٔ (α, β)، که با $Ker(\alpha, \beta)$ نشان داده می‌شود، برابر با $Ker\beta$ تعریف می‌شود. همچنین نگارهٔ (α, β) را برابر با زیرگروهی چون V از H شامل $Z(H)$ تعریف می‌شود چنان که $\alpha(\frac{G}{Z(G)}) = \frac{V}{Z(H)}$. نگارهٔ (α, β) را با $Im(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.

۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (α, β) یک هموکلینیسم از G به H باشد. در این صورت (α, β) را یک ایزوکلینیسم از G به H گوییم، هرگاه α و β یکریختی باشند. دو گروه G و H را ایزوکلینیک گوییم، هر گاه یک ایزوکلینیسم از G به H موجود باشد. در این صورت می‌نویسیم $G \sim H$.

توجه کنید، ممکن است دو گروه ایزوکلینیک باشند، اما یکریخت نباشند. مثلاً گروه کواترنیون $Q_۸$ و گروه دووجهی $D_۸$ ایزوکلینیک هستند، در حالی که این دو گروه یکریخت نمی‌باشند. اگر دو گروه G و H یکریخت باشند، می‌نویسیم $G \cong H$.

۴.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم (α, β) یک هموکلینیسم از G به H باشد. در این صورت (α, β) یک ایزوکلینیسم از G به H است، اگر و تنها اگر α پوشا و β یک به یک باشد.

در لم زیر معادلی برای ایزوکلینیک بودن دو گروه بیان می‌کنیم.

۵.۲.۱ لم. فرض کنیم G و H دو گروه باشند. در این صورت، G و H ایزوکلینیک هستند، اگر و تنها اگر زیرگروه‌های $A \le Z(G)$، $B \le Z(H)$ و یکریختی‌های $\alpha : \frac{G}{A} \to \frac{H}{B}$

و $\beta : G' \to H'$ موجود باشند چنان که برای هر $g_۱, g_۲ \in G$،

$$\beta([g_۱, g_۲]) = [h_۱, h_۲]$$

جایی که $h_۱ \in \alpha(g_۱A)$ و $h_۲ \in \alpha(g_۲A)$.

برهان. اگر G و H ایزوکلینیک باشند، آنگاه حکم بدیهی است. برای اثبات عکس حکم، کافی است نشان دهیم $\alpha(\dfrac{Z(G)}{A}) = \dfrac{Z(H)}{B}$. فرض کنیم $g \in Z(G)$، $y \in H$ و $h \in \alpha(gA)$. عضو $x \in G$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $y \in \alpha(xA)$. در این صورت

$$[h, y] = \beta([g, x]) = \beta(۱_G) = ۱_H.$$

پس $h \in Z(H)$ و $\dfrac{Z(H)}{B} \subseteq \alpha(\dfrac{Z(G)}{A})$. شمول معکوس نیز به طریق مشابه ثابت می‌گردد.□

رابطهٔ ایزوکلینیسم یک رابطهٔ هم ارزی است که خانوادهٔ تمام گروه‌ها را به کلاس‌های هم ارزی افراز می‌کند. هر یک از این کلاس‌های هم ارزی را یک خانوادهٔ ایزوکلینیسم می‌نامیم. به این ترتیب تمام گروه‌های آبلی در یک خانواده ایزوکلینیسم قرار دارند، که همان کلاس هم ارزی گروه بدیهی است. می‌توان دید، اگر A یک گروه آبلی باشد، آنگاه همواره $G \times A \sim G$.

۱.۲.۶ لم. فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$ و N زیرگروه نرمالی از G باشد. در این صورت داریم

(الف) $H \sim HZ(G)$. بویژه، اگر $G = HZ(G)$، آنگاه $H \sim G$؛

(ب) $\dfrac{G}{N \cap G'} \sim \dfrac{G}{N}$. بویژه، اگر $N \cap G' = ۱$، آنگاه $G \sim \dfrac{G}{N}$.

برهان. (الف) چون $Z(HZ(G)) = Z(H)Z(G)$ و $(HZ(G))' = H'$، پس خواهیم داشت،

$$\frac{HZ(G)}{Z(HZ(G))} = \frac{HZ(H)Z(G)}{Z(H)Z(G)} \cong \frac{H}{Z(H) \cap Z(G)} = \frac{H}{Z(H)}.$$

بنا بر این طبق لم ۵.۲.۱، $H \sim HZ(G)$.

(ب) زیرگروه K از G را چنان در نظر می‌گیریم که $\frac{K}{N} = Z(\frac{G}{N})$. در این صورت K بزرگترین زیرگروه G است که $[G,K] \leq N$. اما چون $[G,K] \leq G'$، نتیجه می‌گیریم $[G,K] \leq N \cap G'$ و K بزرگترین زیرگروه از G با این ویژگی است. از این رو

$$\frac{\frac{G}{N}}{Z(\frac{G}{N})} \cong \frac{\frac{G}{N\cap G'}}{Z(\frac{G}{N\cap G'})}, \quad \frac{K}{N\cap G'} = Z(\frac{G}{N\cap G'}).$$

همچنین

$$(\frac{G}{N})' = \frac{G'N}{N} \cong \frac{G'}{N\cap G'} = (\frac{G}{N\cap G'})'.$$

بنا بر این طبق تعریف، $\frac{G}{N} \sim \frac{G}{N\cap G'}$. □

۷.۲.۱ گزاره. فرض کنیم G یک گروه، $H \leq G$ و $N \trianglelefteq G$. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) اگر $M \trianglelefteq G$ و $N \cap G' = 1$، آنگاه $G \sim \frac{G}{N\cap M}$؛

(ب) اگر $N \cap G' = 1$، آنگاه $H \sim \frac{HN}{N}$؛

(ج) اگر $G = HZ(G)$، آنگاه $\frac{G}{N} \sim \frac{HN}{N}$؛

(د) اگر $K \leq G$ و $G = HZ(G)$، آنگاه $G \sim \langle H, K\rangle$.

برهان. (الف) چون $(M\cap N) \trianglelefteq G$ و $(M\cap N)\cap G' = 1$، لم ۶.۲.۱(ب) نشان می‌دهد

$$\frac{G}{N\cap M} \sim \frac{G}{(N\cap M)\cap G'} \sim G.$$

(ب) از آنجا که $H' \cap (H\cap N) \leq N \cap G' = 1$، باز هم طبق لم ۶.۲.۱(ب) و قضیهٔ دوم یکریختی داریم

$$\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{H\cap N} \sim \frac{H}{(H\cap N)\cap H'} \cong H.$$

(ج) چون $Z(\frac{G}{N}) \geq \frac{Z(G)N}{N}$ و $\frac{G}{N} = \frac{HN}{N}\frac{Z(G)N}{N}$، بااستفاده از لم ۶.۲.۱(الف) نتیجه

می گیریم

$$\frac{G}{N}=\frac{HN}{N}Z(\frac{G}{N})\sim\frac{HN}{N}.$$

(د) از آنجا که $H\leq\langle H,K\rangle$، پس $G=\langle H,K\rangle Z(G)$. مجدداً حکم از لم ۶.۲.۱ (الف) نتیجه می‌گردد. $\square$

در گزارهٔ بعدی شرایطی را برای ایزوکلینیک بودن یک گروه متناهی با زیرگروه‌ها یا گروه‌های خارج قسمتی‌اش بیان می‌کنیم.

۸.۲.۱ گزاره. فرض کنیم G یک گروه متناهی، $H\leq G$ و $N\trianglelefteq G$. در این صورت داریم

(الف) $G\sim H$، اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}\cong\frac{H}{Z(H)}$؛

(ب) $\frac{G}{N}\sim G$، اگر و تنها اگر $G'\cong(\frac{G}{N})'$.

برهان. (الف) هرگاه $G\sim H$ حکم واضح است. بالعکس، اگر $\frac{G}{Z(G)}\cong\frac{H}{Z(H)}$، آنگاه

$$\begin{aligned}|G|=|\frac{G}{Z(G)}||Z(G)| &= |\frac{H}{Z(H)}||Z(G)|\\ &\leq |\frac{H}{H\cap Z(G)}||Z(G)|\\ &= |\frac{HZ(G)}{Z(G)}||Z(G)|\\ &= |HZ(G)|\end{aligned}$$

پس $G=HZ(G)$ و حکم از لم ۶.۲.۱ (الف) نتیجه می‌شود.

(ب) باتوجه به این که $(\frac{G}{N})'=\frac{G'N}{N}\sim\frac{G'}{N\cap G'}$، اگر $G'\cong(\frac{G}{N})'$، آنگاه $N\cap G'=1$. بنا بر این طبق لم ۶.۲.۱ (ب)، $\frac{G}{N}\sim G$. عکس حکم بدیهی است. $\square$

۹.۲.۱ لم. فرض کنیم (α,β) یک هموکلینیسم از G به H باشد. اگر $x\in G'$، آنگاه

داریم

(الف) $\alpha(xZ(G)) = \beta(x)Z(H)$؛

(ب) اگر $g \in G$ و $h \in \alpha(gZ(G))$، آنگاه $\beta(g^{-1}xg) = h^{-1}\beta(x)h$.

برهان. بدون کاستن از کلیّت حکم، می‌توانیم فرض کنیم به ازاء برخی $g_1, g_2 \in G$، داشته باشیم، $x = [g_1, g_2]$.

(الف) فرض کنیم برای $i = 1,2$، $h_i \in \alpha(g_iZ(G))$. در این صورت با توجه به تعریف هموکلینیسم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\alpha(xZ(G)) = [\alpha(g_1Z(G)), \alpha(g_2Z(G))] &= [h_1Z(H), h_2Z(H)] \\ &= [h_1, h_2]Z(H) = \beta(x)Z(H)\end{aligned}$$

(ب) فرض کنیم برای $i = 1,2$، $h_i \in \alpha(g_iZ(G))$، در این صورت داریم

$$\beta(g^{-1}xg) = [h^{-1}h_1h, h^{-1}h_2h] = h^{-1}[h_1, h_2]h = h^{-1}\beta(x)h.$$

و به این ترتیب حکم (ب) ثابت می‌شود. □

۱۰.۲.۱ قضیه (اول ایزوکلینیسم). فرض کنیم (α, β) یک هموکلینیسم از G به H باشد. در این صورت،

(الف) $Ker(\alpha, \beta)$ یک زیرگروه نرمال G است؛

(ب) $Im(\alpha, \beta) \sim \frac{G}{Ker(\alpha, \beta)}$.

برهان. (الف) فرض کنیم $x \in Ker(\alpha, \beta)$ و $g \in G$. عضو $h \in \alpha(gZ(G))$ را در نظر می‌گیریم. بنا بر لم ۹.۲.۱(ب)، $\beta(g^{-1}xg) = h^{-1}\beta(x)h = 1$. پس $g^{-1}xg \in Ker(\alpha, \beta)$ و در نتیجه $Ker(\alpha, \beta)$ زیرگروه نرمال G است.

(ب) بنا بر تعریف $Ker(\alpha, \beta) = Ker\beta$. فرض کنیم $\frac{N}{Ker\beta} = \frac{Z(G)}{Ker\beta}$، در این صورت

$G \trianglerighteq N$ و $(Ker\beta)Z(G) \leq N$. اگر $\frac{V}{Z(H)} = \alpha(\frac{G}{Z(G)})$، آنگاه $Z(H) \leq Z(V)$ و بنا بر تعریف $Im\beta = V'$. اینک داریم

$$\frac{\frac{G}{Ker\beta}}{\frac{Z(G)}{Ker\beta}} = \frac{\frac{G}{Ker\beta}}{\frac{N}{Ker\beta}} \cong \frac{G}{N} \cong \frac{\frac{G}{Z(G)}}{\frac{N}{Z(G)}}.$$

نگاشت $\alpha^* : \frac{G}{Z(G)} \to \frac{\frac{V}{Z(H)}}{\frac{Z(V)}{Z(H)}}$ با تعریف $\alpha^*(gZ(G)) = \alpha(gZ(G))\frac{Z(V)}{Z(H)}$ یک برویختی است و $\frac{N}{Z(G)} = Ker\alpha^*$. پس طبق قضیه اول یکریختی $\frac{V}{Z(V)} \cong \frac{\frac{G}{Z(G)}}{\frac{N}{Z(G)}}$. همچنین نگاشت کانونی $\beta^* : (\frac{G}{Ker\beta})' \to Im\beta$، که بوسیلهٔ β القاء می‌شود، را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $V' = Im\beta \cong (\frac{G}{Ker\beta})'$، پس زوج (α^*, β^*) یک ایزوکلینیسم از $\frac{G}{Ker(\alpha, \beta)}$ به $Im(\alpha, \beta)$ است. □

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد، دو گروه $G_۱$ و $G_۲$ ایزوکلینیک هستند، هرگاه از یک تبار باشند؛ یعنی $G_۱$ و $G_۲$ با گروه‌های خارج قسمتی گروهی چون G یکریخت باشند، در حالی که هر دو با G ایزوکلینیک هستند.

۱۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گروه باشند. در این صورت $G_۱ \sim G_۲$، اگرو تنها اگر گروه G و زیرگروه‌های $N_۱$ و $N_۲$ از آن موجود باشند چنان که،

$$\frac{G}{N_۱} \cong G_۱, \quad \frac{G}{N_۲} \cong G_۲, \quad G_۱ \sim G \sim G_۲.$$

برهان. فرض کنیم (α, β) یک ایزوکلینیسم از $G_۱$ به $G_۲$ باشد. زیرگروه G از $G_۱ \times G_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G = \{(x, y) \in G_۱ \times G_۲ \mid \alpha(xZ(G_۱)) = yZ(G_۲)\}.$$

قرار می‌دهیم $N_۱ = \{(۱, y) \mid y \in Z(G_۲)\}$ و $N_۲ = \{(x, ۱) \mid x \in Z(G_۱)\}$. در این

صورت $G \trianglelefteq N_i$ و $G_i \cong \frac{G}{N_i}$، $i = ۱, ۲$ و همچنین $G' = \langle (t, \beta(t)) \mid t \in G'_۱ \rangle$. به این ترتیب $N_۱ \cap G' = ۱ = N_۲ \cap G'$. اکنون با توجه به لم ۶.۲.۱(الف)، $\frac{G}{N_۱} \sim G \sim \frac{G}{N_۲}$. پس $G_۱ \sim G \sim G_۲$. $\square$

قضیهٔ زیر، که به نوعی دوگان قضیهٔ قبل است، نشان می دهد دو گروه چون $G_۱$ و $G_۲$ ایزوکلینیک هستند، هرگاه از یک نسل باشند؛ یعنی هر دو با زیرگروه‌هایی از گروهی چون G یکریخت و با G ایزوکلینیک باشند.

۱۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گروه باشند. در این صورت $G_۱ \sim G_۲$، اگر و تنها اگر گروه G و زیرگروه‌های $H_۱$ و $H_۲$ از آن موجود باشند به طوری که

$$H_۱ \cong G_۱, \quad H_۲ \cong G_۲, \quad G_۱ \sim G \sim G_۲.$$

برهان. فرض کنیم، $G_۱ \sim G_۲$ و (α, β) یک ایزوکلینیسم بین آنها باشد. در این صورت با توجه به تعریف

$$\frac{G_۱}{Z(G_۱)} \cong \frac{G_۲}{Z(G_۲)} \cong Inn\ G_۲.$$

چون $Inn\ G_۲ \leq Aut\ G_۲$، گروه $G_۱$ می‌تواند روی $G_۲$ به صورت زیر عمل کند:

$$g_۲{}^{g_۱} = x_۲^{-۱} g_۲ x_۲ \qquad \forall g_۱ \in G_۱,\ g_۲ \in G_۲$$

که در این جا $x_۲ \in \alpha(g_۱ Z(G_۱))$. اکنون F را حاصلضرب نیم مستقیم $G_۱$ و $G_۲$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$E = \{(a^{-۱}, \beta(a)) : a \in G'_۱\}.$$

ادعا می‌کنیم E زیرگروه نرمال F است. فرض کنیم $a, b \in G'$. در این صورت نتیجه می‌گیریم $\beta(a) \in \alpha(aZ(G_۱))$. اینک با توجه به تعریف گروه F داریم،

$$(b^{-۱}, \beta(b))(a^{-۱}, \beta(a)) \ = \ (b^{-۱}a^{-۱}, \beta(b)^{a^{-۱}}\beta(a))$$

$$
\begin{aligned}
&= ((ab)^{-1}, \beta(a)\beta(b)\beta(a^{-1})\beta(b)) \\
&= ((ab)^{-1}, \beta(ab)) \\
&\in E
\end{aligned}
$$

همچنین $E \in ((a, \beta(a^{-1})) = (a^{-1}, \beta(a))^{-1}$. پس E زیرگروه F است. اگر $g_1 \in G_1$ آنگاه با توجه به لم ۹.۲.۱ داریم،

$$
\begin{aligned}
(g_1^{-1}, 1)(a^{-1}, \beta(a))(g_1, 1) &= (g_1^{-1}a^{-1}g_1, \beta(a)^{g_1}) \\
&= ((g_1^{-1}ag_1)^{-1}, \beta(a)^{x_2}) \\
&= ((g_1^{-1}ag_1)^{-1}, \beta(g_1^{-1}ag_1)) \\
&\in E
\end{aligned}
$$

بنا بر این $\{(g_1, 1) : g_1 \in G_1\} \cong G_1$ مشمول در نرمال ساز E در F یعنی $N_F(E)$ است. علاوه بر این، اگر $g_2 \in G_2$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
(1, g_2^{-1})(a^{-1}, \beta(a))(1, g_2) &= (a^{-1}, (g_2^{-1})^{a^{-1}}\beta(a)g_2) \\
&= (a^{-1}, \beta(a)g_2^{-1}\beta(a^{-1})\beta(a)g_2) \\
&= (a^{-1}, \beta(a)).
\end{aligned}
$$

لذا $\{(1, g_2) : g_2 \in G_2\} \cong G_2$ در مرکز ساز E در F یعنی $C_F(E)$ قرار دارد. چون F حاصلضرب نیم مستقیم G_1 و G_2 است، پس E در F نرمال می‌باشد. اکنون قرار می‌دهیم، $G = \frac{F}{E}$ و نشان می‌دهیم G دارای ویژگی‌های مورد نظر است.

نگاشت‌های $f_i : G_i \to G$، $i = 1, 2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
f_1(g_1) = (g_1, 1), \quad f_2(g_2) = (1, g_2) \quad \forall g_i \in G_i,\ i = 1, 2.
$$

در این صورت f_1 و f_2 همریختی هستند. از آنجا که β یک به یک است، به سادگی می‌توان دید که این دو همریختی یک به یک نیز هستند. اکنون اگر $H_i = f(G_i)$، $i = 1, 2$ آنگاه این دو زیرگروه G دارای ویژگی‌های مورد نظر هستند. کافی است نشان دهیم، G با G_1 و G_2 ایزوکلینیک است.

نگاشت $f : F \to \frac{G_1}{Z(G_1)}$ را برای هر $(g_1, g_2) \in F$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f((g_1, g_2)) = g_1 Z(G_1)\ \alpha^{-1}(g_2 Z(G_2)).$$

نگاشت f یک بروریختی است و $Ker\ f = \{(g_1, g_2) : \alpha(g_1 Z(G_1)) = g_2^{-1} Z(G_2)\}$. قرار می‌دهیم $Z = Ker\ f$. ادعای بعدی آن است که

$$[Z, (g_1, 1)] \leq E, \quad [Z, (1, h_2)] = 1 \quad \forall g_1 \in G_1,\ h_2 \in G_2. \qquad (1)$$

فرض کنیم $(z_1, z_2) \in Z$، از این رو $z_2 \in \alpha(z_1^{-1} Z(G_1))$. بنا بر این $z_2 = z_2^{z_1}$، یعنی z_1 به طور بدیهی بر z_2 عمل می‌کند. $g_2 \in \alpha(z_1^{-1} Z(G_1))$ را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب داریم،

$$\begin{aligned}
[(z_1, z_2), (g_1, 1)] &= (z_1, z_2)^{-1}(g_1, 1)^{-1}(z_1, z_2)(g_1, 1) \\
&= (z_1^{-1}, (z_2^{-1})^{z_1^{-1}})(g_1^{-1}, 1)(z_1 g_1, z_2^{g_1}) \\
&= (z_1^{-1}, z_2^{-1})(g_1^{-1} z_1 g_1, z_2^{g_1}) \\
&= ([z_1, g_1], (z_2^{-1})^{g_1^{-1} z_1 g_1} z_2^{g_1}) \\
&= ([z_1, g_1], [z_2^{-1}, g_2]^{-1}).
\end{aligned}$$

بنا بر تعریف $\beta([z_1, g_1]) = [z_2^{-1}, g_2]$، پس $[(z_1, z_2), (g_1, 1)] \in E$. لذا نتیجه می‌گیریم

$[Z, (g_1, 1)] \leq E$. اگر $h_2 \in G_2$، آنگاه

$$\begin{aligned} [(z_1, z_2), (1, , h_2)] &= (z_1, z_2)^{-1}(1, h_2^{-1})(z_1, z_2)(1, h_2) \\ &= (z_1^{-1}, z_2^{-1}h_2^{-1})(z_1, z_2h_2) \\ &= (1, (z_2^{-1}h_2^{-1})^{z_1}z_2h_2) \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم $[Z, (1, h_2)] = 1$. به این ترتیب ادعای دوم ثابت می‌گردد. علاوه بر این می‌توان دید، $E \subseteq Z$. رابطه (۱) نتیجه می‌دهد که $\frac{Z}{E} \leq Z(G)$. نشان می‌دهیم تساوی در رابطهٔ اخیر برقرار است. اگر $(u_1, u_2)E \in Z(G)$، آنگاه $[(u_1, u_2), (1, h_2)] \in E$، برای هر $h_2 \in G_2$. عضو دلخواه $x_2 \in \alpha(u_1Z(G_1))$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} (u_1, u_2)^{-1}(1, h_2)^{-1}(u_1, u_2)(1, h_2) &= (u_1^{-1}, (u_2^{-1})^{u_1^{-1}})(1, h_2^{-1})(u_1, u_2h_2) \\ &= (u_1^{-1}, (u_2^{-1})^{u_1^{-1}}h_2^{-1})(u_1, u_2h_2) \\ &= (1, u_2^{-1}(h_2^{-1})^{u_1}u_2h_2) \\ &= (1, [x_2u_2, h_2]) \in E \end{aligned}$$

از این رو برای هر $h_2 \in G_2$، $[x_2u_2, h_2] = 1$. بنا بر این $x_2u_2 \in Z(G_2)$ و در نتیجه

$$u_2^{-1}Z(G_2) = x_2Z(G_2) = \alpha(u_1Z(G_1)).$$

بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم $(u_1, u_2) \in Z$. پس $\frac{Z}{E} = Z(G)$. سر انجام ادعا می‌کنیم

$$G = H_1Z(G) = H_2Z(G).$$

به این منظور $(g_1, g_2) \in F$ را در نظر گرفته، $h_1 \in \alpha^{-1}(g_2Z(G_2))$ و $h_2 \in \alpha(g_1Z(G_1))$

را انتخاب می‌کنیم. اینک داریم،

$$(g_1, g_2) = (g_1, h_2^{-1})(1, h_2 g_2) = (g_1 h_1, 1)(h_1^{-1}, g_2). \qquad (2)$$

از آنجا که $(g_1, h_2^{-1}) \in Z$ و $(h_1^{-1}, g_2) \in Z$، با تحویل رابطهٔ (۲) به پیمانهٔ E ادعای آخر نیز ثابت می‌شود. اکنون با توجه به لم ۶.۲.۱ نتیجه می‌گیریم،

$$H_1 \cong G_1, \quad H_2 \cong G_2, \quad G_1 \sim G \sim G_2. \qquad \square$$

۳.۱ واریتهٔ گروه‌ها

در این بخش به معرفی خانواده‌هایی از گروه‌ها می‌پردازیم که بوسیلهٔ مجموعه‌هایی از معادلات تعریف می‌شوند.

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم F یک گروه و X یک مجموعه باشد. گروه F را بر X آزاد گوییم در صورتی که نگاشت $\iota : X \to F$ موجود باشد به طوری که برای هر گروه G و هر نگاشت $\alpha : X \to G$، همریختی منحصر به فرد $\beta : F \to G$ وجود داشته باشد چنان که $\alpha = \iota \circ \beta$. اگر F گروهی آزاد و R زیرگروه نرمالی از آن باشد که $G \cong \frac{F}{R}$، آنگاه دنباله دقیق $1 \longrightarrow R \stackrel{\subseteq}{\longrightarrow} F \longrightarrow G \longrightarrow 1$ را یک معرف آزاد برای گروه G می‌گوییم.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم F_∞ یک گروه آزاد بر مجموعهٔ شمارای $X = \{x_1, x_2, ...\}$ و G یک گروه باشد. زیر مجموعهٔ ناتهی V از F_∞ را در نظر می‌گیریم. اگر $g_1, ..., g_r \in G$ و $v = v(x_{i_1}, .., x_{i_r}) = x_{i_1}^{k_1} ... x_{i_r}^{k_r} \in V$، آنگاه عضو $v(g_1, .., g_r) = g_1^{k_1} ... g_r^{k_r}$ از گروه G را ارزش کلمهٔ v در $(g_1, ..., g_r)$ می‌نامیم.